MATHEMATISCHE ANNALEN

BEGRÜNDET 1868 DURCH

ALFRED CLEBSCH UND CARL NEUMANN

UNTER MITWIRKUNG

VON

LUDWIG BIEBERBACH, HARALD BOHR, MAX BORN, L. E. J. BROUWER, RICHARD COURANT, CONSTANTIN CARATHÉODORY, WALTHER V. DYCK, OTTO HÖLDER, THEODOR V. KÁRMÁN, CARL NEUMANN, ARNOLD SOMMERFELD

HERAUSGEGEBEN

VON

FELIX KLEIN
IN GÖTTINGEN

DAVID HILBERT
IN GÖTTINGEN

ALBERT EINSTEIN
IN BERLIN

OTTO BLUMENTHAL
IN AACHEN

91. BAND

BERLIN
VERLAG VON JULIUS SPRINGER
1924

MATHEMATISCHE ANNALEN

BEGRÜNDET 1868 DURCH

ALFRED CLEBSCH UND CARL NEUMANN

UNTER MITWIRKUNG

VON

LUDWIG BIEBERBACH, HARALD BOHR, MAX BORN, L. E. J. BROUWER, RICHARD COURANT, CONSTANTIN CARATHÉODORY, WALTHER V. DYCK, OTTO HÖLDER, THEODOR V. KÁRMÁN, CARL NEUMANN, ARNOLD SOMMERFELD

HERAUSGEGEBEN

VON

FELIX KLEIN
IN GÖTTINGEN

DAVID HILBERT
IN GÖTTINGEN

ALBERT EINSTEIN
IN BERLIN

OTTO BLUMENTHAL
IN AACHEN.

91. BAND

BERLIN
VERLAG VON JULIUS SPRINGER
1924

Inhalt des einundneunzigsten Bandes.

(In alphabetischer Ordnung.)

Algebraische Theorie der Ringe. II.

Von

Wolfgang Krull in Freiburg i. Br.

Die vorliegende Arbeit stellt eine Weiterführung der in dieser Zeitschrift erschienenen Abhandlung: „Algebraische Theorie der Ringe. I" dar[1]). Zum Verständnis des folgenden dürfte es vorteilhaft sein, die dort gewonnenen Resultate nochmals kurz zu skizzieren:

Gegenstand der Untersuchung sind im ersten Teil Ringe (d. h. Bereiche mit durch „Addition" und „Multiplikation" verknüpfbaren Elementen, in denen über die Umkehrung der Multiplikation keine Voraussetzung gemacht wird), und zwar insbesondere solche Ringe R, die 1. nur Teiler der Null und Teiler der Eins enthalten, und in denen 2. ein Produkt von ϱ Nullteilern verschwindet. Ein solcher Ring besitzt im wesentlichen dieselben Eigenschaften wie das Restklassensystem nach einem primären Punktideal, d. h. nach einem Polynomideal, dessen Polynome nur in einem Punkt gemeinsam verschwinden. Jedem Ringe R ist ein Körper K zugeordnet, der aus R durch Nullsetzen aller Nullteiler entsteht. Für jedes Polynom einer Variablen mit Koeffizienten aus R läßt sich eine eindeutige Produktzerlegung finden, genau so wie man das entsprechende Polynom mit Koeffizienten aus K eindeutig als Produkt von Potenzen irreduzibler Polynome darstellen kann. Dieses Resultat ist von fundamentaler Bedeutung für die „algebraischen" und „transzendenten" Erweiterungen von R. Während die transzendenten Erweiterungen in Teil I nur knappe Behandlung finden, wird die Theorie der algebraischen Erweiterungen, wenigstens für vollkommene Ringe, ausführlich entwickelt, und es wird das abschließende Resultat gewonnen: „Zwei regulär algebraische Erweiterungen desselben vollkommenen Ringes R sind dann und nur dann isomorph, wenn es ihre zugeordneten Körper sind."

[1]) Math. Ann. 88 (1922), S. 80–122 (zitiert als erster Teil). — In § 1 dieses ersten Teils sind die auch im folgenden zugrunde gelegten Begriffe aus der Idealtheorie kurz zusammengestellt, ebenso die Grundbegriffe der Erweiterung eines Ringes.

Die im ersten Teil gewonnenen Resultate sollen hier in verschiedener Hinsicht verallgemeinert und gründlicher ausgebaut werden. Zunächst wird der allgemeinste Ring S charakterisiert, der sich eindeutig additiv durch endlich viele Ringe R des im ersten Teil betrachteten speziellen Typs darstellen läßt. Die Behandlung dieses, im wesentlichen der Axiomatik angehörigen Problems bildet den Inhalt der ersten drei Paragraphen. Der allgemeinste Ring S besitzt dieselben charakteristischen Eigenschaften wie ein allgemeines endliches System hyperkomplexer Größen mit kommutativer Multiplikation; jeder endliche Ring mit Einheitselement gehört diesem Typus an. Vom Standpunkt der Idealtheorie aus ist S dadurch ausgezeichnet, daß kein Primideal einen echten Teiler besitzt, bzw. daß für kein Ideal sämtliche Potenzen verschieden sind.

Die fünf letzten Paragraphen der vorliegenden Arbeit befassen sich wieder mit Ringen R des speziellen Typs. Es werden zunächst in § 4 die endlichen Ringe behandelt, die dort gewonnenen Resultate werden dann auf beliebige vollkommene Ringe übertragen.

Es handelt sich dabei im wesentlichen um vier, den Aufbau und die Typisierung betreffende Probleme:

1. Der in der Theorie der primären Punktideale wichtige Begriff der Hilbertschen invarianten Zahlen wird in geeigneter Formulierung auf die Ringe R übertragen, und es werden so für die Isomorphie zweier solcher Bereiche notwendige, aber nicht hinreichende Kriterien gewonnen. Dabei werden nicht nur dem Ringe R selbst, sondern auch jedem Ideale aus R Hilbertsche Invarianten zugeordnet. Im allgemeinsten Falle stellen diese Invarianten endliche Zahlen oder transfinite Mächtigkeiten dar.

2. Es wird gezeigt, daß in jedem vollkommenen Ringe R ein „Grundring" besonders einfacher Art enthalten ist, aus dem R durch ausschließliche Adjunktion von Nullteilern gewonnen werden kann. Ein Grundring ist dabei entweder ein Körper, oder er entsteht aus einem Körper durch Bildung der Restklassen nach einer Primzahlpotenz und besitzt dann in seinem Aufbau größte Ähnlichkeit mit einem Körper von Primzahlcharakteristik[2]). Der Nachweis des Vorhandenseins des Grundrings ist vor allem für folgendes Problem von Wichtigkeit: Betrachtet man nur solche Ringe, in denen jedes Ideal eine endliche Basis besitzt, so liegt die Frage nahe, ob sich jeder Ring eines gegebenen Typs als Restklassensystem nach einem

[2]) Zum Begriff der Charakteristik, sowie zu den übrigen der Körpertheorie entnommenen Begriffen vgl. die Arbeit von E. Steinitz: „Algebraische Theorie der Körper". Journal f. Math. **137**, S. 167–308, die im folgenden wie im ersten Teil abgekürzt mit St. zitiert werden soll. Genau wie im ersten Teil werden wir ferner die Abkürzung N. benutzen für die Arbeit: „Idealtheorie in Ringbereichen" von E. Noether (Math. Annalen **83** (1921), S. 24–67).

Polynomideal in endlich viel Variablen mit Koeffizienten aus einem Körper oder sonst aus einem einfach gebauten Bereich darstellen läßt. Aus der Existenz des Grundrings folgt nun, daß diese Frage für die in der vorliegenden Arbeit behandelten vollkommenen Ringe zu bejahen ist, sofern man als Koeffizientenbereiche Körper und Grundringe in gleicher Weise zuläßt.

3. Will man die Erweiterungen eines speziellen Rings, die selbst wieder spezielle Ringe darstellen, untersuchen, so liegt es bei der besonderen Natur dieser Bereiche nahe, sich zunächst auf „reguläre Erweiterungen" zu beschränken, die, grob ausgedrückt, folgendermaßen charakterisiert werden können:

α) Der Erweiterungsring $\bar{R}$ entsteht aus dem Ausgangsring R ausschließlich durch Adjunktion von Einheiten.

β) Zwischen den Nullteilern aus R bestehen in $\bar{R}$ im wesentlichen keine anderen Relationen als in R.

Das Fundamentaltheorem I von § 7 zeigt nun, daß bei vollkommenen Ringen die vollkommenen regulären Erweiterungen mit den im ersten Teil von ganz anderem Standpunkte aus eingeführten algebraischen und transzendenten Erweiterungen identisch sind. Daraus ergibt sich, daß die in Teil I durchgeführte Übertragung von Methoden der Körpertheorie auf die Theorie der speziellen Ringe keine bloß formale, sondern wirklich innerlich berechtigt war.

4. Vor allem führt die Hereinziehung der Körpertheorie zu einem Überblick über die Gesamtheit der vollkommenen regulären Erweiterungen eines vollkommenen Ringes R. Fundamentaltheorem II besagt nämlich: Zwei vollkommene reguläre Erweiterungen desselben vollkommenen Ringes R sind dann und nur dann hinsichtlich R äquivalent, wenn es ihre zugeordneten Körper hinsichtlich des dem Ringe R zugeordneten Körpers K sind. Jeder Erweiterung von R entspricht also im wesentlichen genau eine Erweiterung von K und umgekehrt.

Es handelt sich nun noch darum, kurz zu skizzieren, welche Resultate sich aus den Untersuchungen der vorliegenden Arbeit für die Typisierung der betrachteten Ringe, insbesondere der vollkommenen, ergeben. Es wurde gezeigt, daß alle vollkommenen Ringe eine sehr weitgehende Verwandtschaft mit den Restklassensystemen nach primären Punktidealen besitzen. Daraus ergibt sich aber noch nicht die Möglichkeit, für die Isomorphie zweier vollkommener Ringe notwendige und hinreichende Kriterien zu finden. Denn die entsprechende Frage ist sogar bei den Restklassensystemen nach Punktidealen noch unerledigt. Gelänge ihre Beantwortung in diesem Spezialfall, so wäre damit gleichzeitig eine erschöpfende

Typisierung der endlichen Ringe möglich, während man im allerallgemeinsten, in der vorliegenden Arbeit behandelten Falle den Aufbau von Polynomidealen in Variablenmengen beliebiger Mächtigkeit beherrschen müßte.

Anders als bei den allgemeinen Ringen liegen die Verhältnisse, wenn wir uns auf die oben erwähnten Grundringe, insbesondere auf die vollkommenen, beschränken. Jeder Grundring entsteht aus seinem Primring durch reguläre Erweiterung. Daraus ergibt sich durch Anwendung der beiden Fundamentaltheoreme, daß für die Isomorphie zweier vollkommener Grundringe mit demselben Primring die Isomorphie der zugeordneten Körper notwendige und hinreichende Bedingung ist. Insbesondere sind zwei algebraisch abgeschlossene Grundringe mit demselben Grundring dann und nur dann isomorph, wenn sie gleichen Transzendenzgrad besitzen. Mit diesen Ergebnissen sind die Isomorphiefragen bei vollkommenen Grundringen im wesentlichen erledigt, bzw. auf die entsprechenden Fragen der Körpertheorie zurückgeführt.

§ 1.

Der allgemeine Ring R.

Die allgemeinen Ringe, auf die wir die Ergebnisse des ersten Teils dieser Arbeit ausdehnen wollen, lassen sich folgendermaßen charakterisieren:

Jedes Element aus R besitzt die Gestalt $a = \{a^{(1)}, a^{(2)}, \ldots, a^{(n)}\}$, wobei das Element $a^{(i)}$ einem Ringe $R^{(i)}$ vom speziellen Typus (vgl. Teil I, § 2) *entnommen ist. Wir wollen $a^{(i)}$ als die „i-te Komponente von a" bezeichnen. Zwei Elemente heißen dann und nur dann gleich, wenn sie in sämtlichen Komponenten übereinstimmen. Summe und Produkt sind durch die Gleichungen*

$$\{a^{(1)}, a^{(2)}, \ldots, a^{(n)}\} + \{b^{(1)}, b^{(2)}, \ldots, b^{(n)}\} = \{a^{(1)} + b^{(1)}, a^{(2)} + b^{(2)}, \ldots, a^{(n)} + b^{(n)}\}$$

bzw.

$$\{a^{(1)}, a^{(2)}, \ldots, a^{(n)}\} \cdot \{b^{(1)}, b^{(2)}, \ldots, b^{(n)}\} = \{a^{(1)} \cdot b^{(1)}, a^{(2)} \cdot b^{(2)}, \ldots, a^{(n)} \cdot b^{(n)}\}$$

definiert. Bezeichnet $0^{(i)}$ das Nullelement, $r_e^{(i)}$ das universelle Einheitselement von $R^{(i)}$, so ist

$$\begin{aligned} a &= \{a^{(1)}, 0^{(2)}, \ldots, 0^{(n)}\} + \{0^{(1)}, a^{(2)}, \ldots, 0^{(n)}\} + \cdots + \{0^{(1)}, \ldots, 0^{(n-1)}, a^{(n)}\} \\ &= \{a^{(1)}, r_e^{(2)}, \ldots, r_e^{(n)}\} \cdot \{r_e^{(1)}, a^{(2)}, \ldots, r_e^{(n)}\} \cdot \ldots \cdot \{r_e^{(1)}, \ldots, r_e^{(n-1)}, a^{(n)}\}. \end{aligned}$$

Wir wollen $\{0^{(1)}, \ldots, 0^{(i-1)}, a^{(i)}, 0^{(i+1)}, \ldots, 0^{(n)}\}$ als die „i-te Additionskomponente von a", $\{r_e^{(1)}, \ldots, r_e^{(i-1)}, a^{(i)}, r_e^{(i+1)}, \ldots, r_e^{(n)}\} = a_i$ als die „i-te Multiplikationskomponente von a" bezeichnen. Additions- und Multiplikationskomponenten von a sind eindeutig bestimmt. Nullelement in R

ist das Element $\{0^{(1)}, 0^{(2)}, \ldots, 0^{(n)}\}$, universelles Einheitselement ist $\{r_e^{(1)}, r_e^{(2)}, \ldots, r_e^{(n)}\}$. *Die Gesamtheit aller derjenigen Elemente aus R, deren Additionskomponenten bis auf die i-te sämtlich Null sind, bilden einen mit $R^{(i)}$ isomorphen Ring $S^{(i)}$. R kann als die Summe der Ringe $S^{(i)}$ aufgefaßt werden, insofern sich jedes der Elemente aus R eindeutig als Summe je eines der Elemente aus $S^{(1)}, S^{(2)}, \ldots, S^{(n)}$ darstellen läßt.*

Zwei Elemente $a = \{a^{(1)}, a^{(2)}, \ldots, a^{(n)}\}$ und $b = \{b^{(1)}, b^{(2)}, \ldots, b^{(n)}\}$ sind teilerfremd, d. h. das Ideal (a, b) ist gleich (r_e), wenn die entsprechenden Komponenten in $R^{(i)}$ teilerfremd sind, d. h. wenn für jedes i mindestens eines der Elemente $a^{(i)}, b^{(i)}$ eine Einheit in $R^{(i)}$ ist. Die Multiplikationskomponenten eines Elementes sind daher stets teilerfremd. Ein Element aus R ist dann und nur dann Nullteiler, wenn mindestens eine seiner Komponenten, z. B. die i-te, in $R^{(i)}$ Nullteiler ist; ein Element ist Einheit, wenn sämtliche Komponenten Einheiten sind, *es gibt also in R nur Nullteiler und Einheiten.*

Jedes Ideal aus R läßt sich in der Form $\{\mathfrak{a}^{(1)}, \mathfrak{a}^{(2)}, \ldots, \mathfrak{a}^{(n)}\}$ darstellen, wobei $\mathfrak{a}^{(i)}$ ein Ideal aus $R^{(i)}$ bedeutet, d. h. man kann die Ideale $\mathfrak{a}^{(i)}$ so bestimmen, daß $\mathfrak{a}$ alle und nur die Elemente enthält, deren i-te Komponente dem Ideale $\mathfrak{a}^{(i)}$ entnommen ist.

Diese Tatsache folgt daraus, daß $\mathfrak{a}$ gleichzeitig mit $\{a^{(1)}, a^{(2)}, \ldots, a^{(n)}\}$ auch das Element

$$\{a^{(1)}, a^{(2)}, \ldots, a^{(n)}\} \cdot \{0^{(1)}, \ldots, 0^{(i-1)}, r_e^{(i)}, 0^{(i+1)}, \ldots, 0^{(n)}\}$$
$$= \{0^{(1)}, \ldots, 0^{(i-1)}, a^{(i)}, 0^{(i+1)}, \ldots, 0^{(n)}\}$$

enthält. Aus diesem Grunde enthält nämlich $\mathfrak{a}$ das Element $\{a^{(1)}, a^{(2)}, \ldots, a^{(n)}\}$, sofern nur n Elemente b_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ in $\mathfrak{a}$ auftreten, derart, daß $a^{(i)}$ die i-te Komponente von b_i ist.

Die Ideale $\mathfrak{a}^{(i)}$ sind ersichtlich eindeutig bestimmt. *Sie sollen als die „Komponenten des Ideals $\mathfrak{a}$“ bezeichnet werden.* Die Komponenten des Produkts zweier Ideale sind gleich dem Produkt der entsprechenden Komponenten, d. h. es ist

$$\{\mathfrak{a}^{(1)}, \mathfrak{a}^{(2)}, \ldots, \mathfrak{a}^{(n)}\} \cdot \{\mathfrak{b}^{(1)}, \mathfrak{b}^{(2)}, \ldots, \mathfrak{b}^{(n)}\} = \{\mathfrak{a}^{(1)} \cdot \mathfrak{b}^{(1)}, \ldots, \mathfrak{a}^{(n)} \cdot \mathfrak{b}^{(n)}\}.$$

Wie man sich leicht überzeugt, sind zwei Ideale dann und nur dann teilerfremd, wenn die entsprechenden Komponenten jeweils teilerfremd sind; ferner ist $\mathfrak{a}$ dann und nur dann durch $\mathfrak{b}$ teilbar, wenn die i-te Komponente von $\mathfrak{a}$ jeweils durch die i-te Komponente von $\mathfrak{b}$ teilbar ist.

Im folgenden soll unter $\mathfrak{o}^{(i)} = (r_e^{(i)})$ das Einheitsideal aus $R^{(i)}$, unter $\mathfrak{p}^{*(i)}$ das aus allen Nullteilern von $R^{(i)}$ bestehende Primideal verstanden werden. Dann ist $\mathfrak{o} = (r_e) = \{\mathfrak{o}^{(1)}, \mathfrak{o}^{(2)}, \ldots, \mathfrak{o}^{(n)}\}$ das Einheitsideal aus R. Ferner läßt sich das Ideal $\mathfrak{a} = \{\mathfrak{a}^{(1)}, \mathfrak{a}^{(2)}, \ldots, \mathfrak{a}^{(n)}\}$ eindeutig als Produkt

der teilerfremden Ideale $\mathfrak{a}_i = \{\mathfrak{o}^{(1)}, \ldots, \mathfrak{o}^{(i-1)}, \mathfrak{a}^{(i)}, \mathfrak{o}^{(i+1)}, \ldots, \mathfrak{o}^{(n)}\}$ darstellen $(i = 1, 2, \ldots, n)$.

Die Ideale $\mathfrak{a}_i$ sollen als die „Multiplikationskomponenten von $\mathfrak{a}$" bezeichnet werden. Ist $\mathfrak{a}_i$ die i-te Multiplikationskomponente von $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}_i$ die entsprechende von $\mathfrak{b}$, so ist $\mathfrak{a}_i \cdot \mathfrak{b}_i$ diejenige von $\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b}$.

Ein Ideal, für das mehr als eine Multiplikationskomponente von $\mathfrak{o}$ verschieden ist, kann nicht primär sein, denn ein primäres Ideal läßt sich infolge seiner Grundeigenschaft nicht als Produkt von teilerfremden echten Teilern darstellen. *Hingegen ist jedes Ideal von der Form $\mathfrak{a}_i = \{\mathfrak{o}^{(1)}, \ldots, \mathfrak{o}^{(i-1)}, \mathfrak{a}^{(i)}, \mathfrak{o}^{(i+1)}, \ldots, \mathfrak{o}^{(n)}\}$ primär.* Ist nämlich $\mathfrak{b}_1 \cdot \mathfrak{b}_2 \equiv 0\,(\mathfrak{a}_i)$, so kann entweder sowohl die i-te Komponente von $\mathfrak{b}_1$, als auch diejenige $\mathfrak{b}_2$ von $\mathfrak{o}^{(i)}$ verschieden sein. Dann ist sowohl eine endliche Potenz von $\mathfrak{b}_1$ als auch eine endliche Potenz von $\mathfrak{b}_2$ durch $\mathfrak{a}_i$ teilbar. Ist aber z. B. die i-te Komponente von $\mathfrak{b}_1$ gleich $\mathfrak{o}^{(i)}$, so muß diejenige von $\mathfrak{b}_2$ durch $\mathfrak{a}^{(i)}$ teilbar sein, und es ist $\mathfrak{b}_2 \equiv 0\,(\mathfrak{a}_i)$. Ein Produkt kann also nur dann durch $\mathfrak{a}_i$ teilbar sein, wenn das gleiche von einem Faktor oder von einer endlichen Potenz *jedes* Faktors gilt, $\mathfrak{a}_i$ ist also nach Definition primär. — *Die sämtlichen Primideale des Ringes R sind, wie leicht einzusehen, durch die Ideale $\mathfrak{p}_i = \{\mathfrak{o}^{(1)}, \ldots, \mathfrak{o}^{(i-1)}, \mathfrak{p}^{*(i)}, \mathfrak{o}^{(i+1)}, \ldots, \mathfrak{o}^{(n)}\}\,(i = 1, 2, \ldots, n)$ gegeben.*

Das primäre Ideal $\mathfrak{a}_i$ ist durch das Primideal $\mathfrak{p}_i$ und durch kein anderes teilbar. Ist ϱ_i der zu $R^{(i)}$ gehörige charakteristische Exponent, so muß jedenfalls $\mathfrak{p}_i^{\varrho_i} \equiv 0\,(\mathfrak{a}_i)$ sein.

Die Ideale des Ringes $R^{(i)}$, also auch die des Ringes $S^{(i)}$, lassen sich den zum Primideal $\mathfrak{p}_i$ gehörigen primären Idealen von R hinsichtlich der Multiplikation isomorph zuordnen. Um diese Tatsache einzusehen, braucht man nur allgemein dem Ideal $\mathfrak{a}_i = \{\mathfrak{o}^{(1)}, \ldots, \mathfrak{o}^{(i-1)}, \mathfrak{a}^{(i)}, \mathfrak{o}^{(i+1)}, \ldots, \mathfrak{o}^{(n)}\}$ das Ideal $\mathfrak{a}^{(i)}$ zuzuordnen; dann entsprechen in der Tat $\mathfrak{a}_i \cdot \mathfrak{b}_i$ und $\mathfrak{a}^{(i)} \cdot \mathfrak{b}^{(i)}$ einander, wenn das gleiche von $\mathfrak{a}_i$ und $\mathfrak{a}^{(i)}$, sowie von $\mathfrak{b}_i$ und $\mathfrak{b}^{(i)}$ gilt.

Über die Idealtheorie des Ringes R ist wohl genügend gesagt, es ist klar, daß sich diese Theorie vollkommen auf die Idealtheorie der Ringe $R^{(i)}$- bzw. $S^{(i)}$ zurückführen läßt. Ehe wir zur Behandlung des zu R gehörigen Funktionenringes R_f übergehen, sollen noch einige Bemerkungen über die Elemente aus R gemacht werden.

Sind zwei Elemente a und b aus R äquivalent, d. h. sind die Ideale (a) und (b) gleich, so gibt es stets eine Einheit r, die der Gleichung $a \cdot r = b$ genügt.

In der Tat, sind a und b äquivalent, so müssen auch die i-ten Komponenten dieser Elemente jeweils äquivalent sein. Sind aber $a^{(i)}$ und $b^{(i)}$ äquivalent, so existiert nach dem Zusatz zu Satz 1 von Teil I stets

ein reguläres Element $r^{(i)}$, für das die Gleichung $a^{(i)} \cdot r^{(i)} = b^{(i)}$ erfüllt ist. Daher genügt das reguläre Element $r = \{r^{(1)}, r^{(2)}, \ldots, r^{(n)}\}$ der Gleichung $a \cdot r = b$. Ferner können wir feststellen:

Sind a und b äquivalent, und $a \cdot q = b$, wobei q einen Nullteiler bedeutet, so muß für mindestens ein i die Gleichung $a^{(i)} = b^{(i)} = 0^{(i)}$ bestehen. Ist nämlich q ein Nullteiler, so gibt es mindestens ein i, für das $q^{(i)}$ ein Nullteiler aus $R^{(i)}$ ist. Dann aber muß $a^{(i)} = b^{(i)} = 0^{(i)}$ sein, da sonst die Elemente $a^{(i)}$ und $a^{(i)} \cdot q^{(i)} = b^{(i)}$ nach Satz 1 von Teil I nicht äquivalent sein könnten. Wir wollen schließlich sämtliche Elemente aus R ermitteln, die der Gleichung $x^2 - x = 0$ genügen. Ist a ein Element dieser Art, so muß für jedes i die Gleichung $a^{(i)^2} - a^{(i)} = 0$ erfüllt sein. Da aber das Polynom $x^2 - x$ sich in $R_f^{(i)}$ als Produkt der teilerfremden Primfunktionen $x - r_e^{(i)}$ und x darstellen läßt, so folgt, daß die Gleichung $x^2 - x = 0$ in $R^{(i)}$ nur die beiden Nullstellen $r_e^{(i)}$ und $0^{(i)}$ besitzt. Daraus ergibt sich:

Die sämtlichen Lösungen der Gleichung $x^2 - x = 0$ werden durch diejenigen Elemente dargestellt, deren i-te Komponente für jedes i einen der Werte $0^{(i)}$ oder $r_e^{(i)}$ besitzt.

Man überzeugt sich nun sofort, daß die Elemente

$$e_i = \{0^{(1)}, \ldots, 0^{(i-1)}, r_e^{(i)}, 0^{(i+1)}, \ldots, 0^{(n)}\} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

die einzigen sind, die die Eigenschaft besitzen, daß die Gesamtheit aller Elemente aus R von der Form $a \cdot e_i$ einen der in Teil I behandelten speziellen Ringe mit dem universellen Einheitselement e_i bildet. Daraus folgt weiter:

Die speziellen Ringe $S^{(i)}$, als deren Summe sich der Ring R darstellen läßt, sind eindeutig bestimmt, d. h. ist $R = S^{(1)} + S^{(2)} + \ldots + S^{(n)} = S^{(1)'} + S^{(2)'} + \ldots S^{(n')'}$, wobei alle $S^{(i)}$ und alle $S^{(i)'}$ Ringe des speziellen Typs sind, so ist $n = n'$ und bei geeigneter Numerierung ist $S^{(i)}$ mit $S^{(i)'}$ identisch.

Es handelt sich nun um die Betrachtung von R_f. *Wir definieren analog wie oben für jedes Polynom $f(x) = \{f^{(1)}(x), f^{(2)}(x), \ldots, f^{(n)}(x)\}$ aus R_f die „i-te Komponente", $f^{(i)}(x)$, die „i-te Additionskomponente",*

$$\{0^{(1)}, \ldots, 0^{(i-1)}, f^{(i)}(x), 0^{(i+1)}, \ldots, 0^{(n)}\},$$

die i-te Multiplikationskomponente,

$$\{r_e^{(1)}, \ldots, r_e^{(i-1)}, f^{(i)}(x), r_e^{(i+1)}, \ldots, r_e^{(n)}\}.$$

Diese Komponenten sind eindeutig bestimmt. Die Gesamtheit aller Polynome, deren Additionskomponenten bis auf die i-te sämtlich 0 sind, bilden den Polynomring $S_f^{(i)}$, der mit $R_f^{(i)}$ isomorph ist. R_f läßt sich als Summe

der Ringe $S_f^{(i)}$ auffassen. Eine Funktion ist regulär, wenn sämtliche Komponenten regulär sind. Sie ist dann und nur dann Einheit, wenn sämtliche Komponenten Einheiten sind. Für die reguläre Funktion $f(x)$ findet man folgendermaßen eine Produktzerlegung:

Ist $f^{(i)}(x) = e^{(i)}(x) \cdot \prod_{k=1}^{l_i} h_k^{(i)}(x)$, *wobei der Eindeutigkeit halber die teilerfremden Primärfunktionen* $h_k^{(i)}$ *sämtlich in der Normalform*[8]) *angenommen werden sollen, so erhält man für* $f(x)$ *die eindeutige Produktzerlegung*:

$$f(x) = \prod_{i=1}^{n} e_i(x) \cdot \prod_{i=1}^{n} \prod_{k=1}^{l_i} h_{ik}(x); \quad e_i(x) = \{r_e^{(1)} \ldots r_e^{(i-1)}, e^{(i)}(x), r_e^{(i+1)} \ldots r_e^{(n)}\};$$

$$h_{ik}(x) = \{r_e^{(1)} \ldots r_e^{(i-1)}, h_k^{(i)}(x), r_e^{(i+1)} \ldots r_e^{(n)}\}.$$

Die Funktionen $e_i(x)$ sind Einheiten, die Funktionen $h_{ik}(x)$ sind untereinander teilerfremd und haben die Eigenschaft, daß sie sich nicht mehr als Produkt von teilerfremden Faktoren darstellen lassen. Wir können die Funktionen $h_{ik}(x)$ als Primärfunktionen bezeichnen; Primfunktionen müßten dann diejenigen Funktionen $h_{ik}(x)$ genannt werden, deren i-te Komponente insbesondere eine Primfunktion aus $R_f^{(i)}$ ist.

Jedes Ideal $\mathfrak{a}$ *aus* R_f *besitzt die Gestalt* $\mathfrak{a} = \{\mathfrak{a}^{(1)}, \mathfrak{a}^{(2)}, \ldots, \mathfrak{a}^{(n)}\}$, *und es ist* $\mathfrak{a} = \prod_{i=1}^{n} \mathfrak{a}_i$ $(\mathfrak{a}_i = \{\mathfrak{o}^{(1)} \ldots \mathfrak{o}^{(i-1)}, \mathfrak{a}^{(i)}, \mathfrak{o}^{(i+1)} \ldots \mathfrak{o}^{(n)}\})$. *Die* $\mathfrak{a}_i$ *werden wie oben „Multiplikationskomponenten von* $\mathfrak{a}$*" genannt.* Ein reguläres Ideal $\mathfrak{r}$ aus R_f ist dann und nur dann primär, wenn nur eine seiner Multiplikationskomponenten, etwa die i-te, von $\mathfrak{o}$ verschieden ist, und wenn außerdem im angenommenen Falle $\mathfrak{a}^{(i)}$ ein primäres Ideal aus $R_f^{(i)}$ darstellt. Ist insbesondere $\mathfrak{a}^{(i)}$ Primideal, so ist $\mathfrak{r}$ Primideal. *Jedes reguläre Ideal aus* R_f *läßt sich eindeutig als Produkt von teilerfremden Primäridealen darstellen.* Zwei verschiedene reguläre Primideale aus R_f sind stets teilerfremd. Jedes primäre Ideal $\mathfrak{r}$ ist durch ein einziges Primideal $\mathfrak{p}$ teilbar, und es gibt dann stets einen Exponenten σ, so daß $\mathfrak{p}^{(\sigma)} \equiv 0(\mathfrak{r})$ wird. Ein Nullteilerideal $\mathfrak{q}$ aus R_f ist dann und nur dann primär, wenn nur eine seiner Multiplikationskomponenten, etwa die i-te, von $\mathfrak{o}$ verschieden ist. Ist insbesondere im angenommenen Fall $\mathfrak{a}^{(i)} = \mathfrak{p}_f^{*(i)}$, so ist $\mathfrak{q}$ Primideal. *Die Gesamtheit der Ideale aus* R_f, *deren Multiplikationskomponenten bis auf die* i*-te mit* $\mathfrak{o}$ *identisch sind, läßt sich den Idealen aus* $R_f^{(i)}$ *hinsichtlich der Multiplikation isomorph zuordnen.*

---

[8]) D. h. bei den $h_k^{(i)}(x)$ soll Grad und Ordnung übereinstimmen, und der Koeffizient der höchsten Potenz von x soll gleich $r_e^{(i)}$ sein, was nach Fundamentalsatz 1, § 4 des ersten Teils, stets möglich ist.

Durch die gemachten Bemerkungen ist die Behandlung des Funktionenringes R_f auf die Behandlung der Funktionenringe $R_f^{(i)}$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ vollständig zurückgeführt. Auch die Theorie der algebraischen und transzendenten Erweiterungen von R läßt sich jetzt mit Leichtigkeit erledigen. Wir haben:

Satz 1. *Es läßt sich stets ein Erweiterungsring $\bar{R} = \{\bar{R}^{(1)}, \bar{R}^{(2)}, \ldots, \bar{R}^{(n)}\}$ des Ringes $R = \{R^{(1)}, R^{(2)}, \ldots, R^{(n)}\}$ angeben, bei dem $\bar{R}^{(i)}$ eine beliebig vorgegebene regulär algebraische oder transzendente Erweiterung des Ringes R darstellt.*

Zum Beweis genügt, wie leicht zu sehen, der Nachweis, daß sich ein Erweiterungsring $\bar{R} = \{R^{(1)} \ldots R^{(i-1)}, \bar{R}^{(i)}, R^{(i+1)} \ldots R^{(n)}\}$ von R angeben läßt, bei dem $\bar{R}^{(i)}$ eine *einfache* regulär algebraische oder transzendente Erweiterung von $R^{(i)}$ darstellt. Die Existenz dieses speziellen Erweiterungsringes ist aber trivial. Soll nämlich $\bar{R}^{(i)}$ eine einfache transzendente Erweiterung von $R^{(i)}$ bedeuten, so wird $\bar{R}$ durch das Restklassensystem aller Polynome einer Variablen α mit Koeffizienten aus R modulo $\{(\alpha), \ldots, (\alpha), (0^{(i)}), (\alpha), \ldots, (\alpha)\}$ dargestellt. Soll $\bar{R}^{(i)}$ eine einfache regulär algebraische Erweiterung von $R^{(i)}$ durch eine Nullstelle der Primfunktion $g^{(i)}(\alpha)$ sein, so hat man das Restklassensystem der Polynome von α modulo $\{(\alpha), \ldots, (\alpha), (g^{(i)}(\alpha)), (\alpha), \ldots, (\alpha)\}$ zu nehmen. Bezeichnen wir R als algebraisch abgeschlossen, wenn sämtliche $R^{(i)}$ algebraisch abgeschlossen sind, und nennen wir R vollkommen, wenn alle $R^{(i)}$ vollkommen sind, so ergibt sich aus Satz 1 und den Ergebnissen des ersten Teils:

Satz 2. *Jeder Ring R läßt sich zu einem algebraisch abgeschlossenen erweitern. Ist R ein vollkommener Ring und sind $\bar{R}_k = \{\bar{R}_k^{(1)}, \bar{R}_k^{(2)}, \ldots, \bar{R}_k^{(n)}\}$ $(k = 1, 2)$ zwei algebraisch abgeschlossene Ringe, die dadurch ausgezeichnet sind, daß $\bar{R}_k^{(i)}$ durch regulär algebraische Erweiterung aus $R^{(i)}$ hervorgeht, so sind $\bar{R}_1$ und $\bar{R}_2$ hinsichtlich R äquivalent.*

§ 2.

Axiomatische Behandlung der allgemeinen Ringe R.

Im vorliegenden Paragraphen beschäftigen wir uns mit Ringen R, die ein Einheitselement besitzen, also den Bedingungen 1 bis 4 von § 2, Teil I genügen und außerdem noch folgende Forderungen befriedigen:

a) *Zu jedem primären Ideal $\mathfrak{r}$ aus R gibt es ein eindeutig bestimmtes Primideal $\mathfrak{p}$, so daß $\mathfrak{r} \equiv 0(\mathfrak{p})$ und außerdem $\mathfrak{p}^{\varrho_{\mathfrak{r}}} \equiv 0(\mathfrak{r})$ ist, wobei $\varrho_{\mathfrak{r}}$ eine im allgemeinen von $\mathfrak{r}$ abhängige, natürliche Zahl bedeutet. Man sagt „$\mathfrak{r}$ gehört zu $\mathfrak{p}$“.*

b) *Jedes Ideal aus R läßt sich als kleinstes gemeinschaftliches Vielfaches von endlich vielen zu verschiedenen Primidealen gehörigen Primäridealen darstellen.*

Bedingung a) und b) sind sicher erfüllt, wenn R folgender Forderung genügt:

c) *Jedes Ideal aus R besitzt eine endliche Basis, läßt sich also in der Form* $\mathfrak{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ *schreiben.*

Der Nachweis dieser Tatsache für beliebige Ringe bildet eines der wesentlichsten Resultate der Arbeit „Idealtheorie in Ringbereichen" von E. Noether. Im vorliegenden Paragraphen benutzen wir noch folgende Sätze: „*Ist* $\mathfrak{b}$ *zu den Idealen* $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \ldots, \mathfrak{a}_n$ *teilerfremd, so ist es auch zu* $\mathfrak{a}_1 \cdot \mathfrak{a}_2 \cdot \ldots \cdot \mathfrak{a}_n$ *teilerfremd.*" „*Ist* $\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{d} \equiv 0(\mathfrak{b})$ *und sind* $\mathfrak{a}$ *und* $\mathfrak{b}$ *teilerfremd, so ist* $\mathfrak{d} \equiv 0(\mathfrak{b})$." (Diese Sätze wurden bereits in Teil I benutzt.) „*Sind* $\mathfrak{a}$ *und* $\mathfrak{b}$ *teilerfremd, so ist* $[\mathfrak{a}, \mathfrak{b}] = \mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b}$." [4]) (Dieser Satz folgt für Ringe mit Einheitselement leicht aus der Definition der Teilerfremdheit.) Ferner soll im Anschluß an E. Noether eine neue Bezeichnung eingeführt werden. *Wir sagen: „Das Ideal* $\mathfrak{a}$ *ist zum Ideal* $\mathfrak{b}$ *relativ prim", wenn aus der Gleichung* $\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{d} \equiv 0(\mathfrak{b})$ *stets* $\mathfrak{d} \equiv 0(\mathfrak{b})$ *folgt.*" Schließlich ist noch folgende Vorbemerkung zu machen: *Ist R ein beliebiger Ring, so entsteht ein neuer Ring R', wenn man ein beliebiges Ideal* $\mathfrak{a}$ *aus R gleich Null setzt,* d. h. alle diejenigen Elemente, deren Differenz durch $\mathfrak{a}$ teilbar ist, die also in üblicher Ausdrucksweise modulo $\mathfrak{a}$ kongruent sind (geschrieben: $a_1 \equiv a_2(\mathfrak{a})$), als nicht verschieden ansieht.

In der Tat ist jede Klasse modulo $\mathfrak{a}$ kongruenter Elemente durch jeden ihrer Repräsentanten eindeutig bestimmt, und man kann zwei beliebige Klassen miteinander addieren und multiplizieren, weil aus $a_1 \equiv a_2(\mathfrak{a})$; $b_1 \equiv b_2(\mathfrak{a})$ die Gleichungen $a_1 + b_1 \equiv a_2 + b_2(\mathfrak{a})$ und $a_1 \cdot b_1 \equiv a_2 \cdot b_2(\mathfrak{a})$ folgen[5]). *Besitzt R ein Einheitselement* r_ε, *so besitzt auch R' ein solches, nämlich die durch* r_ε *bestimmte Klasse.*

Wir beweisen jetzt folgenden, für beliebige Ringe mit Einheitselement gültigen

Hilfssatz. *Ist R ein Ring mit Einheitselement, und ist* $(0) = \mathfrak{a}_1 \cdot \mathfrak{a}_2 \cdot \ldots \cdot \mathfrak{a}_n$, *wobei für* $i \neq k$ *die Ideale* $\mathfrak{a}_i$ *und* $\mathfrak{a}_k$ *teilerfremd sind, so läßt sich R in eindeutiger Weise als Summe von n Teilringen* $S^{(1)}, S^{(2)}, \ldots, S^{(n)}$ *darstellen, wobei* $S^{(i)}$ *demjenigen Ringe* $R^{(i)}$ *isomorph ist, den man aus R durch Nullsetzen von* $\mathfrak{a}_i$ *erhält.*

---

[4]) Vgl. N., § 8, S. 51 ff.

[5]) Vgl. Teil I § 7, wo derjenige Körper untersucht wurde, der aus dem dort betrachteten Ring durch Nullsetzen von $\mathfrak{p}^*$ hervorging.

Dieser Satz, der in verschiedenen Spezialfällen schon lange bekannt war, findet sich in allgemeinster Form in der Arbeit: „Moduln in nichtkommutativen Bereichen" von E. Noether und W. Schmeidler[6]). Der dort geführte Beweis soll in etwas anderer Anordnung kurz wiedergegeben werden. Setzt man $\mathfrak{a}^{(i)} = \prod_{k \neq i} \mathfrak{a}_k$, so ist $\mathfrak{a}^{(k)} \equiv 0(\mathfrak{a}_i)$ $(i \neq k)$; $\mathfrak{a}^{(i)} \cdot \mathfrak{a}_i = 0$; $\mathfrak{a}^{(i)} \cdot \mathfrak{a}^{(k)} = 0$ $(i \neq k)$. Ferner ist, wie leicht einzusehen, $(\mathfrak{a}^{(1)}, \mathfrak{a}^{(2)}, \ldots, \mathfrak{a}^{(n)}) = (r_e)$. Es existieren daher n Elemente $e^{(i)} \equiv 0(\mathfrak{a}^{(i)})$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ derart, daß $r_e = \sum_{i=1}^{n} e^{(i)}$ ist. Es muß nun $(e^{(i)}) = \mathfrak{a}^{(i)}$ sein. Denn es ist $((e^{(i)}), \mathfrak{a}_i) = (r_e)$, weil jedes der Elemente $e^{(k)}$ $(i \neq k)$ und folglich auch das Element $\sum_{k \neq i} e^{(k)}$ durch $\mathfrak{a}_i$ teilbar sein muß. Aus der Teilerfremdheit von $e^{(i)}$ und $\mathfrak{a}_i$ und aus der Gleichung $\mathfrak{a}^{(i)} \cdot \mathfrak{a}_i = (e^{(i)}) \cdot \mathfrak{a}_i = 0$ folgt nach einem oben zitierten Satz $\mathfrak{a}^{(i)} \equiv 0((e^{(i)}))$. Da ferner nach Definition $(e^{(i)}) \equiv 0(\mathfrak{a}^{(i)})$ ist, so ist wie behauptet $\mathfrak{a}^{(i)} = (e^{(i)})$. Es läßt sich nun infolge der Gleichung $\sum_{i=1}^{n} e^{(i)} = r_e$ jedes Element a aus R in der Form $a = \sum_{i=1}^{n} a^{(i)}$ darstellen, wobei $a^{(i)} \equiv 0(\mathfrak{a}^{(i)})$ ist. Man braucht ja nur $a^{(i)} = a \cdot e^{(i)}$ zu setzen. Diese Darstellung ist aber eindeutig. Ist nämlich $a = \sum_{i=1}^{n} a^{(i)} = \sum_{i=1}^{n} a^{(i)'}$, so ist $\sum_{i=1}^{n} (a^{(i)} - a^{(i)'}) = 0$. Daraus folgt, daß $a^{(i)} - a^{(i)'}$ durch $\mathfrak{a}_i$ teilbar sein muß, weil 0 und jede der Differenzen $a^{(k)} - a^{(k)'}$ $(k \neq i)$ durch $\mathfrak{a}_i$ teilbar ist. $a^{(i)} - a^{(i)'}$ ist daher durch $[\mathfrak{a}_i, \mathfrak{a}^{(i)}]$ teilbar, und nach einem oben zitierten Satz ist wegen der Teilerfremdheit von $\mathfrak{a}_i$ und $\mathfrak{a}^{(i)}$ die Gleichung $[\mathfrak{a}_i, \mathfrak{a}^{(i)}] = \mathfrak{a}_i \cdot \mathfrak{a}^{(i)} = (0)$ erfüllt. Es ist also allgemein $a^{(i)} = a^{(i)'}$. Das eindeutig bestimmte Element $a^{(i)}$ soll als die i-te Komponente von a bezeichnet werden. Ist $a^{(i)}$ die i-te Komponente von a, $b^{(i)}$ diejenige von b, so ist $a^{(i)} + b^{(i)}$ diejenige von $a + b$, $a^{(i)} \cdot b^{(i)}$ diejenige von $a \cdot b$. (Die letztere Tatsache folgt daraus, daß allgemein $\mathfrak{a}^{(i)} \cdot \mathfrak{a}^{(k)} = (0)$ $(i \neq k)$ ist.) Man kann daher den Ring R in eindeutiger Weise als Summe von n Ringen $S^{(1)}, S^{(2)}, \ldots, S^{(n)}$ darstellen, wobei $S^{(i)}$ aus der Gesamtheit aller derjenigen Elemente besteht, bei denen nur die i-te Komponente von Null verschieden ist, die also durch das Ideal $\mathfrak{a}^{(i)}$ teilbar sind. $e^{(i)}$ ist das Einheitselement von $S^{(i)}$.

Es ist nur noch zu zeigen, daß $R^{(i)}$ und $S^{(i)}$ isomorph sind. Diese Tatsache ergibt sich daraus, daß zwei Elemente dann und nur dann modulo $\mathfrak{a}_i$ kongruent sind, wenn sie in ihrer i-ten Komponente übereinstimmen. Man erhält also eine eineindeutige Zuordnung zwischen den Elementen von $R^{(i)}$ und $S^{(i)}$, wenn man jedem Element a seine i-te Komponente zuordnet. Daß diese Zuordnung hinsichtlich Addition und Multipli-

[6]) Math. Zeitschrift 8 (1920), S. 1–35. Für den vorliegenden Satz vgl. § 4 u. § 5.

kation isomorph ist, folgt daraus, daß zwei Elemente addiert bzw. multipliziert werden, indem man ihre Komponenten addiert bzw. multipliziert. Der Hilfssatz ist jetzt voll bewiesen.

Satz 3. *Ein Ring R gehört dann und nur dann zu den in* § 1 *charakterisierten Ringen, wenn er ein Einheitselement besitzt, Bedingung* a) *und* b) *befriedigt und außerdem folgendem Axiom genügt:*

d) *Kein Primideal aus R besitzt einen vom Einheitsideal verschiedenen echten Teiler.*

In der Tat genügt einerseits jeder der in § 1 charakterisierten Ringe R der Bedingung a), denn das zum primären Ideal $\mathfrak{a} = \{\mathfrak{o}^{(1)} \ldots \mathfrak{o}^{(i-1)}, \mathfrak{a}^{(i)}, \mathfrak{o}^{(i+1)} \ldots \mathfrak{o}^{(n)}\}$ gehörige Primideal $\mathfrak{p} = \{\mathfrak{o}^{(1)} \ldots \mathfrak{o}^{(i-1)}, \mathfrak{p}^{*(i)}, \mathfrak{o}^{(i+1)} \ldots \mathfrak{o}^{(n)}\}$ hat die Eigenschaft, daß $\mathfrak{a} \equiv 0(\mathfrak{p})$ und $\mathfrak{p}^{e_i} \equiv 0(\mathfrak{a})$ ist. Weiterhin läßt sich jedes Ideal aus R in der Form $\mathfrak{a} = \prod_{i=1}^{n} \mathfrak{a}_i$ darstellen, wobei die $\mathfrak{a}_i$ zu verschiedenen Primidealen gehörige Primärideale bedeuten, und wegen der Teilerfremdheit der Ideale $\mathfrak{a}_i$ ist nach einem oben zitierten Satz $\mathfrak{a} = [\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \ldots, \mathfrak{a}_n]$. Schließlich genügt R noch der Bedingung d). Denn jeder echte Teiler des Primideals $\mathfrak{p} = \{\mathfrak{o}^{(1)} \ldots \mathfrak{o}^{(i-1)}, \mathfrak{p}^{*(i)}, \mathfrak{o}^{(i+1)} \ldots \mathfrak{o}^{(n)}\}$ muß die Gestalt $\{\mathfrak{o}^{(1)} \ldots \mathfrak{o}^{(i-1)}, \mathfrak{a}^{(i)}, \mathfrak{o}^{(i+1)} \ldots \mathfrak{o}^{(n)}\}$ besitzen, wobei $\mathfrak{a}^{(i)}$ einen echten Teiler von $\mathfrak{p}^{*(i)}$ darstellt. Dieser Bedingung genügt aber einzig das Ideal $\mathfrak{o}$.

Es handelt sich nun um den Nachweis, daß jeder Ring R mit Einheitselement dem in § 1 charakterisierten Typus angehört, wenn er den Bedingungen a), b), d) genügt. Wir leiten zu diesem Zwecke zunächst aus a), b), d) einige Folgerungen her.

Aus a) und d) folgt, daß zwei zu verschiedenen Primidealen gehörige Primärideale teilerfremd sein müssen. Sind nämlich $\mathfrak{r}_1$ und $\mathfrak{r}_2$ die beiden Primärideale, $\mathfrak{p}_1$ und $\mathfrak{p}_2$ die zugehörigen Primideale, so müssen $\mathfrak{p}_1$ und $\mathfrak{p}_2$ wegen Bedingung d) teilerfremd sein. Dann sind aber auch $\mathfrak{p}_1^{e_{\mathfrak{r}_1}}$ und $\mathfrak{p}_2^{e_{\mathfrak{r}_2}}$ teilerfremd, also wegen $\mathfrak{p}_i^{e_{\mathfrak{r}_i}} \equiv 0(\mathfrak{r}_i)$ $(i = 1, 2)$ auch $\mathfrak{r}_1$ und $\mathfrak{r}_2$. Aus der eben festgestellten Tatsache folgt, daß sich jedes Ideal aus R als Produkt von teilerfremden Primäridealen darstellen läßt. Ist nämlich $\mathfrak{a} = [\mathfrak{r}_1, \mathfrak{r}_2, \ldots, \mathfrak{r}_n]$, wobei die $\mathfrak{r}_i$ zu verschiedenen Primidealen gehörige Primärideale sind, so müssen die $\mathfrak{r}_i$ nach dem eben Festgestellten teilerfremd sein, und es ist ferner $\mathfrak{a} = \mathfrak{r}_1 \cdot \mathfrak{r}_2 \cdot \ldots \cdot \mathfrak{r}_n$. Schließlich können wir noch bemerken: Ist $\mathfrak{a}$ ein beliebiges, $\mathfrak{p}$ ein Primideal, so ist entweder $\mathfrak{a}$ durch $\mathfrak{p}$ teilbar, oder $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{p}$ sind teilerfremd. Ist nämlich $\mathfrak{a} = \mathfrak{r}_1 \cdot \mathfrak{r}_2 \cdot \ldots \cdot \mathfrak{r}_n$, wobei die $\mathfrak{r}_i$ teilerfremde Primärideale sind, so gehört entweder ein $\mathfrak{r}_i$ zu $\mathfrak{p}$, und dann ist $\mathfrak{a}$ durch $\mathfrak{p}$ teilbar, oder $\mathfrak{p}$ ist zu allen $\mathfrak{r}_i$ und mithin auch zu $\mathfrak{a}$ teilerfremd.

Es ist jetzt leicht, den Rest unserer Behauptung zu beweisen. Ist nämlich $(0) = \mathfrak{r}_1 \cdot \mathfrak{r}_2 \cdot \ldots \cdot \mathfrak{r}_n$, wobei die $\mathfrak{r}_i$ teilerfremde Primärideale sind,

so läßt sich nach dem Hilfssatz R auf eindeutige Weise als Summe von n Ringen $S^{(1)}, S^{(2)}, \ldots, S^{(n)}$ darstellen, wobei $S^{(i)}$ demjenigen Ring $R^{(i)}$ isomorph ist, der aus R entsteht, wenn man das Ideal $\mathfrak{r}_i$ gleich Null setzt. Es bleibt nur noch zu beweisen, daß $R^{(i)}$ ein Ring von dem in Teil I betrachteten Typus ist, daß also $R^{(i)}$ Bedingung 5 von § 2 Teil I genügt. Das ist aber in der Tat der Fall. Ist nämlich $\mathfrak{p}_i$ das zu $\mathfrak{r}_i$ gehörige Primideal, und ist $\mathfrak{p}_i^{\varrho_i} \equiv 0(\mathfrak{r}_i)$, so betrachte man ein beliebiges Ideal $\mathfrak{a}$. Entweder ist $\mathfrak{a} \equiv 0(\mathfrak{p})$, dann ist $\mathfrak{a}^{\varrho_i} \equiv 0(\mathfrak{r}_i)$. Oder es ist $\mathfrak{a}$ zu $\mathfrak{p}_i$, also auch zu $\mathfrak{p}_i^{\varrho_i}$ und $\mathfrak{r}_i$ teilerfremd, dann ist $\mathfrak{a}$ modulo $\mathfrak{r}_i$ mit dem Einheitsideal identisch. In $R^{(i)}$ verschwindet also die ϱ_i-te Potenz jedes vom Einheitsideal verschiedenen Ideals, d. h. $R^{(i)}$ genügt dem Axiom 5 von § 2 Teil I. Damit ist gezeigt, daß R sich als eindeutige Summe von endlich viel Ringen des in Teil I behandelten Typus darstellen läßt, Satz 3 ist voll bewiesen.

Satz 4. *Die Bedingungen* a) *und* d) *können auch durch folgendes, gleichwertiges Axiom ersetzt werden:*

e) *Sind* $\mathfrak{a}$ *und* $\mathfrak{b}$ *zwei beliebige Ideale aus* R, *und ist* $\mathfrak{a}$ *zu* $\mathfrak{b}$ *relativ prim, so sind* $\mathfrak{a}$ *und* $\mathfrak{b}$ *teilerfremd.*

Zunächst ist leicht zu sehen, daß aus Bedingung e) Bedingung d) gefolgert werden kann. Ist nämlich $\mathfrak{a}$ ein beliebiges, $\mathfrak{p}$ ein Primideal, so ist $\mathfrak{a}$ entweder durch $\mathfrak{p}$ teilbar, oder zu $\mathfrak{p}$ relativ prim, das folgt unmittelbar aus der Definition des Primideals. Gilt daher Bedingung e), so ist ein beliebiges Ideal $\mathfrak{a}$ entweder zu $\mathfrak{p}$ teilerfremd, oder durch $\mathfrak{p}$ teilbar, $\mathfrak{p}$ kann also keinen vom Einheitsideal verschiedenen echten Teiler besitzen. Ferner ist auch Bedingung a) eine Folge von e). Denn zunächst bildet, wie aus der Definition des primären Ideals leicht zu erkennen ist, die Gesamtheit aller Elemente aus R, von denen eine endliche Potenz durch das primäre Ideal $\mathfrak{r}$ teilbar ist, ein Ideal, und zwar ein Primideal $\mathfrak{p}$.[7] Da nun ersichtlich $\mathfrak{r} \equiv 0(\mathfrak{p})$ ist, so kann $\mathfrak{p}$ nicht zu $\mathfrak{r}$ teilerfremd sein. Es existiert daher nach e) ein Ideal $\bar{\mathfrak{p}} \not\equiv 0(\mathfrak{r})$, so daß $\mathfrak{p} \cdot \bar{\mathfrak{p}} \equiv 0(\mathfrak{r})$ ist. Daraus folgt, angesichts der Tatsache, daß $\mathfrak{r}$ primär ist, die Existenz einer natürlichen Zahl $\varrho_{\mathfrak{r}}$, so daß $\mathfrak{p}^{\varrho_{\mathfrak{r}}} \equiv 0(\mathfrak{r})$ wird.

Umgekehrt folgt aus den Bedingungen a), b), d) die Bedingung e). Ist nämlich $\mathfrak{a} = \mathfrak{r}_1 \cdot \mathfrak{r}_2 \cdot \ldots \cdot \mathfrak{r}_n$, $\mathfrak{a}' = \mathfrak{r}_1' \cdot \mathfrak{r}_2' \cdot \ldots \cdot \mathfrak{r}_n'$, wobei die $\mathfrak{r}_i$ und ebenso die $\mathfrak{r}_i'$ zu verschiedenen Primidealen gehörige und daher teilerfremde Primärideale bedeuten, so ist entweder jedes $\mathfrak{r}_i$ zu allen $\mathfrak{r}_i'$ teilerfremd. Dann sind $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{a}'$ sicher teilerfremd. Andernfalls mögen etwa $\mathfrak{r}_1$ und $\mathfrak{r}_1'$ nicht teilerfremd sein, also zum selben Primideal $\mathfrak{p}_1$ gehören. Dann existiert, wie aus Bedingung a) leicht geschlossen werden kann, eine natürliche

[7]) Vgl. N., § 4, Satz V.

Zahl σ, so daß $\mathfrak{r}_1^{\sigma} \equiv 0(\mathfrak{r}_1')$ wird. Es sei insbesondere $\sigma \geqq 1$ so gewählt, daß $\mathfrak{r}_1^{\sigma-1} \not\equiv 0(\mathfrak{r}_1')$ ist. Setzt man dann $\mathfrak{b} = \mathfrak{r}_1^{\sigma-1} \cdot \mathfrak{r}_2' \cdot \ldots \cdot \mathfrak{r}_n'$, so ist $\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b} \equiv 0(\mathfrak{a}')$; $\mathfrak{b} \not\equiv 0(\mathfrak{a}')$. Wäre nämlich $\mathfrak{b} \equiv 0(\mathfrak{a}')$, so müßte wegen der Teilerfremdheit von $\mathfrak{r}_2' \cdot \mathfrak{r}_3' \cdot \ldots \cdot \mathfrak{r}_n'$ und $\mathfrak{r}_1'$ die Gleichung $\mathfrak{r}_1^{\sigma-1} \equiv 0(\mathfrak{r}_1')$ entgegen unserer Annahme gelten. Wir haben mithin gezeigt, daß aus den Bedingungen a), b) und d) sich ergibt, daß $\mathfrak{a}$ zu $\mathfrak{a}'$ entweder teilerfremd oder *nicht* relativ prim sein muß, d. h. daß Axiom e) eine notwendige Folge von a), b) und d) ist. Satz 4 dient als wichtige Stütze beim Beweis von

Satz 5. *Eine hinreichende Bedingung dafür, daß R dem in § 1 charakterisierten Typus angehört, ist die, daß R dem Axiom* c) (*Basisforderung*) *und außerdem folgender Bedingung genügt*:

f) *Zu jedem Ideale $\mathfrak{a}$ aus R existiert ein endlicher Exponent $\varrho_{\mathfrak{a}}$, so daß $\mathfrak{a}^{\varrho_{\mathfrak{a}}} = \mathfrak{a}^{\varrho_{\mathfrak{a}}+1}$ wird.*

Zunächst sei nochmals darauf hingewiesen, daß R infolge von c) auch den Axiomen a) und b) genügen muß. Wir zeigen nun zum Beweise unserer Behauptung, daß R auch die Bedingung e) befriedigt. Nehmen wir an, es sei bewiesen, daß in einem Ringe mit Einheitselement, der den Bedingungen c) und f) genügt, jedes Ideal $\mathfrak{a}$ entweder zum Nullideal teilerfremd, oder *nicht* relativ prim ist, d. h. daß zu jedem vom Einheitsideal verschiedenen Ideal $\mathfrak{a}$ aus R ein Ideal $\bar{\mathfrak{a}} \neq (0)$ existiert, so daß $\mathfrak{a} \cdot \bar{\mathfrak{a}} = (0)$ wird! Dann ist damit auch gezeigt, daß Bedingung e) eine notwendige Folge der Bedingungen c) und f) ist. Es seien nämlich $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ zwei beliebige Ideale. Dann betrachten wir den Ring, der aus R durch Nullsetzen von $\mathfrak{b}$ hervorgeht. Dieser Ring besitzt ein Einheitselement und genügt offenbar den Bedingungen c) und f). Daher wird $\mathfrak{a}$ entweder modulo $\mathfrak{b}$ zum Einheitsideal, $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ sind dann teilerfremd, oder es existiert ein Ideal $\bar{\mathfrak{a}} \not\equiv 0(\mathfrak{b})$, so daß $\mathfrak{a} \cdot \bar{\mathfrak{a}} \equiv 0(\mathfrak{b})$ wird, $\mathfrak{a}$ ist also zu $\mathfrak{b}$ *nicht* relativ prim.

Es bleibt also nur noch zu zeigen, daß im Ringe R selbst jedes von (r_e) verschiedene Ideal $\mathfrak{a}$ zum Nullideal *nicht* relativ prim ist. Wir bemerken zunächst, daß $\mathfrak{a}$ zum Nullideal nicht relativ prim sein kann, falls das gleiche von einer endlichen Potenz $\mathfrak{a}^{\sigma}$ von $\mathfrak{a}$ gilt. Ist nämlich $\mathfrak{a}^{\sigma} \cdot \bar{\mathfrak{q}} = (0)$, so sei τ der kleinste Exponent, für den $\mathfrak{a}^{\tau} \cdot \bar{\mathfrak{q}} = (0)$ wird. Dann ist $\mathfrak{a}^{\tau-1} \cdot \bar{\mathfrak{q}}$ ein von (0) verschiedenes Ideal $\bar{\mathfrak{a}}$, das der Gleichung $\mathfrak{a} \cdot \bar{\mathfrak{a}} = (0)$ genügt. Wollen wir nun zeigen, daß das vom Einheitsideal verschiedene Ideal $\mathfrak{a}$ zum Nullideal nicht relativ prim ist, so begnügen wir uns, gestützt auf die eben gemachte Bemerkung, mit dem Nachweis, daß das gleiche von dem Ideal $\mathfrak{a}^{\varrho_{\mathfrak{a}}} = \mathfrak{b}$ gilt, das der Gleichung $\mathfrak{b}^2 = \mathfrak{b}$ genügt. Es sei $\mathfrak{b} = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$. Dann gilt infolge der Gleichung $\mathfrak{b}^2 = \mathfrak{b}$

ein Gleichungssystem $0 = \sum_{k=1}^{n} (b_{ik} - \delta_{ik}) b_k \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$, wobei $\delta_{ik} = \begin{cases} 0 & i \neq k \\ r_e & i = k \end{cases}$ das Kroneckersche Symbol bedeutet, und allgemein $b_{ik} \equiv 0(\mathfrak{b})$ ist. Setzt man $|b_{ik} - \delta_{ik}| = d$ $(i, k = 1, 2, \ldots, n)$, so stellt d die Summe des Elements r_e und einer Anzahl durch $\mathfrak{b}$ teilbarer Elemente dar, es ist also jedenfalls $d \not\equiv 0(\mathfrak{b})$, mithin $(d) \neq (0)$. Andererseits folgt aus elementaren Determinantensätzen, daß für jedes i die Gleichung $b_i \cdot d = 0$ erfüllt ist, daß also die Idealgleichung $\mathfrak{b} \cdot (d) = (0)$ gilt. Damit ist der Beweis von Satz 5 abgeschlossen.

Wir bemerken noch, daß jeder Ring vom in § 1 charakterisierten Typus dem Axiom f) genügt, sogar in der verschärften Fassung, daß ein fester Exponent ϱ existiert, so daß allgemein $\mathfrak{a}^{\varrho} = \mathfrak{a}^{\varrho+1}$ ist. Ist nämlich $\mathfrak{r} = \{\mathfrak{o}^{(1)} \ldots \mathfrak{o}^{(i-1)}, \mathfrak{a}^{(i)}, \mathfrak{o}^{(i+1)} \ldots \mathfrak{o}^{(n)}\}$ ein primäres Ideal, so ist $\mathfrak{r}^{\varrho_i} = \{\mathfrak{o}^{(1)} \ldots \mathfrak{o}^{(i-1)}, (0^{(i)}), \mathfrak{o}^{(i+1)} \ldots \mathfrak{o}^{(n)}\} = \mathfrak{r}^{\varrho_i+1}$. Setzt man daher ϱ gleich der größten der Zahlen ϱ_i, so ist für jedes $\mathfrak{a}$ immer $\mathfrak{a}^{\varrho} = \mathfrak{a}^{\varrho+1}$. Hingegen wird, wie leicht zu sehen, Bedingung c) nicht durch jeden Ring unseres Typs befriedigt.

Es soll jetzt nachgewiesen werden, daß die Axiome b) und e) unentbehrlich sind, d. h. daß keines von ihnen weggelassen werden kann. Zu diesem Zweck betrachten wir die folgenden beiden Ringe.

1. *Der Ring aller ganzen natürlichen Zahlen besitzt ein Einheitselement, er befriedigt die Axiome* a), b) (*und* c)), *genügt aber wegen der Ausnahmestellung der* 0 *nicht den Axiomen* d) *und* e).

Denn das Primideal (3) ist ein Teiler des Primideals (0) und zu diesem letzteren Primideal relativ prim, aber nicht teilerfremd. Ferner genügt der Ring der natürlichen Zahlen auch nicht Axiom f). Z. B. sind alle Potenzen von (3) verschieden.

2. *Wir betrachten einen Ring* $R^{(\infty)}$, *der sich im gewissen Sinne eindeutig als Summe von unendlich vielen Ringen* $R^{(i)}$ *darstellen läßt, wobei jeder* $R^{(i)}$ *ein Ring des speziellen Typs ist.*

$R^{(\infty)}$ enthält alle Elemente von der Form $a = \{a^{(1)}, a^{(2)}, \ldots\}$, wobei $a^{(i)}$ ein beliebiges Element aus $R^{(i)}$ bedeutet $(i = 1, 2, \ldots)$. $a^{(i)}$ heißt die i-te Komponente von a. Zwei Elemente sind gleich, wenn sie in sämtlichen Komponenten übereinstimmen, sie werden addiert, multipliziert, indem man die Komponenten addiert bzw. multipliziert. Einheitselement aus $R^{(\infty)}$ ist $\{r_e^{(1)}, r_e^{(2)}, \ldots\}$. Jedes Ideal aus $R^{(\infty)}$ besitzt die Gestalt $\{\mathfrak{a}^{(1)}, \mathfrak{a}^{(2)}, \ldots\}$, wobei $\mathfrak{a}^{(i)}$ ein beliebiges Ideal aus $R^{(i)}$ ist. Ein Primärideal ist dadurch charakterisiert, daß nur für ein einziges i das Ideal $\mathfrak{a}^{(i)}$ von $\mathfrak{o}^{(i)}$ verschieden ist. Ist in diesem Falle $\mathfrak{a}^{(i)} = \mathfrak{p}^{*(i)}$, so ist das Primärideal Primideal. Zwei

verschiedene Primideale sind teilerfremd, ein Primideal besitzt keinen echten Teiler. Ist $\mathfrak{r} = \{\mathfrak{o}^{(1)} \ldots \mathfrak{o}^{(i-1)}, \mathfrak{a}^{(i)}, \mathfrak{o}^{(i+1)} \ldots\}$ ein Primärideal, $\mathfrak{p} = \{\mathfrak{o}^{(1)} \ldots \mathfrak{o}^{(i-1)}, \mathfrak{p}^{*(i)}, \mathfrak{o}^{(i+1)} \ldots\}$ das zugehörige Primideal, so ist stets $\mathfrak{p}^{\varrho_i} \equiv 0(\mathfrak{r})$. $R^{(\omega)}$ genügt also den Axiomen a) und d). (Wählt man die Ringe $R^{(i)}$ so, daß für jedes i die Ungleichung $\varrho_i \leqq \varrho$ erfüllt ist, so genügt $R^{(\omega)}$ außerdem Axiom f), sogar in seiner verschärften Fassung.) $R^{(\omega)}$ befriedigt schließlich auch stets das Axiom e). Die beiden Ideale $\mathfrak{a} = \{\mathfrak{a}^{(1)}, \mathfrak{a}^{(2)}, \ldots\}$ und $\mathfrak{b} = \{\mathfrak{b}^{(1)}, \mathfrak{b}^{(2)}, \ldots\}$ sind nämlich dann und nur dann teilerfremd, wenn allgemein $\mathfrak{a}^{(i)}$ und $\mathfrak{b}^{(i)}$ teilerfremd sind. Sind daher $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ nicht teilerfremd, so ist für mindestens ein i das Ideal $\mathfrak{a}^{(i)}$ zu $\mathfrak{b}^{(i)}$ nicht teilerfremd; dann existiert $\mathfrak{d}^{(i)} \not\equiv 0(\mathfrak{b}^{(i)})$, so daß $\mathfrak{a}^{(i)} \cdot \mathfrak{d}^{(i)} \equiv 0(\mathfrak{b}^{(i)})$ wird. Dann ist aber $\mathfrak{d} = \{\mathfrak{b}^{(1)} \ldots \mathfrak{b}^{(i-1)}, \mathfrak{d}^{(i)}, \mathfrak{b}^{(i+1)} \ldots\} \not\equiv 0(\mathfrak{b})$, $\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{d} \equiv 0(\mathfrak{b})$.

Hingegen genügt $R^{(\omega)}$ nicht dem Axiom b), weil das Ideal $\mathfrak{a} = \{\mathfrak{a}^{(1)}, \mathfrak{a}^{(2)} \ldots,\}$ sich nur dann als kleinstes gemeinschaftliches Vielfaches von endlichen vielen Primäridealen darstellen läßt, wenn nur endlich viele $\mathfrak{a}^{(i)}$ von $\mathfrak{o}^{(i)}$ verschieden sind.

Mit Hilfe der Beispiele 1) und 2) (vgl. die dort in Klammern beigefügten Bemerkungen) erkennt man auch, daß die Axiome c) und f) von einander unabhängig sind. Ferner sieht man leicht, daß es auch Ringe des allgemeinen Typs gibt, die das Axiom c) nicht befriedigen. Betrachtet man nämlich alle Polynome in unendlich viel Variablen $x_1, x_2, \ldots$ mit rationalen Zahlkoeffizienten, und setzt alle Potenzprodukte der ϱ-ten Dimensionen gleich Null, so erhält man einen Ring, sogar vom speziellen Typ, für den aber c) nicht erfüllt ist, weil $\mathfrak{p}^* = (x_1, x_2, \ldots)$ keine endliche Basis hat.

Hingegen ist die Entscheidung noch zweifelhaft, ob das Axiom a) aus den Axiomen b) und d) ableitbar ist. Wir wollen daher in Zukunft den allgemeinen Typ durch die Axiome b) und e) festlegen. Das Axiomensystem a), b), d) wurde zunächst nur gewählt, weil bei ihm die charakteristischen Eigenschaften am deutlichsten hervortreten. Wir geben zum Schluß noch eine tabellarische Zusammenstellung der Hauptaxiomensysteme:

I. Allgemeiner Typ. *R besitzt ein Einheitselement und genügt folgenden Axiomen:*

b) *Jedes Ideal aus R läßt sich als kleinstes gemeinschaftliches Vielfaches von zu verschiedenen Primidealen gehörigen Primäridealen darstellen.*

e) *Ist* $\mathfrak{a}$ *zu* $\mathfrak{b}$ *relativ prim, so sind* $\mathfrak{a}$ *und* $\mathfrak{b}$ *teilerfremd.*

II. Unterfall des allgemeinen Typs. *R besitzt ein Einheitselement und es gilt:*

c) *Jedes Ideal aus R besitzt eine endliche Basis.*

f) *Zu jedem Ideal* $\mathfrak{a}$ *gibt es eine Zahl* $\varrho_{\mathfrak{a}}$, *so daß* $\mathfrak{a}^{\varrho_{\mathfrak{a}}} = \mathfrak{a}^{\varrho_{\mathfrak{a}}+1}$ *wird.*

III. Spezieller Typ. *R besitzt ein Einheitselement und befriedigt die Bedingung*:

g)[8]) *Es gibt eine Zahl* ϱ, *so daß für* $\mathfrak{a} \neq (r_e)$ *die Gleichung* $\mathfrak{a}^\varrho = (0)$ *gilt.*

§ 3.

Beispiele für Ringe vom allgemeinen und speziellen Typ.

Ein ziemlich allgemeines und einfaches Beispiel eines Ringes vom allgemeinen Typ erhält man folgendermaßen: *Man gehe aus vom Systeme aller Polynome von m Variablen* $x_1, x_2, \ldots, x_m$ *mit Koeffizienten aus einem beliebigen algebraisch abgeschlossenen Körper, und betrachte das Restklassensystem nach einem Polynomideal* $\mathfrak{a}$, *das die Eigenschaft besitzt, daß die Gesamtheit seiner Polynome nur für endlich viel „Punkte", d. h. für endlich viel Wertsysteme* $\{x_1 = \xi_i^{(1)}, x_2 = \xi_i^{(2)}, \ldots, x_m = \xi_i^{(m)}\}$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ *gleichzeitig verschwindet. Dieses Restklassensystem bildet einen Ring R vom allgemeinen Typus*[9]).

Das Ideal $\mathfrak{a}$ muß nämlich die Gestalt $\mathfrak{a} = \mathfrak{a}_1 \cdot \mathfrak{a}_2 \cdot \ldots \cdot \mathfrak{a}_n$ besitzen, wobei $\mathfrak{a}_i$ zu allen $\mathfrak{a}_k$ $(i \neq k)$ teilerfremd ist und die Gesamtheit aller Polynome von $\mathfrak{a}_i$ nur in einem einzigen Punkte, bei geeigneter Bezeichnung etwa für $\{x_1 = \xi_i^{(1)}, x_2 = \xi_i^{(2)}, \ldots, x_m = \xi_i^{(m)}\}$ verschwindet. Die Betrachtung des Ringes R läßt sich daher nach dem Hilfssatz des vorangehenden Paragraphen auf die Betrachtung von n Ringen $R^{(1)}, R^{(2)}, \ldots, R^{(n)}$ zurückführen, wobei $R^{(i)}$ durch das Restklassensystem aller Polynome von $x_1, x_2, \ldots, x_m$ nach dem Ideal $\mathfrak{a}_i$ dargestellt werden kann. Das Restklassensystem nach $\mathfrak{a}_i$ bildet aber einen Ring vom speziellen Typus. Nehmen wir nämlich an (was durch eine Variablentransformation stets erreichbar ist), daß $\mathfrak{a}_i$ insbesondere für das Wertesystem $\{x_1 = 0, x_2 = 0, \ldots, x_m = 0\}$ verschwindet, so muß $\mathfrak{a}_i$ alle Potenzprodukte der x_i von einer gewissen, etwa der ϱ_i-ten Dimension an enthalten[10]). Daraus folgt leicht, daß ein Polynom in $R^{(i)}$ dann und nur dann Nullteiler ist, wenn es kein von den x_i freies, von Null verschiedenes Glied enthält, und daß ferner in $R^{(i)}$ alle regulären Elemente Einheiten sind. Die Gesamtheit aller Nullteiler bildet daher ein Primideal $\mathfrak{p}^* = (x_1, x_2, \ldots, x_m)$, dieses Primideal teilt jedes vom Einheitsideal verschiedene Ideal, und da $\mathfrak{p}^{*\varrho_i} = (0)$ ist, so verschwindet allgemein die ϱ_i-te Potenz jedes vom Einheitsideal verschiedenen Ideals.

---

[8]) Bedingung g) ist mit Bedingung 5 von Teil I identisch.

[9]) Zur Theorie der Polynomideale vgl. z. B. Lasker, Math. Annalen 60 (1905), S. 20—116.

[10]) Hilbert: „Über die vollen Invariantensysteme", Math. Annalen 42 (1893), S. 320.

$R^{(4)}$ ist also ein Ring vom speziellen Typus, und R gehört infolgedessen dem allgemeinen Typ an.

Wählt man als Grundkörper, dem die Koeffizienten der Polynome entnommen werden, *insbesondere den Körper aller komplexen Zahlen*, so kommt man zu den gewöhnlichen „endlichen Systemen hyperkomplexer Größen mit kommutativer Multiplikation". (Der Gedanke, diese Systeme durch Restklassensysteme nach Polynomidealen der oben gekennzeichneten Art zu repräsentieren, geht auf Kronecker zurück[11])). Diejenigen Systeme hyperkomplexer Größen, die einen Ring vom speziellen Typ darstellen, heißen in der üblichen Terminologie irreduzibel, die andern reduzibel.

Welches sind nun die Eigenschaften, durch die ein irreduzibles System hyperkomplexer Größen (oder das Restklassensystem nach einem in einem einzigen Punkte verschwindenden Polynomideal) vor einem beliebigen Ringe des speziellen Typs ausgezeichnet ist? Offenbar zweierlei:

1. *Die Tatsache, daß das betrachtete System ein „endliches" ist, daß also jedes seiner Ideale eine endliche Modulbasis besitzt, gestattet, für die irreduziblen Systeme hyperkomplexer Größen die „Hilbertschen Zahlen" zu definieren*[12]).

2. *Man kann das System der hyperkomplexen Größen aus einem Körper durch Adjunktion von Nullteilern erzeugen, eine Tatsache, die für beliebige Ringe vom speziellen Typ nicht unmittelbar evident, ja überhaupt falsch ist.*

In den nächsten Paragraphen soll nun gezeigt werden, inwieweit sich die unter 1. und 2. gekennzeichneten Eigenschaften auf beliebige spezielle Ringe übertragen lassen. Dabei wird sich zeigen, daß es in jedem Fall möglichst ist, das Analogon zu den Hilbertschen Zahlen zu finden. Hingegen werden wir nur für *vollkommene* Ringe den Nachweis führen können, daß diese Bereiche aus einem „Grundring", der mit dem Körper seinem Typ nach aufs engste verwandt ist, durch Adjunktion von Nullteilern erzeugt werden können.

Zum Schluß dieses Paragraphen möge noch auf einen Bereich hingewiesen werden, auf den sich die in Teil I entwickelte Theorie mit unwesentlichen Änderungen anwenden läßt, obwohl er nicht Axiom g) von § 2 genügt.

Es handelt sich um einen Ring mit Einheitselement, der die Eigenschaft besitzt, daß er nur Nullteiler und Einheiten enthält, und daß außerdem eine endliche Potenz jedes Nullteilers verschwindet. Ein solcher

---

[11]) Kronecker: Sitzb. der Berl. Akad. 1888, S. 429—438; 447—465; 557—578.

[12]) Vgl. etwa Schmeidler: „Zur Theorie der primären Punktmoduln", Math. Annalen 79, § 1.

Ring R braucht nicht notwendig ein Ring vom speziellen Typ zu sein. Es bildet zwar auch in R die Gesamtheit aller Nullteiler ein Ideal, weil aus $a_1^{\varrho_1} = a_2^{\varrho_2} = 0$ stets $(a_1 + a_2)^{\varrho_1+\varrho_2} = 0$ folgt, und für jedes Nullteilerideal mit *endlicher Basis* wird stets eine endliche Potenz dem Nullideal gleich. Für Ideale mit unendlicher Basis braucht jedoch diese letztere Bedingung nicht erfüllt zu sein. *Man nehme z. B. den Ring R, den die Gesamtheit aller Polynome von unendlich viel Variablen $x_1, x_2, \ldots$ mit rationalen Zahlkoeffizienten modulo des Ideals $(x_1^2, x_2^3, \ldots, x_n^{n+1}, \ldots)$ bildet.* In diesem Ring ist jedes Polynom, das ein von Null verschiedenes, von den Variablen freies Glied enthält, eine Einheit, die andern Polynome sind sämtlich Nullteiler. Man kann aber immer solche Nullteiler angeben, für die eine beliebig hohe, aber festgegebene Potenz von Null verschieden ist, und aus diesem Grunde kann keine endliche Potenz des Ideals $\mathfrak{p}^* = (x_1, x_2, \ldots)$ verschwinden.

Gleichwohl kann man nach den in Teil I entwickelten Methoden den zu R gehörigen Polynomring R_f behandeln, und daraus die Theorie der transzendenten und algebraischen Erweiterungen von R herleiten, ohne irgendwie auf wesentliche Schwierigkeiten zu stoßen. Der Grund für diese Tatsache liegt darin, daß die Ideale, mit denen wir es bei unsern Rechnungen zu tun haben, stets ihrer speziellen Natur nach eine endliche Basis besitzen (z. B. das Ideal, das aus den Koeffizienten eines Polynoms, oder eines nicht-linearen Gleichungssystems besteht.) Um ein Beispiel von den kleinen Modifikationen zu geben, die bei Behandlung des Ringes R entstehen, möge Satz 1 von Teil I auf unsern Ring übertragen werden. Er lautet hier:

Sind $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ zwei beliebige Ideale aus R, ist $\mathfrak{a} : \mathfrak{b} \neq (r_\epsilon)$, ist ferner $\mathfrak{b}$ ein Nullteilerideal mit *endlicher Basis*, so ist $\mathfrak{a} : (\mathfrak{b} \cdot \mathfrak{b})$ ein echter Teiler von $\mathfrak{a} : \mathfrak{b}$.

Unter unseren Voraussetzungen existiert nämlich eine natürliche Zahl ϱ, so daß $\mathfrak{b}^\varrho = (0)$ und also durch jedes Ideal teilbar ist. Daher gibt es eine natürliche Zahl $0 < \lambda \leqq \varrho$, so daß $\mathfrak{b}^\lambda \equiv 0 (\mathfrak{a} : \mathfrak{b})$; $\mathfrak{b}^{\lambda-1} \not\equiv 0 (\mathfrak{a} : \mathfrak{b})$ ist. Dann aber ist $\mathfrak{b}^{\lambda-1} \equiv 0 (\mathfrak{a} : (\mathfrak{b} \cdot \mathfrak{b}))$.

Man könnte auch versuchen, einen allgemeinen Ring, der sich auf endlich viel Ringe der oben gekennzeichneten Art zurückführen läßt, axiomatisch zu charakterisieren. Doch lohnt das wohl die Mühe nicht.

§ 4.

Die endlichen Ringe mit Einheitselement[12a]).

Wir beginnen mit den in § 3 angekündigten Untersuchungen und betrachten zunächst die endlichen (d. h. nur endlichviel Elemente enthaltenden Ringe mit Einheitselement. Diese Bereiche befriedigen ersichtlich die Endlichkeitsaxiome c) und f) und es gilt:

Satz 6. *Die endlichen Ringe mit Einheitselement sind Ringe des allgemeinen Typs und lassen sich daher als eindeutige Summe von endlich vielen endlichen Ringen des speziellen Typs darstellen.*

Da, wie in § 1 gezeigt, die Theorie der allgemeinen Ringe sich vollkommen auf die der speziellen zurückführen läßt, so untersuchen wir sofort die speziellen endlichen Ringe. Es sei R ein solcher Bereich, r_ε sein Einheitselement. Die Vielfachen von r_ε können wegen der Endlichkeit von R nicht alle verschieden sein. Es sei $\sigma + 1$ die kleinste natürliche Zahl, für die $(\sigma + 1) \times r_\varepsilon$ [13]) $= r_\varepsilon$ wird. Dann ist σ die kleinste natürliche Zahl, für die $\sigma \times r_\varepsilon = 0$ wird. σ muß Primzahlpotenz sein. Wäre nämlich $\sigma = \sigma_1 \cdot \sigma_2$; $(\sigma_1, \sigma_2) = 1$, so wären $\sigma_1 \times r_\varepsilon \neq 0$ und $\sigma_2 \times r_\varepsilon \neq 0$ zwei teilerfremde Nullteiler. Wir können also $\sigma = \pi^{\varrho_0}$ setzen, wobei π eine Primzahl bedeutet. Versteht man unter ϱ wie üblich den charakteristischen Exponenten von R, so ist wegen $(\pi \times r_\varepsilon)^{\varrho_0 - 1} = \pi^{\varrho_0 - 1} \times r_\varepsilon$ sicher $0 < \varrho_0 \leqq \varrho$.

Satz 7. *Die Gesamtheit der Vielfachen des Einheitselements des speziellen endlichen Ringes R bildet einen Ring $R^{(0)}$, der dem Restklassensystem nach π^{ϱ_0} isomorph ist, wobei π eine Primzahl bedeutet, und ϱ_0 höchstens gleich dem charakteristischen Exponenten ϱ von R ist. $R^{(0)}$ heißt der zu R gehörige Primring*[14]). *$R^{(0)}$ ist eindeutig definiert als der kleinste Teilring von R, der einen speziellen Ring darstellt. ϱ_0 ist der charakteristische Exponent von $R^{(0)}$, $\mathfrak{p}^{*(0)} = (\pi \times r_\varepsilon)$ sein Primideal.*

Der erste Teil der Behauptung ist klar, der zweite ergibt sich daraus, daß, wie in § 1 gezeigt, r_ε das einzige von 0 verschiedene Element aus R

[12a]) Die Typisierung der endlichen Ringe im Sinne von Satz 10 des vorliegenden Paragraphen wurde bereits von Kircher in einer Abhandlung im „American Journal" (1916), die dem Verfasser übrigens nicht vorlag, gegeben. Gleichwohl behandeln wir hier die endlichen Ringe ausführlich, weil sie uns als geeignetes Musterbeispiel für die allgemeineren Entwicklungen der folgenden Paragraphen dienen.

[13]) Das an dieser Stelle benutzte Multiplikationszeichen wurde deshalb verwandt, weil wir es hier nur mit einer iterierten Addition, nicht mit der Multiplikation von Ringelementen zu tun haben.

[14]) Diese Bezeichnung ist im Anschluß an die Körpertheorie und an A. Fränkel: „Über gewisse Teilbereiche und Erweiterungen von Ringen" (Habilitationsschrift, Leipzig, Teubner 1916), 1. Kapitel gewählt.

ist, das der Gleichung $x^2 - x = 0$ genügt[15]). Es handelt sich nun um die Konstruktion eines ausgezeichneten zu R gehörigen Ringes, der als „Grundring" bezeichnet werden soll.

Zu diesem Zweck betrachten wir den dem Ringe R zugeordneten Körper K (vgl. Teil I, § 7). K ist ein endlicher Körper und als solcher vollkommen[16]). Ferner kann K aus dem aus allen Vielfachen von $\bar{r}_e$ bestehenden Primkörper $K^{(0)}$, der dem Restklassensystem modulo π isomorph ist, durch Adjunktion eines einzigen, hinsichtlich $K^{(0)}$ algebraischen Elementes α erzeugt werden[17]). Es bedeute $\bar{g}(x)$ die irreduzible Funktion aus $K_f^{(0)}$, deren Nullstelle $\bar{\alpha}$ ist, α' ein beliebiges Element aus der durch $\bar{\alpha}$ bestimmten Klasse, schließlich $g(x)$ eine Primfunktion aus $R_f^{(0)}$, die der durch $\bar{g}(x)$ bestimmten Klasse angehört. (Eine solche Primfunktion gibt es stets, da dem Ringe $R^{(0)}$ der Körper $K^{(0)}$ zugeordnet ist.) Alsdann ist α' Nullstelle einer Primfunktion $g'(x)$ aus R_f, die mit $g(x)$ modulo $\mathfrak{p}_f^*$ kongruent ist. Da nun K ein vollkommener Körper ist, so hat man $\bar{g}(x) = (x - \bar{\alpha}) \cdot \bar{g}_1(x)$, wobei $\bar{g}_1(x)$ und $x - \bar{\alpha}$ teilerfremd sind, und es ist mithin entsprechend: $g'(x) = (x - \alpha') \cdot g_1'(x)$; $(g_1'(x), x - \alpha') = (r_e)$. Daraus folgt aber nach Fundamentalsatz 2 von Teil I § 5 eine Gleichung $g(x) = (x - \alpha) \cdot g_1(x)$, wobei α und α' modulo $\mathfrak{p}^*$ kongruent sind, also der durch $\bar{\alpha}$ bestimmten Klasse angehören.

Das Element α ist hinsichtlich $R^{(0)}$ regulär algebraisch. Zur Begründung dieser Behauptung haben wir nur noch nachzuweisen, daß α nicht Nullstelle einer von Null verschiedenen Funktion aus $R_f^{(0)}$ ist, deren Ordnung kleiner ist als der Grad von $g(x)$. Ist nun $a(x)$ eine reguläre Funktion aus $R_f^{(0)}$ von niedrigerem Grade als $g(x)$, so sind $g(x)$ und $a(x)$ teilerfremd, α kann also unmöglich Nullstelle von $a(x)$ sein. Sind sämtliche Koeffizienten von $a(x)$ Nullteiler, so besitzen sie die Gestalt $a_i \cdot (\pi \times r_e)^{\lambda_i}$. Ist nun λ die kleinste unter den Zahlen λ_i, so ist $a(x) = (\pi \times r_e)^{\lambda} \cdot a'(x)$, wobei $a'(x)$ regulär und also zu $g(x)$ teilerfremd ist. Ist daher $a(\alpha) = 0$, so muß auch $(\pi \times r_e)^{\lambda} = 0$, also $a(x) = 0$ sein. α ist daher wirklich hinsichtlich $R^{(0)}$ regulär algebraisch.

Durch Adjunktion von α entsteht aus $R^{(0)}$ ein Ring $R^{(1)}$, der als der zu R gehörige Grundring bezeichnet werden soll. Da K aus $K^{(0)}$ durch Adjunktion von $\bar{\alpha}$ entsteht, so ist dem Ringe $R^{(1)}$ der Körper K zugeordnet. $R^{(1)}$ enthält also aus jeder Klasse modulo $\mathfrak{p}^*$ kongruenter Elemente von R mindestens eines, und es kann mithin R aus $R^{(1)}$ durch

---

[15]) Man beachte, daß wir den nur aus dem Nullelement bestehenden Ring bereits im ersten Teil für immer ausgeschlossen haben.

[16]) Vgl. St. § 12, S. 225, Satz 2.

[17]) Vgl. St. § 15, S. 248, Satz 7.

ausschließliche Adjunktion von Nullteilern erzeugt werden. Ehe wir näher darauf eingehen, wollen wir uns noch eingehender mit dem Grundring beschäftigen. Wir definieren zunächst allgemein:

Ein endlicher Grundring ist ein spezieller endlicher Ring, der aus seinem Primring durch regulär algebraische Erweiterung hervorgeht.

Aus dieser Definition ergeben sich sofort einige wesentliche Eigenschaften des Grundringes. Zunächst ist $\pi \times r_\varepsilon = p$ eine Basis des aus allen Nullteilern des Grundringes $R^{(1)}$ bestehenden Primideals $\mathfrak{p}^{*(1)}$, und ϱ_0 ist der charakteristische Exponent von $\mathfrak{p}^{*(1)}$, wenn der zugehörige Primring π^{ϱ_0} Elemente enthält. Ferner gilt

Satz 8. *Zwei endliche Grundringe sind isomorph, wenn sie in dem charakteristischen Exponenten und in der Elementezahl übereinstimmen.*

Zunächst sind nämlich zwei endliche Grundringe $R^{(1)}$ und $R^{(1)'}$ isomorph, wenn sie denselben charakteristischen Exponenten besitzen, und wenn außerdem ihre zugeordneten Körper isomorph sind. Denn dann sind jedenfalls die zugehörigen Primringe $R^{(0)}$ und $R^{(0)'}$ isomorph. Aus der Isomorphie von $R^{(0)}$ und $R^{(0)'}$ sowie der von K und K' folgt aber weiter die Isomorphie von $R^{(1)}$ und $R^{(1)'}$, weil nach dem „Fundamentaltheorem über die Erweiterung vollkommener Ringe" (Teil I, § 10) zwei regulär algebraische Erweiterungen desselben vollkommenen Ringes hinsichtlich des Ausgangsbereichs äquivalent sind, wenn das gleiche von den zugeordneten Körpern gilt.

Es bleibt also zum Beweise von Satz 8 nur noch zu zeigen, daß K und K' notwendig isomorph sein müssen, wenn $R^{(1)}$ und $R^{(1)'}$ denselben charakteristischen Exponenten und dieselbe Elementezahl besitzen. Das ergibt sich folgendermaßen: Besitzt $R^{(1)}$ den charakteristischen Exponenten ϱ_0 und enthält K im ganzen π^r Elemente, so enthält $R^{(1)}$ genau $\pi^{\varrho_0 \cdot r}$ Elemente[18]. Man kann daher aus dem charakteristischen Exponenten und der Elementezahl von $R^{(1)}$ eindeutig die Elementezahl des zugeordneten Körpers K berechnen. In unserem Falle müssen also die Körper K und K' gleich viel Elemente besitzen, sind also nach einem bekannten Satze isomorph[19].

Satz 8 zeigt deutlich den engen Zusammenhang zwischen endlichem Körper und Grundring. Während der endliche Körper nur eine einzige Invariante, nämlich die Elementezahl besitzt, besitzt der endliche Grundring deren zwei, nämlich den charakteristischen Exponenten und die Ele-

[18]) Das ergibt sich daraus, daß $R^{(1)}$ hinsichtlich seines Primringes eine reguläre Modulbasis von genau r Elementen besitzt. (Vgl. zum Begriff der regulären Modulbasis Teil I, § 10.)

[19]) Vgl. St. § 15, S. 246, Satz 1.

mentezahl, und diese Invarianten werden ebenfalls durch natürliche Zahlen dargestellt.

Der endliche Körper kann aus einem passend gewählten algebraischen Zahlkörper dadurch erzeugt werden, daß man die Restklassen nach einer natürlichen Primzahl, die in jenem Körper Primideal bleibt, betrachtet. Auf entsprechende Weise entsteht der endliche Grundring durch Nullsetzen einer Primzahlpotenz.

Satz 9. *Zu jedem speziellen endlichen Ringe R mit zugeordnetem Körper K gehört ein eindeutig bestimmter Grundring $R^{(1)}$, dem ebenfalls der Körper K zugeordnet ist.*

Die Existenz eines Grundringes von der in Satz 9 gekennzeichneten Art wurde bereits oben nachgewiesen. Es handelt sich nur noch um den Eindeutigkeitsbeweis. Bezeichnet wie oben $\bar{\alpha}$ ein Element, durch dessen Adjunktion K aus $K^{(0)}$ entsteht, und bedeutet $\bar{g}(x)$ eine irreduzible Funktion aus $K_f^{(0)}$, deren Nullstelle $\bar{\alpha}$ ist, $g(x)$ irgendeine Primfunktion aus dem Funktionenring $R_f^{(0)}$ und aus der Klasse $\bar{g}(x)$, so muß $R^{(1)}$ eine Nullstelle α von $g(x)$ aus der Klasse $\bar{\alpha}$ enthalten. Diese Nullstelle ist eindeutig bestimmt, da ja $g(x)$ in R_f ein Produkt von lauter teilerfremden Primfunktionen darstellt. Da ferner dem Ringe $R^{(0)}(\alpha)$ der Körper K zugeordnet ist, so ist $R^{(0)}(\alpha) = R^{(1)}$ eindeutig als zu R gehöriger Grundring bestimmt [20]).

Wir wollen jetzt den Ring R aus seinem Grundring $R^{(1)}$ erzeugen. Wie oben bemerkt, kann das durch ausschließliche Adjunktion von Nullteilern geschehen. Es sei also $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ein System von Nullteilern derart, daß $R = R^{(1)}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ wird. Dann besteht R aus der Gesamtheit aller Polynome in $x_1, x_2, \ldots, x_n$ mit Koeffizienten aus R. Die Nullteiler aus R sind diejenigen Polynome, die durch das Ideal $\mathfrak{p}^* = (x_1, x_2, \ldots, x_n, \pi \times r_\varepsilon = p)$ teilbar sind, ein Polynom ist Einheit, wenn sein von den Variablen freies Glied eine Einheit aus $R^{(1)}$ ist. Die Gesamtheit aller Polynome, die infolge der zwischen den x_i und p bestehenden Relationen verschwinden, bildet ersichtlich ein Ideal, und dieses Ideal muß wegen $\mathfrak{p}^{*\varrho} = (0)$ jedenfalls alle Potenzprodukte der x_i von einer gewissen Dimension an enthalten. Ist umgekehrt $\mathfrak{a}$ ein vom Ideal (r_ε) verschiedenes Polynomideal in $x_1, x_2, \ldots, x_n$, das sämtliche Potenzprodukte dieser Variablen von einer gewissen Dimension an enthält, so enthält $\mathfrak{a}$ wegen $p^{\varrho_0} = 0$ auch alle Potenzprodukte in $x_1, x_2, \ldots, x_n, p$ von einer gewissen Dimension an. Es gibt daher einen endlichen Exponenten ϱ, so

[20]) Daß R keinen Grundring enthalten kann, der eine echte Erweiterung von $R^{(0)}(\alpha)$ darstellt, ist trivial und folgt z. B. sofort aus dem, was wir oben über die Elementezahl eines Grundringes bemerkten.

daß die ϱ-te Potenz jedes Polynoms in $x_1, x_2, \ldots, x_n$, dessen von den Variablen freies Glied durch p teilbar ist, verschwindet. Daraus folgt, daß das Restklassensystem nach $\mathfrak{a}$ einen endlichen speziellen Ring darstellt, in dem $\mathfrak{p}^* = (x_1, x_2, \ldots, x_n, p)$ ist, während alle Polynome mit regulärem, von den Variablen freiem Glied Einheiten sind.

Satz 10. *Man erhält den allgemeinsten endlichen Ring vom speziellen Typ, dessen Grundring $R^{(1)}$ ist, indem man alle Polynome in endlich viel Variablen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ mit Koeffizienten aus $R^{(1)}$ bildet und ein Polynomideal $\mathfrak{a}$ gleich Null setzt, das vom Einheitsideal verschieden ist und sämtliche Potenzprodukte der Variablen von einer gewissen Dimension an enthält.*

Für die Isomorphie zweier spezieller endlicher Ringe ist offenbar die Isomorphie der Grundringe eine notwendige, aber im allgemeinen nicht hinreichende Bedingung. Wir gelangen zu weiteren derartigen Bedingungen, wenn wir den Begriff der *Hilbertschen Zahlen* für unsere Ringe einführen. Wir hatten oben den Ring R aus seinem Grundring $R^{(1)}$ durch Adjunktion einer Anzahl von Variablen erzeugt. Es soll jetzt die Minimalzahl der Variablen bestimmt werden, die zu diesem Prozesse nötig ist. Dazu verfahren wir folgendermaßen.

Es seien $x'_1, x'_2, \ldots, x'_{n'}$ irgendwelche Nullteiler derart, daß $R^{(1)}(x'_1, x'_2, \ldots, x'_{n'})$ ist. Es soll nun ein Teil der Variablen x'_i nach folgendem Gesichtspunkt ausgewählt werden. Es wird x'_i weggelassen, falls es durch $\mathfrak{p}^{*2}$ teilbar ist oder modulo $\mathfrak{p}^{*2}$ linear durch $x'_1, x'_2, \ldots, x'_{i-1}$, $\pi \times r_\varepsilon = p$ ausgedrückt werden kann, im anderen Fall wird es beibehalten. Sind $x'_{i_1} = x_1$, $x'_{i_2} = x_2$, $\ldots$, $x'_{i_n} = x_n$ die Variablen, die bei dieser Aussiebung übrig bleiben, so ist $R = R^{(1)}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ und es bildet $x_1, x_2, \ldots, x_n, p$ bzw., wenn $p \equiv 0(\mathfrak{p}^{*2})$ ist, $x_1, x_2, \ldots, x_n$ eine Basis von $\mathfrak{p}^*$.

Da $R^{(1)}$ aus jeder Klasse modulo $\mathfrak{p}^*$ kongruenter Elemente mindestens eines enthält, so wird der erste Teil der Behauptung bewiesen sein, wenn wir zeigen können, daß $R^{(1)}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ alle Nullteiler enthalten muß. Nun läßt sich jeder Nullteiler aus R als Summe von Potenzprodukten mindestens erster Dimension in $x'_1, x'_2, \ldots, x'_{n'}, p$ mit regulären Elementen aus $R^{(1)}$ als Koeffizienten darstellen. Daraus folgt allgemein, daß jeder durch $\mathfrak{p}^{*\sigma}$ teilbare Nullteiler sich als Summe von Potenzprodukten mindestens σ-ter Dimension in $x'_1, x'_2, \ldots, x'_{n'}, p$ mit regulären Elementen aus $R^{(1)}$ als Koeffizienten darstellen läßt. Ferner hat man infolge der speziellen Auswahl von $x_1, x_2, \ldots, x_n$

$$(1) \quad x'_i = f_i(x_1, x_2, \ldots, x_n, p) + f_{1i}(x'_1, x'_2, \ldots, x'_{n'}, p) \quad (i = 1, 2, \ldots, n'),$$

wobei f_{1i} nur Glieder mindestens zweiter Ordnung in $x_1', x_2', \ldots, x_{n'}', p$ enthält.

Es sei nun $q = f(x_1', x_2', \ldots, x_{n'}', p)$ ein beliebiger Nullteiler, und zwar möge $f(x)$ nur Glieder mindestens σ-ter Dimension in $x_1', x_2', \ldots, x_{n'}', p$ enthalten $(\sigma \geqq 1)$. Führt man dann in $f(x')$ für jede Variable x_i' die Substitution (1) aus, so kommt man zu einer Gleichung

$$q = f'(x_1, x_2, \ldots, x_n, p) + h_1(x_1', x_2', \ldots, x_{n'}', p),$$

wobei h_1 nur Glieder mindestens $\sigma + 1$-ter Ordnung in $x_1', x_2', \ldots, x_{n'}', p$ enthält und f' in $R^{(1)}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ vorkommt. Der Ring $R^{(1)}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ besitzt also ein Element, das zu q modulo $\mathfrak{p}^{*\sigma+1}$ kongruent ist. Ebenso ergibt sich, daß in $R^{(1)}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ ein Element $h_1'(x_1, x_2, \ldots, x_n, p)$ auftreten muß, das den Kongruenzen $h_1'(x) \equiv h_1(x')\,(\mathfrak{p}^{*\sigma+2})$ und demgemäß $f'(x) + h_1'(x) \equiv f(x') + h_1(x')\,(\mathfrak{p}^{*\sigma+2})$ genügt. Durch Fortsetzen des Verfahrens erkennt man, daß in R ein zu q modulo $\mathfrak{p}^{*\varrho} = (0)$ kongruentes, d. h. das Element q selbst vorkommen muß. Hiermit ist der erste Teil der Behauptung erwiesen.

Da evidenterweise $x_1, x_2, \ldots, x_n, p$ eine Basis von $\mathfrak{p}^*$ darstellt, so hat man zum Beweis des zweiten Teiles nur noch zu zeigen, daß auch $\mathfrak{p}^* = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ ist, falls p der Kongruenz $p \equiv O(\mathfrak{p}^{*2})$ genügt. Das ergibt sich ganz nach dem vorhin benutzten Schema. Ist p durch $\mathfrak{p}^{*2}$ teilbar, so hat man

$$p = f(x_1, x_2, \ldots, x_n, p), \tag{2}$$

wobei f nur Glieder mindestens zweiter Dimension in $x_1, x_2, \ldots, x_n, p$ enthält. Führt man die Substitution (2) in f selbst aus, so kommt man zu einer Gleichung $p = f'(x_1, x_2, \ldots, x_n) + f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n, p)$, wobei f' durch $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ teilbar ist und f_1 nur Glieder mindestens dritter Dimension in $x_1, x_2, \ldots, x_n, p$ enthält, also dem Ideal $\mathfrak{p}^{*3}$ angehört. Es gibt also in $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ ein zu p modulo $\mathfrak{p}^{*3}$ kongruentes Element, und durch Fortsetzung des Verfahrens folgt, daß p selbst in $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ enthalten sein muß.

Es sei jetzt $y_1, y_2, \ldots, y_m$ eine beliebige Basis von $\mathfrak{p}^*$, dann gelten Transformationsformeln:

$$\left\{\begin{aligned} & y_i = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} x_k + a_{i0} \cdot p \quad \text{bzw.} \quad y_i = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} x_k \qquad (i = 1, 2, \ldots, m); \\ & x_i = \sum_{k=1}^{m} b_{ik} y_k, \quad p = \sum_{k=1}^{m} b_{0k} y_k \quad \text{bzw.} \quad x_i = \sum_{k=1}^{m} b_{ik} y_k \quad (i = 1, 2, \ldots, n). \end{aligned}\right. \tag{3}$$

Dabei muß mindestens eine Determinante $n + 1$-ten bzw. n-ten Grades der Matrix $\| a_{ik} \|$ $(i = 1, 2, \ldots, m,\ k = 0, 1, \ldots, n$ bzw. $1, 2, \ldots, n)$ eine

Einheit sein. Ist nämlich eine Determinante n_1-ten Grades der Matrix $\|a_{ik}\|$ eine Einheit, während alle Determinanten n_1+1-ten Grades Nullteiler sind, so können wir die Bezeichnung so wählen, daß diese Determinante aus Elementen der n_1 ersten Zeilen von $\|a_{ik}\|$ besteht. Dann aber lassen sich $y_{n_1+1}, y_{n_1+2}, \ldots, y_m$ modulo $\mathfrak{p}^{*2}$ linear durch $y_1, y_2, \ldots, y_{n_1}$ ausdrücken, man kann daher auch $x_1, x_2, \ldots, x_n, p$ bzw. $x_1, x_2, \ldots, x_n$ linear durch $y_1, y_2, \ldots, y_{n_1}$ modulo $\mathfrak{p}^{*2}$ darstellen. Wäre nun n_1 kleiner als $n+1$ bzw. n, so wäre infolge der zuletzt gemachten Bemerkung eines der Elemente $p, x_1, x_2, \ldots, x_n$ bzw. $x_1, x_2, \ldots, x_n$ linear durch die vorangehenden modulo $\mathfrak{p}^{*2}$ ausdrückbar, was infolge der Auswahl von $x_1, x_2, \ldots, x_n$ unmöglich ist. Daraus ergibt sich die Richtigkeit unserer Behauptung. Aus ihr folgt unmittelbar, daß keine Basis von $\mathfrak{p}^*$ weniger als $n+1$ bzw. n Elemente umfassen kann, und daß man zu $R^{(1)}$ auf jeden Fall mindestens n Variable adjungieren muß, um zu R zu gelangen.

Ist ferner $m > n+1$ bzw. $m > n$, so muß mindestens ein y_i, etwa y_m, linear durch die übrigen modulo y^{*2} ausdrückbar sein, weil alsdann jede Determinante $n+2$-ten bzw. $n+1$-ten Grades der Matrix $\|a_{ik}\|$ gleich Null ist. Dann aber muß, wie nach dem oben benutzten Schema leicht zu zeigen ist, y_m auch absolut linear durch $y_1, y_2, \ldots, y_{m-1}$ ausdrückbar sein. Man hat also:

Ist $y_1, y_2, \ldots, y_m$ eine beliebige Basis von $\mathfrak{p}^*$, so ist entweder $m = n+1$ bzw. $m = n$ und dann sind alle y_i modulo $\mathfrak{p}^{*2}$ *linear unabhängig, oder es ist $m > n+1$ bzw. $m > n$, und dann ist ein y_i linear durch die übrigen ausdrückbar, kann mithin in der Basis weggelassen werden.*

Die Zahl $n+1$ bzw. n stellt die erste Hilbertsche Invariante von $\mathfrak{p}^*$ dar. Um jedem Nullteilerideal $\mathfrak{a}$ insgesamt $\varrho - 1$ Invarianten zuordnen zu können, stützen wir uns auf folgenden allgemeinen, in Spezialfällen hier und in Teil I häufig benutzten Satz.

Satz 11. *Ist $\mathfrak{a}$ ein beliebiges Ideal aus einem beliebigen speziellen Ringe R und bilden die durch $\mathfrak{a}$ teilbaren Elemente $a_1, a_2, \ldots, a_n$ eine Basis von $\mathfrak{a}$* modulo $\mathfrak{a}\cdot\mathfrak{p}^*$, *so ist* $\mathfrak{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$.

Ist nämlich a ein beliebiges Element aus $\mathfrak{a}$, so folgert man aus der Tatsache, daß modulo $\mathfrak{a}\cdot\mathfrak{p}^*$ die Kongruenz $a \equiv 0 \ ((a_1, a_2, \ldots, a_n))$ besteht, in üblicher Weise, daß a auch modulo $\mathfrak{a}\cdot\mathfrak{p}^{*2}$, modulo $\mathfrak{a}\cdot\mathfrak{p}^{*3}$, schließlich modulo $\mathfrak{a}\cdot\mathfrak{p}^{*\varrho} = (0)$ durch $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ teilbar sein muß. Mit Hilfe von Satz 11 lassen sich die Resultate, die wir über die Minimalbasis von $\mathfrak{p}^*$ gewonnen haben, unmittelbar auf ein beliebiges Ideal übertragen.

Satz 12. *Ist $\mathfrak{a}$ ein beliebiges Nullteilerideal*[21]), *so kann man $\mathfrak{a}$ eine Zahl n_0 mit folgenden Eigenschaften zuordnen: Ist $a_1, a_2, \ldots, a_m$ eine be-*

[21]) Für das Einheitsideal lassen sich diese Sätze ebenfalls leicht formulieren.

liebige Basis von $\mathfrak{a}$, *so ist entweder* $m = n_0$, *und in diesem Falle sind* $a_1, a_2, \ldots, a_m$ modulo $\mathfrak{a}\cdot\mathfrak{p}^*$ *linear unabhängig, oder es ist* $m > n_0$ *und ein* a_i *läßt sich linear durch die übrigen ausdrücken. Die zwischen zwei Minimalbasen bestehenden Transformationsformeln besitzen eine reguläre Determinante.*

Es ist höchstens nötig, darauf hinzuweisen, wie man eine Minimalbasis von $\mathfrak{a}$ gewinnt. Man gehe von einer beliebigen Basis von $\mathfrak{a}$ aus, nehme deren Elemente in einer beliebigen Reihenfolge, und lasse alle die weg, die sich modulo $\mathfrak{a}\cdot\mathfrak{p}^*$ linear durch die vorangehenden ausdrücken lassen. Die übrigbleibenden Elemente bilden eine Minimalbasis.

Besitzt allgemein das Ideal $\mathfrak{a}\cdot\mathfrak{p}^{*i}$ $(i = 0, 1, \ldots, \varrho - 2)$ *eine Minimalbasis von* n_i *Elementen, so wollen wir* $n_0, n_1, \ldots, n_{\varrho-2}$ *als die Hilbertschen Zahlen des Ideals* $\mathfrak{a}$ *bezeichnen. Die Hilbertschen Zahlen von* $\mathfrak{p}^*$ *sollen auch „Hilbertsche Zahlen des Ringes* R" *genannt werden. Bilden* $a_{1i}, a_{2i}, \ldots, a_{n_i i}$ *eine Minimalbasis von* $\mathfrak{a}\cdot\mathfrak{p}^{*i}$ $(i = 0, 1, \ldots, \varrho - 2)$, *so bilden* a_{ki} $(k = 1, 2, \ldots, n_i;\ i = 0, 1, \ldots, \varrho - 2)$ *ersichtlich eine Basis von* $\mathfrak{a}$, *die die Eigenschaft besitzt, daß sich jedes Element von* $\mathfrak{a}$ *linear durch die* a_{ki} *mit regulären Koeffizienten darstellen läßt. Wir wollen eine solche Basis als „Modulbasis von* $\mathfrak{a}$"[22]) *bezeichnen.* Dann gilt folgender, mit unseren Mitteln leicht beweisbarer Satz:

Satz 13. *Ist* b_{ki} $(k = 1, 2, \ldots, m_i;\ i = 0, 1, \ldots, \varrho - 2)$ *eine Modulbasis von* $\mathfrak{a}$, *wobei sämtliche Elemente* b_{ki} $(k = 1, 2, \ldots, m_i)$ *durch das Ideal* $\mathfrak{a}\cdot\mathfrak{p}^{*i}$, *aber nicht durch das Ideal* $\mathfrak{a}\cdot\mathfrak{p}^{*i+1}$ *teilbar sind, so ist die erste nicht verschwindende der Differenzen* $m_i - n_i$ *positiv.*

Die Übereinstimmung der Hilbertschen Zahlen ist für zwei Ringe eine notwendige, aber, wie leicht zu sehen, keine hinreichende Isomorphiebedingung. Vielleicht könnte man hier durch eine allgemeinere Fassung des Isomorphiebegriffes weiter kommen.

§ 5.

Drei Hilfssätze aus der Körpertheorie.

Wir befassen uns im folgenden nur mit solchen Körpern und Ringen, deren Elemente eine wohlordenbare Menge bilden. Nimmt man das Auswahl-

---

[22]) Ist nämlich $R^{(1)}$ ein Körper, so stellt a_{ki} $(k = 1, 2, \ldots, n_i;\ i = 0, 1, \ldots, \varrho - 2)$ eine reguläre Modulbasis von $\mathfrak{a}$ dar, d. h. jedes Element aus $\mathfrak{a}$ läßt sich eindeutig in der Form $\sum_{i=0}^{\varrho-2}\sum_{k=1}^{n_i}\alpha_{ki}a_{ki}$ darstellen, wobei die α_{ki} Elemente aus $R^{(1)}$ sind, und es ist $\sum_{i,k}\alpha_{ki}a_{ki} + \sum_{i,k}\beta_{ki}a_{ki} = \sum_{i,k}(\alpha_{ki}+\beta_{ki})a_{ki}$ und $\gamma\cdot\sum_{i,k}\alpha_{ki}a_{ki} = \sum_{i,k}(\gamma\cdot\alpha_{ki})\cdot a_{ki}$, wenn γ ein beliebiges Element aus $R^{(1)}$ bedeutet.

axiom als gültig an, so ist diese Voraussetzung für beliebige Körper und Ringe erfüllt. Um die Existenz des Grundringes für einen beliebigen vollkommenen Ring nachzuweisen, brauchen wir einige Hilfssätze über die Art, wie man einen Körper aufbauen kann.

Hilfssatz 1. *Ist K ein beliebiger Körper, so läßt sich K stets als Vereinigungskörper einer wohlgeordneten unendlichen Menge von Körpern $K^{(0)}, K^{(1)}, \ldots, K^{(\tau)} \ldots$ auffassen, wobei folgende Voraussetzungen erfüllt sind: $K^{(0)}$ ist der aus den Vielfachen des Einheitselementes von K bestehende „Primkörper" oder irgendein anderer Teilkörper von K. Gibt es zu der transfiniten Ordnungszahl τ kein unmittelbar vorangehendes $\tau - 1$, so ist $K^{(\tau)}$ der Vereinigungskörper aller vorangehenden Körper. Existiert $\tau - 1$, so ist $K^{(\tau)}$ eine einfache algebraische oder transzendente Erweiterung von $K^{(\tau-1)}$. $K^{(\tau)}$ ist jedenfalls dann algebraische Erweiterung von $K^{(\tau-1)}$, wenn es in K Elemente gibt, die hinsichtlich $K^{(\tau-1)}$ algebraisch sind.*

Zum Beweis denken wir uns die Elemente von K in einer beliebigen Wohlordnung gegeben: $a_1, a_2, \ldots, a_\tau, \ldots$.[23]) Doch soll $a_1 = 0$, $a_2 = \varepsilon$ sein. Wir beweisen dann den Hilfssatz in folgender Form: Ist τ eine beliebige transfinite Ordnungszahl, so existiert ein Teilkörper $K^{(\tau)}$ von K, der sich in der vom Hilfssatz geforderten Weise aufbaut, und alle Elemente a_i ($i \leqq \tau$ bzw. $i < \tau$, falls $\tau - 1$ nicht existiert) enthält. Diese Behauptung ist sicher für $\tau = 1$ und $\tau = 2$ richtig. Denn in diesem Fall ist der Körper $K^{(0)}$ ein Körper der verlangten Art. Gibt es ferner zu τ kein $\tau - 1$, und stimmt die Behauptung für alle $i < \tau$, so stimmt sie offenbar auch für $i = \tau$. Wir haben also zur Vollendung des Beweises nur noch zu zeigen, daß man stets einen Körper $K^{(\tau)}$ konstruieren kann, falls ein Körper $K^{(\tau-1)}$ existiert. Ist a_τ in $K^{(\tau-1)}$ enthalten, oder hinsichtlich $K^{(\tau-1)}$ algebraisch, oder ist a_τ hinsichtlich $K^{(\tau-1)}$ transzendent, und gibt es in K überhaupt kein hinsichtlich $K^{(\tau-1)}$ algebraisches Element, so ist $K^{(\tau-1)}(a_\tau)$ der gewünschte Körper $K^{(\tau)}$. Andernfalls muß es in K ein Element a_{i_1} mit niederstem Index geben, das hinsichlich $K^{(\tau-1)}$ algebraisch ist, und es muß dabei $i_1 > \tau$ sein. Dann bilde man $K^{(\tau-1)}(a_{i_1})$; gibt es in K ein Element a_{i_2}, das hinsichtlich $K^{(\tau-1)}(a_{i_1})$ algebraisch ist, so muß jedenfalls $i_2 > i_1$ sein. Ist a_{i_2} das Element mit niederstem Index von der gewünschten Art, so bilde man $K^{(\tau-1)}(a_{i_1}, a_{i_2})$. Durch Fortsetzen des Verfahrens kommt man, wie die transfinite Induktion erkennen läßt, zu einem Körper $\overline{K}^{(\tau-1)}$, der eine algebraische Erweiterung von $K^{(\tau-1)}$ darstellt, sich in der im Hilfssatz geforderten Weise aufbaut, und außerdem die Eigenschaft besitzt, daß in K kein hinsichtlich $K^{(\tau-1)}$, also auch kein hinsichtlich $\overline{K}^{(\tau-1)}$ algebraisches

[23]) Existiert $\tau - 1$ nicht, so entspricht der Ordnungszahl τ kein Element a_τ.

Element[24]) mehr existiert. Der gesuchte Körper $K^{(r)}$ kann dann durch den Körper $\overline{K}^{(r-1)}(a_r)$ repräsentiert werden, unser Hilfssatz ist also richtig.

Wir betrachten nun den Fall näher, daß K ein vollkommener Körper der Charakteristik π ist (d. h. ein vollkommener Körper, dessen Primkörper dem Restklassensystem nach der natürlichen Primzahl π isomorph ist), und daß bei dem Aufbau von K nach dem Schema von Hilfssatz 1 unter den Körpern $K^{(r)}$ auch unvollkommene Körper vorkommen[25]). Um in diesem Falle den Körper in noch etwas speziellerer Weise als in Hilfssatz 1 aufzubauen, brauchen wir den Begriff des zu einem unvollkommenen Körper gehörigen Wurzelkörpers[26]).

Wie leicht zu beweisen, ist ein Körper der Charakteristik π dann und nur dann vollkommen, wenn er gleichzeitig mit dem Element a stets eine π-te Wurzel von a, d. h. eine Nullstelle der Gleichung $x^{\pi} - a = 0$ enthält.

Aus dieser Tatsache ergibt sich, daß zu einem unvollkommenen Körper K stets ein kleinster vollkommener Erweiterungskörper $\overline{K}$ existiert, der aus K durch sukzessive Adjunktion von π-ten Wurzeln erzeugt werden kann, und daher „der zu K gehörige Wurzelkörper" heißt.

Wir untersuchen jetzt den Aufbau des Wurzelkörpers in dem Spezialfall, daß K aus einem vollkommenen Körper K^* durch Adjunktion eines transzendenten Elementes t hervorgeht (durch Adjunktion eines algebraischen Elementes entsteht aus K^* stets wieder ein vollkommener Körper, wie aus der oben formulierten Grundeigenschaft des vollkommenen Körpers folgt). Es gilt:

Hilfssatz 2. *Geht K aus dem vollkommenen Körper K^* durch Adjunktion des transzendenten Elementes t hervor, so ist K unvollkommen. Bezeichnen wir mit $K^{(i)}$ denjenigen Körper, der aus K durch Adjunktion von $\sqrt[\pi^i]{t}$, also aus $K^{(i-1)}$ durch Adjunktion von $\sqrt[\pi]{\sqrt[\pi^{i-1}]{t}}$ hervorgeht* $(i=1,2,\ldots)$ *und mit $K^{(\omega)}$ den Vereinigungskörper aller $K^{(i)}$, so ist $K^{(\omega)}$ der zu K gehörige Wurzelkörper.*

Zunächst ist klar, daß $K^{(\omega)}$ ein Teilkörper des zu K gehörigen Wurzelkörpers sein muß, daß also insbesondere K selbst unvollkommen ist. Es muß nur noch gezeigt werden, daß $K^{(\omega)}$ mit jedem Element gleichzeitig seine π-te Wurzel enthält, also vollkommen ist. Bedeutet a ein beliebiges Element aus $K^{(\omega)}$, so gibt es eine natürliche Zahl i, so daß a in $K^{(i)}$ ent-

---

[24]) Vgl. St. § 7, S. 203, Satz 9.

[25]) Körper von der Charakteristik 0, das heißt Körper, deren Primkörper dem Körper der rationalen Zahlen isomorph ist, bedürfen keines besonderen Studiums, da sie keine unvollkommenen Teilkörper enthalten.

[26]) Vgl. für das Folgende St. § 12; insbesondere Satz 3, S. 225.

halten ist. Bezeichnet t' die π^i-te Wurzel aus t, so muß daher a die Gestalt $a = \frac{\sum_{k=0}^{n_1} \alpha_k t^{\prime k}}{\sum_{k=0}^{n_2} \beta_k t^{\prime k}}$ besitzen, wobei die Elemente α_k und β_k und mithin auch $\sqrt[\pi]{\alpha_k}$ und $\sqrt[\pi]{\beta_k}$ in K^* enthalten sind. Es existiert daher in $K^{(i+1)}$ das Element $\frac{\sum_{k=0}^{n_1} \sqrt[\pi]{\alpha_k} \cdot \sqrt[\pi]{t^{\prime k}}}{\sum_{k=0}^{n_2} \sqrt[\pi]{\beta_k} \cdot \sqrt[\pi]{t^{\prime k}}} = a'$, und wie die Ausrechnung zeigt, ist $a'^{\pi} = a$. Entwickelt man nämlich Zähler und Nenner von a' nach dem polynomischen Lehrsatz, so treten bei allen Termen außer den π-ten Potenzen von $\sqrt[\pi]{\alpha_k \cdot t^{\prime k}}$ bzw. $\sqrt[\pi]{\beta_k \cdot t^{\prime k}}$ durch π teilbare Binominalkoeffizienten auf, und diese Terme fallen daher weg. $K^{(\omega)}$ enthält also gleichzeitig mit jedem Element a seine π-te Wurzel und ist daher vollkommen.

Ist nun K ein vollkommener Körper der Charakteristik π, so wollen wir ihn nach dem Schema von Hilfssatz 1 aufbauen, aber so, daß wir, gestützt auf Hilfssatz 2, jeden auftretenden unvollkommenen Körper sofort zum zugehörigen Wurzelkörper erweitern. Wie sich dann der Aufbau von K gestaltet, zeigt folgender Satz:

Hilfssatz 3. *Bedeutet K einen Körper der Charakteristik π, $K^{(0)}$ den zu K gehörigen Primkörper, oder irgendeinen andern vollkommenen Teilkörper von K, so läßt sich K stets als Vereinigungskörper einer wohlgeordneten Menge von Körpern $K^{(0)}, K^{(1)}, \ldots, K^{(\tau)}, \ldots$ auffassen, wobei $K^{(\tau)}$ nur dann hinsichtlich $K^{(\tau-1)}$ transzendent ist, wenn in K kein hinsichtlich $K^{(\tau-1)}$ algebraisches Element existiert, und wobei außerdem folgende Bedingung erfüllt ist: $K^{(\tau)}$ ist dann und nur dann ein unvollkommener Körper, wenn es eine natürliche Zahl i gibt, so daß $\tau - i - 1$ existiert und $K^{(\tau-i)}$ aus dem vollkommenen Körper $K^{(\tau-i-1)}$ durch Adjunktion eines transzendenten Elementes t, $K^{(\tau-i+k)}$ $(k = 1, 2, \ldots, i)$ aus $K^{(\tau-i+k-1)}$ durch Adjunktion von $\sqrt[\pi^k]{t}$ entsteht.*

Der Beweis ergibt sich durch transfinite Induktion nach dem beim Beweise von Hilfssatz 1 benutzten Schema. Man braucht nur folgende Punkte zu beachten:

1. Entsteht $K^{(\tau)}$ aus $K^{(\tau-1)}$ durch Adjunktion eines transzendenten Elementes t, so ist $K^{(\tau-1)}$ sicher vollkommen, weil es sonst im vollkommenen Körper K ein Element gäbe, das, ohne in $K^{(\tau-1)}$ enthalten zu sein, eine π-te Wurzel eines Elementes aus $K^{(\tau-1)}$ darstellte, mithin hinsichtlich $K^{(\tau-1)}$ algebraisch wäre.

2. Ist $K^{(\tau)}$ ein durch Adjunktion eines transzendenten Elementes t entstehender unvollkommener Körper, so ist auch der zu $K^{(\tau)}$ gehörige Wurzelkörper in K enthalten, man kann also $K^{(\tau)}$ sofort nach dem Schema vom Hilfssatz 2 zu seinem Wurzelkörper erweitern.

3. Ist $K^{(\tau)}$ als Vereinigungskörper aller Körper $K^{(i)}$ $(i < \tau)$ definiert, und sind alle $K^{(i)}$ $(i < \tau)$ nach dem Schema von Hilfssatz 3 aufgebaut, so gilt das gleiche von $K^{(\tau)}$. Ist nämlich $K^{(\sigma)}$ $(\sigma < \tau)$ irgendein unvollkommener Körper, so enthält $K^{(\tau)}$ den Vereinigungskörper aller Körper $K^{(\sigma+i)}$ $(i = 1, 2, \ldots)$ und dieser Körper muß nach Hilfssatz 2 den zu $K^{(\sigma)}$ gehörigen Wurzelkörper darstellen. $K^{(\tau)}$ enthält also jedenfalls mit einem beliebigen unvollkommenen Körper zugleich dessen Wurzelkörper, ist also vollkommen. Da nun jeder der Körper $K^{(\sigma)}$ nach dem Schema von Hilfssatz 3 aufgebaut ist, so gilt das gleiche von $K^{(\tau)}$ selbst.

§ 6.

Der Grundring bei beliebigen vollkommenen Ringen des speziellen Typs.

Die Hilfssätze des vorangehenden Paragraphen gestatten uns, zu einem beliebigen vollkommenen Ring des speziellen Typs einen „Grundring" zu konstruieren. Es sei R der gegebene Ring; dann betrachten wir die Vielfachen des Einheitselements. Es bestehen zwei Möglichkeiten:

Entweder: unter den Vielfachen des Einheitselements kommt die Null vor, oder sie kommt nicht vor.

Im ersten Fall stellt die Gesamtheit der Vielfachen des Einheitselements ersichtlich wie bei den endlichen Ringen einen Bereich dar, der dem Restklassensystem nach π^{ϱ_0} isomorph ist, wobei π eine Primzahl, ϱ_0 eine beliebige natürliche Zahl bedeutet. Wir wollen wie oben diesen Ring $R^{(0)}$ als *den zu R gehörigen Primring* und das Element $\pi \times r_\varepsilon$ mit p bezeichnen. Ferner wollen wir in diesem Falle entsprechend der Ausdrucksweise der Körpertheorie R einen *„Ring mit der Charakteristik π^{ϱ_0}"* nennen.

Ist unter den Vielfachen von r_ε die Null nicht vorhanden, so müssen alle diese Vielfachen Einheiten sein. Wäre nämlich $\sigma \times r_\varepsilon$ ein Nullteiler, so wäre entgegen unserer Annahme $(\sigma \times r_\varepsilon)^\varrho = \sigma^\varrho \times r_\varepsilon = 0$. Wir erhalten diesmal den Primring $R^{(0)}$, indem wir zu den Vielfachen des Einheitselements noch sämtliche reziproken Elemente adjungieren. *$R^{(0)}$ stellt dann einen dem Körper der rationalen Zahlen isomorphen Körper dar.* Wir nennen in diesem Fall R einen *„Ring von der Charakteristik* 0".

Ferner soll folgender, in Zukunft wichtiger Begriff eingeführt werden:

Ein Ring $\overline{R}$ heißt „reguläre Erweiterung besonderer Art" des speziellen Ringes R, wenn ein wohlgeordnetes unendliches System von Ringen

$R, R^{(1)}, R^{(2)}, \ldots, R^{(\tau)}, \ldots, \overline{R}$ existiert, deren erster R und deren letzter $\overline{R}$ ist, und wenn dabei $R^{(\tau)}$, falls $\tau - 1$ existiert, eine regulär algebraische oder transzendente Erweiterung von $R^{(\tau-1)}$ darstellt, andernfalls aber als Vereinigungsring aller vorangehenden Ringe definiert ist.

Da eine einfache regulär algebraische oder transzendente Erweiterung von R stets denselben charakteristischen Exponenten besitzt wie der Ausgangsring, so ergibt sich durch transfinite Induktion, daß eine reguläre Erweiterung stets denselben charakteristischen Exponenten wie der Ausgangsring besitzt. Auf demselben Wege erkennt man, daß sich jeder Nullteiler von $\overline{R}$ als Summe einer endlichen Anzahl regulärer Elemente aus $\overline{R}$ mit Nullteilern aus R als Koeffizienten darstellen läßt, weil diese Tatsache richtig ist, sobald $\overline{R}$ eine einfache Erweiterung von R darstellt. Mit Hilfe des zuletzt gewonnenen Resultats beweist man durch die schon oft angewandte „Korrektionsgliedermethode"[27]):

Satz 14[28]). *Ist $\overline{R}$ eine reguläre Erweiterung von R, $\overline{\overline{R}}$ ein Erweiterungsbereich von R und Teilbereich von $\overline{R}$, dem derselbe Körper zugeordnet ist wie dem Ringe $\overline{R}$, so sind $\overline{\overline{R}}$ und $\overline{R}$ identisch.*

Nachdem wir die wesentlichen Eigenschaften der regulären Erweiterungen abgeleitet haben, definieren wir noch:

Ein Grundring ist ein Ring, der aus einem Primring durch reguläre Erweiterung besonderer Art hervorgeht.

Ein Grundring ist offenbar dann und nur dann ein Körper, wenn er die Charakteristik 0 oder die Charakteristik π besitzt. Es gilt ferner analog zu Satz 9:

Hauptsatz 1. *Zu jedem vollkommenen Ringe R existiert ein Grundring R^*, derart, daß den Ringen R und R^* derselbe Körper K zugeordnet ist. R^* soll ein „zu R gehöriger Grundring" heißen. Zwei verschiedene zu R gehörige Grundringe sind stets isomorph.*

Um zunächst den ersten Teil unseres Satzes, die Existenz eines R^*, zu beweisen, bauen wir den Körper K nach dem in Hilfssatz 3 von § 5 dargelegten Schema auf. $K^{(0)}, K^{(1)}, \ldots, K^{(\tau)}, \ldots, K$ seien die bei diesem Aufbau auftretenden Körper, $K^{(0)}$ sei im besonderen der Primkörper, und es möge, falls $\tau - 1$ existiert, $K^{(\tau)}$ aus $K^{(\tau-1)}$ durch Adjunktion von $\bar{\alpha}_\tau$ hervorgehen. Dann wird die Existenz von R^* bewiesen sein, wenn wir zeigen können:

Man kann allgemein das Element α_τ aus der durch $\bar{\alpha}_\tau$ bestimmten Klasse so auswählen, daß α_τ regulär algebraisch oder transzendent wird

[27]) Vgl. § 4, sowie insbesondere den ganz entsprechenden Beweis von Teil I, S. 120.

[28]) Satz 14 gilt für reguläre Erweiterungen allgemeiner Art, vgl. § 6.

hinsichtlich des Ringes $R^{(\tau-1)}$, der aus $R^{(0)}$ durch sukzessive Adjunktion der Elemente α_i ($i \leqq \tau - 1$ bzw. $i < \tau - 1$)[29]*) hervorgeht.*

Zum Nachweis der eben formulierten Tatsache haben wir zu zeigen, daß man $R^{(\tau)}$ in der angegebenen Weise konstruieren kann, wenn die Konstruktion von $R^{(\tau-1)}$ möglich ist. Besitzt $R^{(0)}$ die Charakteristik 0, ist also $R^{(\tau-1)}$ unter allen Umständen ein vollkommener Körper, so ergibt sich der geforderte Beweis mühelos. Ist $\bar{\alpha}_\tau$ hinsichtlich $K^{(\tau-1)}$ transzendent, so ist jedes Element α_τ aus der Klasse $\bar{\alpha}_\tau$ hinsichtlich $R^{(\tau-1)}$ transzendent, und man hat $R^{(\tau)} = R^{(\tau-1)}(\alpha_\tau)$. Ist $\bar{\alpha}_\tau$ hinsichtlich $R^{(\tau-1)}$ regulär algebraisch, so zeigt man nach derjenigen Methode, die auch beim Beweise für die Existenz des Grundrings bei endlichen Ringen in § 4 verwandt wurde, daß ein α_τ aus der Klasse $\bar{\alpha}_\tau$ existiert, das Nullstelle einer Primfunktion aus $R_f^{(\tau-1)}$ ist, und für das dann $R^{(\tau)} = R^{(\tau-1)}(\alpha_\tau)$ wird.

Ebenso kommt man zum Ziel, wenn R die Charakteristik π^{ϱ_0} besitzt, $R^{(\tau-1)}$ vollkommen, und $\bar{\alpha}_\tau$ hinsichtlich $K^{(\tau-1)}$ algebraisch ist. Ganz besonders möge dabei folgender, in Zukunft wichtiger Punkt hervorgehoben werden.

Ist $\bar{\alpha}_\tau$ Nullstelle der Primfunktion $\bar{g}_\tau(x)$ aus $K_f^{(\tau-1)}$, $g_\tau(x)$ eine beliebige Primfunktion der Klasse $\bar{g}_\tau(x)$ aus $R_f^{(\tau-1)}$, so kann man α_τ stets als Nullstelle von $g_\tau(x)$ wählen.

Es bleibt nun noch der Fall zu behandeln, daß R die Charakteristik π^{ϱ_0} besitzt, und daß α_τ hinsichtlich $R^{(\tau-1)}$ transzendent, oder $R^{(\tau-1)}$ unvollkommen ist. Angenommen zunächst, $\bar{\alpha}_\tau$ ist hinsichtlich $K^{(\tau-1)}$ transzendent, dann ist jedes Element aus der durch $\bar{\alpha}_\tau$ bestimmten Klasse hinsichtlich $R^{(\tau-1)}$ transzendent, es genügt also insbesondere auch keiner Gleichung mit Nullteilerkoeffizienten aus $R^{(\tau-1)}$. Diese Tatsache wird genau so bewiesen, wie wir bei dem Aufbau des Grundrings der endlichen Ringe (vgl. § 4) zeigten, daß α_τ hinsichtlich $R^{(\tau-1)}$ regulär algebraisch sein muß, falls es Nullstelle einer Primfunktion aus $R_f^{(\tau-1)}$ ist. Es sei nun $R^{(\tau-1)}$ unvollkommen, α'_τ ein beliebiges Element der Klasse $\bar{\alpha}_\tau$. Ist dann weiter $\alpha'_{\tau+i}$ ein Element der Klasse $\bar{\alpha}_{\tau+i}$, so ist $\alpha'^{\pi^i}_{\tau+i} = \alpha'_\tau + q_i$, wobei q_i einen Nullteiler bedeutet, $\alpha'_\tau + q_i$ also der Klasse $\bar{\alpha}_\tau$ angehört. Wir wollen insbesondere $\alpha'_\tau + q_{\pi^{2\cdot\varrho!}} = \alpha_\tau$ setzen, und dürfen dann als $R^{(\tau)}$ den Ring $R^{(\tau-1)}(\alpha_\tau)$ wählen. α_τ besitzt in R gemäß seiner Wahl für $i \leqq \pi^{2\cdot\varrho!}$ stets eine π^i-te Wurzel, das gleiche gilt aber allgemein für beliebiges i. Zunächst stellt nämlich jedes Element der Klasse $\alpha_{\tau+\pi^{2\cdot\varrho!}}$ eine $\pi^{2\cdot\varrho!}$-te Wurzel von α_τ dar. Denn entwickelt man $(\alpha'_{\tau+\pi^{2\cdot\varrho!}} + q)^{\pi^{2\cdot\varrho!}}$ nach dem binomischen Lehrsatz, so sieht man, daß außer der $\pi^{2\cdot\varrho!}$-ten Potenz von $\alpha'_{\tau+\pi^{2\cdot\varrho!}}$ alle

---

[29]) Der letztere Fall tritt ein, wenn $\tau - 1$ nicht existiert.

Glieder verschwinden müssen, und zwar deshalb, weil im zweiten bis $\varrho + 1$-ten Glied die Binomialkoeffizienten sämtlich durch π^{ϱ_0} teilbar sind, während die folgenden Glieder alle den Faktor $q^{\varrho} = 0$ enthalten. Da nun für jedes $\varkappa > 0$ eine Gleichung $(\alpha_{\tau+\varkappa+\pi^{2}\cdot\varrho!})^{\pi^{\varkappa}} = \alpha'_{\tau+\pi^{2}\cdot\varrho!} + q$ gilt, so folgt nach dem eben Bewiesenen, daß für $i > \pi^{2\cdot\varrho!}$ jedes Element der Klasse $\mathfrak{A}_{\tau+i}$ eine π^{i}-te Wurzel von α^{τ} darstellt.

Das Element $(\alpha_{\tau+\pi^{2}\cdot\varrho!+1})^{\pi^{2}\cdot\varrho!} = \alpha_{\tau+1}$ ist mithin stets eine π-te Wurzel von α_{τ}, es ist, wie in der üblichen Weise gezeigt wird, hinsichtlich $R^{(\tau)}$ regulär algebraisch, es besitzt schließlich eine $\pi^{2\cdot\varrho!}$-te Wurzel, und es muß daher, wie aus der oben angewandten Schlußweise folgt, für $i \geqq \pi^{2\cdot\varrho!}$ jedes Element der Klasse $\bar{\alpha}_{\tau+i+1}$ eine π^{i}-te Wurzel von $\alpha_{\tau+1}$ darstellen. Wir können mithin $R^{(\tau+1)} = R^{(\tau)}(\alpha_{\tau+1})$ setzen, und können folgendermaßen weiterschließen. Es sei $\alpha_{\tau+\pi^{2}\cdot\varrho!+2}$ ein beliebiges Element der Klasse $\bar{\alpha}_{\tau+\pi^{2}\cdot\varrho!+2}$, dann ist $(\alpha_{\tau+\pi^{2}\cdot\varrho!+2})^{\pi^{2}\cdot\varrho!} = \alpha_{\tau+2}$ eine π-te Wurzel von $\alpha_{\tau+1}$, $\alpha_{\tau+2}$, ist hinsichtlich $R^{(\tau+1)}$ regulär algebraisch und jedes Element der Klasse $\bar{\alpha}_{\tau+i+2}$ $(i \geqq \pi^{2\cdot\varrho!})$ ist eine π^{i}-te Wurzel von $\alpha_{\tau+1}$. Man kann daher $R^{(\tau+2)} = R^{(\tau+1)}(\alpha_{\tau+2})$ setzen, und durch Fortsetzung des geschilderten Verfahrens die Ringe $R^{(\tau+\varkappa)}$ $(\varkappa = 1, 2, \ldots)$ sukzessive konstruieren. Es ist daher bei geeigneter Wahl der α_i $(i \leqq \tau$ bzw. $i < \tau)$ in jedem Falle möglich aus $R^{(\tau-1)}$ den Ring $R^{(\tau)}$ in gewünschter Weise abzuleiten, die Existenz des Grundrings ist mithin gesichert.

Es handelt sich noch um den Beweis der oben behaupteten Isomorphie (auf Eindeutigkeit ist ja in unserem Falle nicht zu rechnen, weil bei der Bildung des Grundrings hinsichtlich der Adjunktion der transzendenten Elemente eine gewisse Willkür herrscht). Wir leiten die Isomorphie aus folgendem allgemeinen Satze ab:

Satz 15. *Zwei vollkommene Grundringe R^* und R'^* sind isomorph, wenn sie denselben charakteristischen Exponenten ϱ_0 besitzen, und wenn außerdem ihre zugeordneten Körper isomorph sind.*

Die Behauptung ist nur dann nicht trivial, wenn R^* und R'^* keine Körper sind, also die Charakteristik π^{ϱ_0} $(\varrho_0 > 1)$ besitzen. In diesem Falle sind jedenfalls die Primringe $R^{(0)}$ und $R^{(0)'}$ beide dem Restklassensystem modulo π^{ϱ_0}, und daher untereinander isomorph. Wir ordnen jetzt der einfachen Bezeichnungsweise halber den Ringen R^* und R'^* denselben Körper K zu. Diesen Körper bauen wir im Sinne von Hilfssatz 3, § 5, auf, und konstruieren dann, gestützt auf diesen Aufbau nach dem oben auseinandergesetzten Schema einen zu R^* und ebenso einen zu R'^* gehörigen Grundring. Diese Grundringe müssen nach Satz 14 mit R^* bzw. R'^* identisch sein. Es bezeichne nun α_τ bzw. α'_τ das Element, durch das

bei dem betrachteten Aufbau $R^{(\tau)}$ bzw. $R^{(\tau)'}$ aus $R^{(\tau-1)}$ bzw. $R^{(\tau-1)'}$ hervorgeht. Dann behaupten wir:

Wir erhalten für jedes τ eine isomorphe Zuordnung zwischen $R^{(\tau)}$ und $R^{(\tau)'}$, wenn wir allgemein die passend gewählten Elemente α_τ und α'_τ einander zuordnen.

Zum Beweise haben wir nur zu zeigen, daß bei vorausgesetzter Isomorphie von $R^{(\tau-1)}$ und $R^{(\tau-1)'}$ durch die Zuordnung der geeignet bestimmten Elemente α_τ und α'_τ eine isomorphe Beziehung zwischen $R^{(\tau)}$ und $R^{(\tau)'}$ hergestellt wird[30]). Ist α_τ hinsichtlich $R^{(\tau)}$ transzendent, so ist diese Behauptung evidenterweise richtig, ganz gleichgültig, wie wir α_τ und α'_τ modulo $\mathfrak{p}^*$ bzw. modulo $\mathfrak{p}^{*'}$ wählen.

Ähnlich liegen die Verhältnisse, wenn $R^{(\tau-1)}$ unvollkommen ist. Denn dann sind α_τ bzw. α'_τ Nullstellen der Primfunktionen $x^\pi - \alpha_{\tau-1}$ bzw. $x^\pi - \alpha'_{\tau-1}$ aus $R_f^{(\tau-1)}$ bzw. $R_f^{(\tau-1)'}$, und diese beiden Primfunktionen sind durch den zwischen $R^{(\tau-1)}$ und $R^{(\tau-1)'}$ bestehenden Isomorphismus einander zugeordnet. Ist schließlich $R^{(\tau-1)}$ vollkommen, α_τ Nullstelle der Primfunktion $g(x)$ aus $R^{(\tau-1)}$, so wollen und können wir nach einer oben gemachten Bemerkung α'_τ so wählen, daß es Nullstelle der Primfunktion $g'(x)$ wird, die durch den zwischen $R^{(\tau-1)}$ und $R^{(\tau-1)'}$ bestehenden Isomorphismus der Primfunktion $g(x)$ zugeordnet ist. $R^{(\tau)}$ und $R^{(\tau)'}$ werden dann stets isomorph, und daraus folgt unmittelbar die Richtigkeit von Satz 15.

Das eben gewonnene Resultat kann uns dazu dienen, ein in Teil I abgeleitetes Theorem zu verschärfen. Wir hatten in Teil I § 9 folgenden Satz bewiesen:

Sind $\bar{R}^{(1)}$ und $\bar{R}^{(2)}$ zwei algebraisch abgeschlossene Ringe, die aus demselben Ringe R durch regulär algebraische Erweiterungen hervorgehen, so sind die den Ringen $\bar{R}^{(1)}$ und $\bar{R}^{(2)}$ zugeordneten Körper $K^{(1)}$ und $K^{(2)}$ isomorph.

Jetzt können wir sagen:

Satz 16. *Sind $\bar{R}^{(1)}$ und $\bar{R}^{(2)}$ zwei algebraisch abgeschlossene Ringe, die aus dem beliebigen Ringe R durch algebraische Erweiterungen hervorgehen, so sind die zu $\bar{R}^{(1)}$ und $\bar{R}^{(2)}$ gehörigen Grundringe $\bar{R}^{(1)*}$ und $\bar{R}^{(2)*}$ isomorph.*

Denn $\bar{R}^{(1)*}$ und $\bar{R}^{(2)*}$ besitzen jedenfalls denselben charakteristischen Exponenten, nämlich denjenigen des zu R gehörigen Primrings. Ferner sind $\bar{K}^{(1)}$ und $\bar{K}^{(2)}$ vollkommene Ringe, weil ihr zugehöriger Körper algebraisch abgeschlossen und daher vollkommen ist. (Man vergleiche die

30) Ist τ eine transfinite Ordnungszahl, für die $\tau - 1$ nicht existiert, so sind ja $R^{(\tau)}$ und $R^{(\tau)'}$ stets isomorph, falls allgemein $R^{(\sigma)}$ und $R^{(\sigma)'}$ isomorph sind.

in § 5 angegebene charakteristische Eigenschaft eines vollkommenen Körpers der Charakteristik π.)

Für Grundringe ergibt sich aus Satz 16, daß zwei aus demselben Ausgangsring durch algebraische Erweiterung entstehende algebraisch abgeschlossene Grundringe notwendig isomorph sein müssen. Doch ist damit nicht gezeigt, daß diese Bereiche immer hinsichtlich des Ausgangsrings äquivalent sind, es ist also nicht etwa der letzte Satz von Teil I auf unvollkommene Ringe übertragbar.

§ 7.

Reguläre Erweiterungen allgemeiner Art.

Es soll jetzt der im vorangehenden Paragraphen eingeführte Begriff der „regulären Erweiterungen besonderer Art" eines speziellen Ringes in einen allgemeinen Zusammenhang eingeführt werden. Im Falle, daß sowohl Ausgangsring als Erweiterungsring vollkommen sind, werden wir auf diese Weise zu abschließenden Isomorphiekriterien gelangen.

Es sei $\overline{R}$ ein spezieller Erweiterungsring des speziellen Ringes R, und $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\tau, \ldots$ eine endliche oder unendliche Menge von Elementen aus $\overline{R}$ mit folgenden Eigenschaften:

1. *Jedes Element aus $\overline{R}$ läßt sich linear durch endlich viele der α_τ mit Koeffizienten aus R ausdrücken, und zwar existiert für jeden Nullteiler aus $\overline{R}$ eine Darstellung der gewünschten Art, bei der sämtliche Koeffizienten Nullteiler sind.*

2. *Diese Darstellung ist eindeutig, d. h. es besteht zwischen je endlich vielen der α_τ keine lineare Relation mit Koeffizienten aus R, auch keine mit Nullteilerkoeffizienten.*

Wir nennen dann die Gesamtheit der Elemente α_τ eine *reguläre Modulbasis von $\overline{R}$ hinsichtlich R*[31]) und definieren: *Der spezielle Ring $\overline{R}$ heißt reguläre Erweiterung allgemeiner Art des speziellen Ringes R, wenn $\overline{R}$ hinsichtlich R eine reguläre Modulbasis besitzt.*

Ist $\overline{R}$ eine reguläre Erweiterung allgemeiner Art von R, so muß $\overline{R}$ den gleichen charakteristischen Exponenten wie R besitzen. Bezeichnet nämlich $\bar{\varrho}$ den charakteristischen Exponenten von $\overline{R}$, so ist sicher $\bar{\varrho} \geqq \varrho$, weil ja $\overline{R}$ Erweiterungsring von R ist. Ferner verschwindet aber infolge der ersten Eigenschaft der regulären Modulbasis die ϱ-te Potenz jedes Nullteilers aus $\overline{R}$, es ist also auch $\bar{\varrho} \leqq \varrho$.

Ferner gilt, wie aus der Natur des in § 6 *skizzierten Beweises zu ersehen ist, Satz* 14 *ebensogut für reguläre Erweiterungen allgemeiner, wie für solche besonderer Art.* Schließlich haben wir:

[31]) Vgl. Teil I § 10.

Satz 17. *Ist $\bar{R}$ eine reguläre Erweiterung von R, und bilden die Elemente $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_r, \ldots$ eine Modulbasis von $\bar{R}$ hinsichtlich R, d. h. stellt jedes Element aus $\bar{R}$ eine lineare Verbindung von endlich vielen β_r mit Koeffizienten aus R dar, so bilden entweder die β_r eine reguläre Modulbasis von $\bar{R}$ hinsichtlich R, oder ein β_r läßt sich linear durch die übrigen mit Koeffizienten aus R ausdrücken*[32]).

Es sei $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r, \ldots$ eine nach Voraussetzung existierende *reguläre* Modulbasis von $\bar{R}$ hinsichtlich R. Sind dann $\beta_{f_1}, \beta_{f_2}, \ldots, \beta_{f_\mu}$ irgendwelche endlich viele der Elemente $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_r, \ldots$, so bestehen μ Gleichungen $\beta_i = \sum_{k=1}^{\nu} a_{ik}\alpha_{g_k}$ $(i = 1, 2, \ldots, \mu)$, wobei ν eine natürliche Zahl bedeutet, und die Elemente a_{ik} dem Ringe R entnommen sind. Ist nun mindestens eine Determinante μ-ten Grades der Matrix $\| a_{ik} \|$ $(i = 1, 2, \ldots, \mu,\ k = 1, 2, \ldots, \nu)$ regulär, so kann zwischen den β_{f_i} $(i = 1, 2, \ldots, \mu)$ keinerlei lineare Relation mit Koeffizienten aus R bestehen, weil es andernfalls zwischen den Elementen α_{g_k} $(k = 1, 2, \ldots, \nu)$ gegen Voraussetzung eine lineare Relation gäbe. Ist andererseits jede Determinante μ-ten Grades von $\| a_{ik} \|$ ein Nullteiler, so läßt sich sicher ein β_{f_i}, etwa β_{f_μ}, linear durch die übrigen bis auf einen Nullteilersummanden ausdrücken. Dann aber bilden, wie aus Satz 14 folgt, bereits die Elemente β_i $(i \neq f_\mu)$ eine Modulbasis von $\bar{R}$ hinsichtlich R. Es bleibt also zum Beweise von Satz 17 nur noch zu zeigen, daß jeder Nullteiler aus $\bar{R}$ eine lineare Verbindung von Elementen β_r mit Nullteilern aus R als Koeffizienten darstellen muß, falls zwischen endlich vielen der β_r niemals eine lineare Relation besteht. Das ist aber klar. Ist nämlich $\sum_{i=1}^{\mu} a_i \beta_{f_i}$ ein Nullteiler, so haben wir $\sum_{i=1}^{\mu} a_i \beta_{f_i} = \sum_{k=1}^{\nu} q_k \alpha_{g_k}$, wobei alle q_k Nullteiler sind. Daraus folgt aber, daß in R ein Element $q \neq 0$ existieren muß, für das $q \cdot q_k = 0$ ist $(k = 1, 2, \ldots, \nu)$. Wir haben also $\sum_{i=1}^{\mu} (q \cdot a_i) \cdot \beta_{f_i} = 0$, und da zwischen den β_{f_i} keine lineare Relation bestehen soll, so muß $q \cdot a_i = 0$ sein $(i = 1, 2, \ldots, \mu)$, d. h. alle a_i sind Nullteiler.

Satz 14 und Satz 17 kennzeichnen die grundlegenden Eigenschaften der regulären Erweiterungen. Aus ihnen kann man z. B. unmittelbar folgenden Satz herleiten:

Bezeichnet $\bar{K}$ den zu $\bar{R}$, K den zu R gehörigen Körper, und bilden die Elemente $\bar{\alpha}_1, \bar{\alpha}_2, \ldots, \bar{\alpha}_r, \ldots$ eine reguläre Modulbasis von $\bar{K}$ hinsichtlich K, so bilden die Elemente $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r, \ldots$ eine reguläre Modulbasis von $\bar{R}$ hinsicht-

[32]) Dieser Satz wurde für *endliche* reguläre Modulbasen bereits in Teil I § 10 bewiesen.

lich R, falls $\bar{R}$ eine reguläre Erweiterung von R darstellt, und α_τ der Klasse $\bar{\alpha}_\tau$ angehört[33]). Man braucht nur zu bedenken, daß unter den α_τ keines linear durch endlich viele der übrigen ausdrückbar sein kann. Aus der eben gemachten Bemerkung ergibt sich mit Leichtigkeit:

Satz 18. *Jede reguläre Erweiterung besonderer Art ist gleichzeitig eine reguläre Erweiterung allgemeiner Art.*

Ist R der Ausgangs-, $\bar{R}$ der Erweiterungsring, und sind K und $\bar{K}$ die zugeordneten Körper, so braucht man nur zu zeigen, daß $\bar{K}$ eine reguläre Modulbasis hinsichtlich K besitzen muß. Das folgt aber durch transfinite Induktion aus den nachstehenden vier Tatsachen:

1. Ist $\bar{K}$ ein beliebiger Erweiterungskörper von $K = K^{(0)}$, so existiert stets ein wohlgeordnetes System von Körpern $K^{(0)}, K^{(1)}, \ldots, K^{(\tau)}, \ldots$, deren erster K, deren letzter $\bar{K}$ ist, so daß $K^{(\tau)}$ eine einfache algebraische oder transzendente Erweiterung von $K^{(\tau-1)}$, bzw. falls $\tau - 1$ nicht existiert, den Vereinigungskörper aller $K^{(i)}$ $(i < \tau)$ darstellt (vgl. Hilfssatz 1, § 5).

2. Ist $\bar{K}$ eine einfache algebraische Erweiterung, so besitzt $\bar{K}$ evidenterweise eine reguläre Modulbasis hinsichtlich K. Das gleiche gilt aber, wenn $\bar{K}$ eine einfache transzendente Erweiterung von K, etwa durch das Element $\bar{t}$ darstellt. Denn dann bilden, wie aus der Theorie der Partialbruchzerlegung folgt[34]), die Potenzen von $\bar{t}$, sowie die Gesamtheit der Elemente $\dfrac{\bar{t}^i}{\bar{g}(\bar{t})^k}$ $(0 \leqq i < l)$, wobei k eine natürliche Zahl und $\bar{g}(x)$ eine beliebige Primfunktion aus K_f vom beliebigen Grade l bedeutet, die gewünschte (diesmal unendliche) reguläre Modulbasis.

3. Ist K_1 ein Erweiterungskörper von K, K_2 ein solcher von K_1, und besitzt K_1 hinsichtlich K die reguläre Modulbasis $\bar{\alpha}_1, \bar{\alpha}_2, \ldots, \bar{\alpha}_\tau, \ldots$, K_2 hinsichtlich K_1 die reguläre Modulbasis $\bar{\beta}_1, \bar{\beta}_2, \ldots, \bar{\beta}_\tau, \ldots$, so bildet die

---

[33]) Im folgenden benützen wir mehrfach nachstehenden Satz: Ist $\bar{R}$ eine reguläre Erweiterung besonderer Art durch die algebraischen und transzendenten Elemente $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\tau, \ldots$, so stellt $\bar{K}$ eine algebraische und transzendente Erweiterung durch die Elemente $\bar{\alpha}_1, \bar{\alpha}_2, \ldots, \bar{\alpha}_\tau, \ldots$ dar. Diese Behauptung folgt mit Hilfe der transfiniten Induktion daraus, daß der Satz richtig ist, wenn $\bar{R}$ eine einfache Erweiterung von R darstellt. Ist insbesondere $\bar{R}$ eine Erweiterung von R durch das transzendente Element t, so folgt, was vielleicht in Teil I § 7 nicht genügend hervorgehoben wurde, die Gültigkeit unseres Satzes daraus, daß die Elemente $\overline{\dfrac{f_1(t)}{f_2(t)}}$ und $\overline{\dfrac{f_1'(t)}{f_2'(t)}}$ identisch sind, wenn die Gleichung $\bar{f}_1(x)\cdot\bar{f}_2'(x) - \bar{f}_1'(x)\cdot\bar{f}_2(x) = 0$ erfüllt ist. Das ist nämlich gleichzeitig die Bedingung dafür, daß $\dfrac{f_1(t)}{f_2(t)} - \dfrac{f_1'(t)}{f_2'(t)}$ ein Nullteiler ist.

[34]) Vgl. z. B. Boehm: Über die Entwicklung rationaler Funktionen nach Potenzen von Polynomen, Jahrb. d. d. Math. Ver. 1918, § 1, S. 129.

Gesamtheit der Elemente $\bar{\alpha}_\sigma \cdot \bar{\beta}_\tau$ (σ und τ beliebig) eine reguläre Modulbasis von K_2 hinsichtlich K. Zunächst bildet nämlich die Gesamtheit dieser Elemente jedenfalls eine Modulbasis von K_2 hinsichtlich K. Besteht weiterhin eine Relation $\sum_{i=1}^{\mu} \sum_{k=1}^{\nu} \bar{a}_{ik} \bar{\beta}_{\varrho_k} \bar{\alpha}_{f_i} = 0$, wobei die $\bar{a}_{ik}$ Elemente aus K bedeuten, so folgt daraus das Gleichungssystem $\sum_{i=1}^{\mu} \bar{a}_{ik} \bar{\alpha}_{f_i} = 0 \quad (k = 1, 2, \ldots, \nu)$ und daraus weiter $a_{ik} = 0$ $(i = 1, 2, \ldots, \mu;\ k = 1, 2, \ldots, \nu)$.

Wählt man, was stets möglich ist, die Modulbasen von K_1 hinsichtlich K und von K_2 hinsichtlich K_1 so, daß in beiden Basen das Element $\bar{r}$, vorkommt, so kommen in der für K_2 abgeleiteten Modulbasis sämtliche Elemente $\bar{\alpha}_\sigma$ und ebenso sämtliche Elemente $\bar{\beta}_\tau$ vor.

4. Ist τ eine transfinite Ordnungszahl, zu der $\tau - 1$ nicht existiert, bedeutet für $\sigma \leqq \tau$ allgemein $K^{(\sigma)}$ einen Erweiterungskörper von $K^{(\sigma-1)}$ bzw., falls $\sigma - 1$ nicht existiert, den Vereinigungskörper aller $K^{(i)}$ $(i < \sigma)$, und besitzt für jedes $\sigma < \tau$ der Körper $K^{(\sigma)}$ eine solche reguläre Modulbasis $\mathfrak{B}_\sigma$ hinsichtlich K, daß unter den Elementen von $\mathfrak{B}_\sigma$ für jedes $i \leqq \sigma$ die Modulbasis $\mathfrak{B}_i$ von $K^{(i)}$ hinsichtlich K enthalten ist, so besitzt auch $K^{(\tau)}$ eine Modulbasis $\mathfrak{B}_\tau$ der charakterisierten Art, und zwar stellt $\mathfrak{B}_\tau$ die Vereinigungsmenge aller $\mathfrak{B}_i$ $(i < \tau)$ dar. Die Behauptung ergibt sich bei Beachtung aller Voraussetzungen ohne weiteres.

Die aus 1 — 4 leicht ableitbare Tatsache, daß ein beliebiger Erweiterungskörper $\bar{K}$ von K hinsichtlich K stets eine reguläre Modulbasis besitzt, gewährleistet nicht nur die Richtigkeit von Satz 18, sondern spielt auch eine fundamentale Rolle beim Beweise folgenden, in Zukunft wichtigen Theorems:

Satz 19[35]. *Ist $\bar{R}$ eine reguläre Erweiterung von R und stellt $\bar{\bar{R}}$ gleichzeitig eine reguläre Erweiterung von R und einen Teilbereich von $\bar{R}$ dar, bezeichnen K, $\bar{K}$, $\bar{\bar{K}}$ die zugeordneten Körper, ist schließlich $\bar{\beta}$ hinsichtlich $\bar{\bar{K}}$ transzendent, oder Nullstelle einer Primfunktion μ-ten Grades aus $\bar{\bar{K}}_f$, so genügt ein beliebiges Element β aus der Klasse $\bar{\beta}$ keiner bzw. keiner Gleichung niedrigeren als μ-ten Grades mit Koeffizenten aus $\bar{\bar{R}}$, auch keiner solchen mit Nullteilerkoeffizienten.*

Es sei $\bar{\alpha}_1, \bar{\alpha}_2, \ldots, \bar{\alpha}_\tau, \ldots$ eine nach dem Bewiesenen stets existierende reguläre Modulbasis von $\bar{\bar{K}}$ hinsichtlich K, $\bar{\beta}_1, \bar{\beta}_2, \ldots, \bar{\beta}_\tau, \ldots$ eine solche von $\bar{\bar{K}}(\bar{\beta})$ hinsichtlich $\bar{\bar{K}}$, $\bar{\gamma}_1, \bar{\gamma}_2, \ldots, \bar{\gamma}_\tau, \ldots$ eine solche von $\bar{K}$ hinsichtlich $\bar{\bar{K}}(\bar{\beta})$, und dabei seien, was stets möglich ist, die $\bar{\beta}_\tau$ so gewählt, daß unter ihnen sämtliche Potenzen von $\bar{\beta}$ bzw. $\bar{\beta}^0, \bar{\beta}^1, \ldots, \bar{\beta}^{\mu-1}$ auftreten, ferner möge, was gleichfalls angenommen werden darf, unter den $\bar{\gamma}_\tau$ das

---

[35]) Dieser Satz stellt eine Verallgemeinerung von Teil I Satz 30 dar.

Element $\bar{r}_s$ vorkommen. Dann stellt die Gesamtheit der Elemente $\bar{\alpha}_\varrho \cdot \bar{\beta}_\sigma \cdot \bar{\gamma}_\tau$ eine reguläre Modulbasis von $\bar{K}$ hinsichtlich K dar, also bildet nach Satz 18 auch die Gesamtheit aller Elemente von der Form $\alpha_\varrho \cdot \beta_\sigma \cdot \gamma_\tau$, wobei α_ϱ ein beliebiges, aber festgewähltes Element aus der Klasse $\bar{\alpha}_\varrho$ usw. bedeutet, eine reguläre Modulbasis von $\bar{R}$ hinsichtlich R. Daraus folgt unmittelbar die Richtigkeit von Satz 19. Man braucht die β_σ nur so zu wählen, daß unter ihnen sämtliche Potenzen von β bzw. die Elemente $\beta^0, \beta^1, \ldots, \beta^{\mu-1}$ vorkommen, und die γ_τ so zu bestimmen, daß unter ihnen das Element r_s auftritt. Dann ist evident, daß eine Relation $\sum_{i=1}^{\lambda} \sum_{k=0}^{\nu} a_{ik} \alpha_{f_i} \beta^k = 0$ (λ und ν beliebig bzw. λ beliebig, $\nu \leq \mu - 1$) nur für $a_{ik} = 0$ ($i = 1, 2, \ldots, \lambda$; $k = 0, 1, \ldots, \nu$) bestehen kann.

Satz 19 ermöglicht uns weitgehende Folgerungen für den Fall, daß der vollkommene Ring $\bar{R}$ eine reguläre Erweiterung des vollkommenen Ringes R darstellt. Wir wollen in diesem Falle von „*vollkommenen regulären Erweiterungen*" sprechen, und können dann nachstehenden Satz formulieren:

1. Fundamentaltheorem der vollkommenen regulären Erweiterungen.

Jede vollkommene reguläre Erweiterung der allgemeinen Art ist gleichzeitig eine reguläre Erweiterung besonderer Art.

Dieses Fundamentaltheorem beweisen wir unter Benutzung von Satz 14 und vor allem von Satz 19 genau so, wie wir im vorangehenden Paragraphen die Existenz des Grundrings zeigten. (Man beachte dabei, daß Hilfssatz 3 von § 5 richtig ist, wenn K einen beliebigen vollkommenen Teilkörper des vollkommenen Körpers $\bar{K}$ darstellt.) Der Beweis ergibt sich folgendermaßen: Es sei K der dem Ringe R, $\bar{K}$ der dem Ringe $\bar{R}$ zugeordnete vollkommene Körper. Wir bauen dann $\bar{K}$ über K nach dem Schema von Hilfssatz 3 § 5 auf. $K^{(1)}, K^{(2)}, \ldots, K^{(\tau)}, \ldots$ seien die dabei auftretenden Zwischenkörper. Dann zeigen wir durch transfinite Induktion, daß man eine Kette von zwischen R und $\bar{R}$ liegenden Ringen $R^{(1)}, R^{(2)}, \ldots, R^{(\tau)}, \ldots$ konstruieren kann, denen die Körper $K^{(1)}, K^{(2)}, \ldots, K^{(\tau)}, \ldots$ zugeordnet sind. Auf diese Weise gelangt man zu einem Teilring $\bar{R}'$ von $\bar{R}$ mit dem zugehörigen Körper $\bar{K}$ und aus Satz 14 folgt die Identität von $\bar{R}$ und $\bar{R}'$. Zu den Einzelheiten des Induktionsbeweises sei noch bemerkt: Entsteht $K^{(\tau)}$ aus dem vollkommenen Körper $K^{(\tau-1)}$ durch Adjunktion des Elementes α_τ, das Nullstelle der irreduziblen Funktion $\bar{g}_\tau(x)$ aus $K_f^{(\tau-1)}$ ist, und bedeutet $g_\tau(x)$ eine *beliebige* Primfunktion aus dem Funktionenring $R_f^{(\tau-1)}$ und aus der Klasse $\bar{g}_\tau(x)$, so kann $R^{(\tau)}$ aus $R^{(\tau-1)}$ durch Ad-

junktion einer Nullstelle von $g_\tau(x)$ erzeugt werden. Es gibt nämlich jedenfalls eine mit $g_\tau(x)$ mod $\mathfrak{p}^*$ kongruente Primfunktion in $\overline{R}_f$, die eine Produktzerlegung $g'_\tau(x) = (x - \alpha'_\tau) \cdot h'_\tau(x)$ gestattet, wobei α'_τ der Klasse $\bar{\alpha}_\tau$ angehört, und $x - \alpha'_\tau$ und $h'_\tau(x)$ teilerfremd sind. Daraus folgt aber die Existenz einer analogen Produktzerlegung $g_\tau(x) = (x - \alpha_\tau) \cdot h_\tau(x)$, wobei $h_\tau(x)$ ebenfalls der Klasse $\bar{\alpha}_\tau$ angehört. Ist $K^{(\tau)}$ eine transzendente Erweiterung von $K^{(\tau-1)}$ durch das Element $\bar{\alpha}_\tau$, so ist jedes Element α_τ aus der Klasse $\bar{\alpha}_\tau$ hinsichtlich $R^{(\tau-1)}$ transzendent. Ist insbesondere $K^{(\tau)}$ unvollkommen, so kann und muß genau so, wie beim Beweise von Hauptsatz 1 gezeigt wird, α_τ so gewählt werden, daß für beliebiges i $\sqrt[\pi^i]{\alpha_\tau}$ in $\overline{R}$ existiert. Alsdann kann man in entsprechender Weise $\alpha_{\tau+1} = \sqrt[\pi]{\alpha_\tau}$; $\alpha_{\tau+2} = \sqrt[\pi]{\alpha_{\tau+1}}$ usw. bestimmen, und gelangt durch Adjunktion dieser Elemente vom unvollkommenen Ringe $R^{(\tau)} = R^{(\tau-1)}(\alpha_\tau)$ zu einem vollkommenen Ringe $R^{(\tau+\omega)}$, dem der zu $K^{(\tau)}$ gehörige Wurzelkörper zugeordnet ist.

In entsprechender Weise ermöglicht uns Satz 14 und Satz 19 genau nach der beim Beweise von Satz 15 verwandten Schlußweise den Beweis für das

2. Fundamentaltheorem der vollkommen regulären Erweiterungen.

Sind $\overline{R}$ und $\overline{R}'$ zwei vollkommene reguläre Erweiterungen von R, denen derselbe Körper $\overline{K}$ zugeordnet ist, so sind $\overline{R}$ und $\overline{R}'$ hinsichtlich R äquivalent.

Wir konstruieren nach dem Schema von Hilfssatz 3, § 5 zwischen K und $\overline{K}$ — wobei K den R zugeordneten Körper bedeutet — eine Kette von Zwischenkörpern $K^{(1)}, K^{(2)}, \ldots, K^{(\tau)}, \ldots$ und bauen, gestützt auf diese Konstruktion, die Ringe $\overline{R}$ und $\overline{R}'$ in der beim Beweise von Fundamentaltheorem 1 auseinandergesetzten Weise auf. $R^{(1)}, R^{(2)}, \ldots, R^{(\tau)}, \ldots$ bzw. $R^{(1)'}, R^{(2)'}, \ldots, R^{(\tau)'}, \ldots$ seien die dabei auftretenden Zwischenringe zwischen R und $\overline{R}$ bzw. $\overline{R}'$. Dann ergibt sich wörtlich wie beim Beweise von Hauptsatz 1, daß $R^{(\tau)}$ und $R^{(\tau)'}$ für jedes τ hinsichtlich R äquivalent sind, woraus die behauptete Äquivalenz von $\overline{R}$ und $\overline{R}'$ unmittelbar folgt.

Das zweite Fundamentaltheorem stellt ersichtlich eine Verallgemeinerung des „Fundamentaltheorems der regulär algebraischen Erweiterungen vollkommener Ringe" von Teil I § 10 dar. Dort beschränkten wir uns auf algebraische Erweiterungen, hier lassen wir algebraische und transzendente Erweiterungen in beliebiger Wohlordnung zu.

Wegen der Wichtigkeit der beiden Fundamentaltheoreme sollen die Hauptpunkte des Beweises hier nochmals kurz hervorgehoben werden: Der

eine Teil des Beweises gilt für vollkommene und unvollkommene Ringe gleichmäßig. Er stützt sich im wesentlichen auf die Eigenschaften der regulären Modulbasis und damit auf die Sätze 14 und 17. Das Endergebnis dieses Beweisteils ist Satz 19, der auch so formuliert werden kann: Ist $\bar{R}$ eine reguläre Erweiterung von R, $\bar{\bar{R}}$ ein zwischen R und $\bar{R}$ liegender Ring, so ist α hinsichtlich $\bar{\bar{R}}$ regulär algebraisch, falls es Nullstelle einer Primfunktion aus $\bar{\bar{R}}_f$ ist; es ist hinsichtlich $\bar{\bar{R}}$ transzendent, wenn modulo $\mathfrak{p}^*$ $\bar{\alpha}$ hinsichtlich $\bar{\bar{K}}$ transzendent ist.

Der zweite Teil des Beweises stützt sich in der Hauptsache auf Hilfssatz 3 von § 5, der den Aufbau eines vollkommenen Erweiterungskörpers über einem vollkommenen Ausgangskörper lehrt. Wir erkennen mit Benutzung dieses Hilfssatzes, daß sich stets ein wohlgeordnetes, endliches oder unendliches System von Erweiterungsringen $R^{(1)}, R^{(2)}, \ldots, R^{(\nu)}, \ldots$ über R konstruieren läßt, derart, daß in $\bar{R}$ stets ein hinsichtlich $R^{(\nu)}$ regulär algebraisches oder transzendentes Element vorhanden ist, falls nur $R^{(\nu)}$ nicht mit $\bar{R}$ zusammenfällt. Dieser zweite Teil des Beweises *kann* sich mindestens ohne wesentliche Umgestaltung *nicht* auf unvollkommene Ringe übertragen lassen, weil ja, wie aus dem in der letzten Anmerkung von Teil I gegebenen Gegenbeispiele hervorgeht, das zweite Fundamentaltheorem für unvollkommene Ringe seine Gültigkeit verliert. Was das erste Fundamentaltheorem angeht, so scheint die Konstruktion eines Gegenbeispiels für unvollkommene Ringe nicht so einfach zu sein. Diese Frage, sowie die Frage, ob bei unvollkommenen Ringen stets ein Grundring existiert, muß daher hier offen gelassen werden.

Beschränken wir uns für den Schluß dieses Paragraphen auf vollkommene Ringe, so können wir feststellen, daß durch die beiden Fundamentaltheoreme der Zusammenhang zwischen Körpern und speziellen Ringen, soweit zwischen diesen Bereichen überhaupt Beziehungen bestehen können, klargelegt ist. *Algebraische und transzendente Erweiterungen sind zusammen eindeutig definiert als die überhaupt möglichen Erweiterungen mit regulärer Modulbasis.* Körper und Grundringe sind vor den übrigen speziellen Ringen durch folgende Eigenschaft ausgezeichnet: *Ist $\bar{K}(\bar{R}^*)$ ein Erweiterungsbereich des Körpers K (des vollkommenen Grundringes R^*), der selbst wieder einen Körper (vollkommenen Grundring) darstellt, so besitzt $\bar{K}(\bar{R}^*)$ hinsichtlich $K(R^*)$ eine reguläre Modulbasis.*

Wir können daher den Körper (vollkommenen Grundring) aus seinem Primkörper (Primring) durch ein wohlgeordnetes System von algebraischen und transzendenten Erweiterungen erzeugen. Diese Tatsache gestattet uns, für einen Körper (vollkommenen Grundring) den Transzendenzgrad hin-

sichtlich des Primkörpers (Primringes) zu definieren[36]) und im Anschluß an Steinitz den Satz auszusprechen: Zwei Körper (vollkommene Grundringe) sind nur dann isomorph, wenn sie in ihrem Primkörper (Primring) und im Transzendenzgrad hinsichtlich des Primkörpers (Primring) übereinstimmen. Sind die beiden Körper (vollkommenen Grundringe) außerdem algebraisch abgeschlossen, so sind sie auf jeden Fall isomorph[37]).

Um für beliebige spezielle Ringe zu einem analogen Ergebnis zu kommen, legt man einen beliebigen vollkommenen Ring R zugrunde und betrachtet nur vollkommene reguläre Erweiterungen von R. Ist $\bar{R}$ eine solche Erweiterung, so definieren wir als den Transzendenzgrad von $\bar{R}$ hinsichtlich R, den Transzendenzgrad von $\bar{K}$ hinsichtlich K und können dann folgendes Theorem aussprechen:

Zwei algebraisch abgeschlossene reguläre Erweiterungen von R sind dann und nur dann hinsichtlich R äquivalent, wenn sie hinsichtlich R gleichen Transzendenzgrad besitzen.

§ 8.

Die Hilbertschen Basiszahlen bei beliebigen speziellen Ringen.

Wir beginnen damit, den vollkommenen Ring R aus seinem Grundring R^* durch Adjunktion von Nullteilern abzuleiten. Es sei $x_1, x_2, \ldots, x_\tau, \ldots$ eine wohlgeordnete Menge von Nullteilern, derart, daß $R = R^*(x_1, x_2, \ldots, x_\tau, \ldots)$ wird, daß also R aus der Gesamtheit aller Polynome in je endlich vielen der Variablen x_τ mit Koeffizienten aus R^* besteht. Dann müssen ersichtlich alle Potenzprodukte der x_i von einer gewissen Dimension an verschwinden, und wir beweisen genau so wie Satz 10 den

Satz 20. *Man erhält den allgemeinsten vollkommenen Ring R mit dem Grundring R^*, indem man alle Polynome in $x_1, x_2, \ldots, x_\tau, \ldots$ mit Koeffizienten aus R^* bildet und ein Polynomideal $\mathfrak{a}$ gleich Null setzt, das vom Einheitsideal verschieden ist und alle Potenzprodukte der x_τ von einer gewissen Dimension an enthält, im übrigen aber beliebig gewählt werden kann. Die x_τ dürfen eine Menge beliebiger Mächtigkeit bilden.*

Kann man den Ring R aus R^* durch Adjunktion einer endlichen Anzahl von Variablen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ erzeugen, so läßt sich die im zweiten Teil von § 4 entwickelte Theorie, insbesondere Satz 12, ohne wesentliche Modifikation auf R übertragen. Es soll jetzt noch der allgemeinste Fall untersucht werden.

---

[36]) Zur Definition des Transzendenzgrades eines Körpers vgl. St. § 24, S. 299. Der Transzendenzgrad eines Grundringes ist mit dem des zugeordneten Körpers identisch.

[37]) Vgl. St. § 24, Satz 3 S. 299 und Satz 6 S. 301.

Es bedeute R einen ganz beliebigen, vollkommenen oder unvollkommenen Ring, $\mathfrak{a}$ ein beliebiges Ideal aus R. Dann behaupten wir:

Satz 21. *Das Ideal $\mathfrak{a}$ besitzt stets eine endliche oder unendliche Basis von modulo $\mathfrak{a}\cdot\mathfrak{p}^*$ linear unabhängigen Elementen. Eine solche Basis soll „Minimalbasis" heißen. Eine beliebige Basis von $\mathfrak{a}$ ist entweder Minimalbasis, oder es ist ein Element linear durch die übrigen ausdrückbar.*

Es sei $\alpha_1', \alpha_2', \ldots, \alpha_\tau', \ldots$ eine beliebige Basis von $\mathfrak{a}$. Dann behaupten wir: Für jedes τ läßt sich eine Teilmenge $\alpha_1 = \alpha_{\sigma_1}', \alpha_2 = \alpha_{\sigma_2}', \ldots, \alpha_{\tau_1} = \alpha_{\sigma_{\tau_1}}', \ldots$ der Elemente α_i ($i \leqq \tau$ bzw. $i < \tau$) finden, derart, daß die α_i modulo $\mathfrak{a}\cdot\mathfrak{p}^*$ linear unabhängig sind, daß also zwischen je endlich vielen von ihnen modulo $\mathfrak{a}\cdot\mathfrak{p}^*$ keinerlei lineare Relation besteht, und daß ferner jedes der Elemente α_i' ($i \leqq t$ bzw. $i < \tau$) sich modulo $\mathfrak{a}\cdot\mathfrak{p}^*$ linear durch die $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{\tau_1}, \ldots$ ausdrücken läßt. In der Tat, die Behauptung ist für $\tau = 1$ richtig, sie stimmt auch für τ, wenn $\tau - 1$ nicht existiert, und wenn sie dabei für alle $i < \tau$ richtig ist, schließlich folgt aus ihrer Gültigkeit für $\tau - 1$ die Gültigkeit für τ. Die Richtigkeit der letzteren Tatsache erkennt man so: Ist α_τ' modulo $\mathfrak{a}\cdot\mathfrak{p}^*$ linear durch endlich viele α_i' ($i \leqq \tau - 1$ bzw. $i < \tau - 1$) ausdrückbar, so bilden die Elemente $\alpha_{\sigma i}'$ ($i \leqq \tau_1$ bzw. $i < \tau_1$), im andern Falle die Elemente $\alpha_{\sigma i}'$ ($i \leqq \tau_1$ bzw. $i < \tau_1$), α_τ' die zu τ gehörige Menge der gewünschten Art, falls die Gesamtheit der Elemente $\alpha_{\sigma i}'$ ($i \leqq \tau_1$ bzw. $i < \tau_1$) eine zu $\tau - 1$ gehörige Menge darstellt. Es läßt sich also stets aus den α_τ' eine Teilmenge von Elementen α_τ auswählen, die untereinander modulo $\mathfrak{a}\cdot\mathfrak{p}^*$ linear unabhängig sind, und durch endlich viele von denen sich modulo $\mathfrak{a}\cdot\mathfrak{p}^*$ jedes Element α_τ' ausdrücken läßt. Daß unter diesen Umständen die α_τ eine Minimalbasis von $\mathfrak{a}$ bilden, daß ferner allgemein der letzte Teil von Satz 21 richtig ist, erkennt man ohne irgendeine Schwierigkeit wie im Falle der endlichen Ringe durch das Korrektionsgliederverfahren.

Satz 22. *Ist $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\tau, \ldots$ eine Minimalbasis von $\mathfrak{a}$ von insgesamt τ_1 Elementen, $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_\tau, \ldots$ eine solche von τ_2 Elementen*[38]), *und besitzt die Menge der Elemente der ersten Minimalbasis die Mächtigkeit $\aleph_1$*[39]) *die der zweiten Minimalbasis die Mächtigkeit $\aleph_2$, so ist $\aleph_1 = \aleph_2$.*

Wir führen den Beweis von Satz 22 sehr einfach mit Benutzung folgenden Hilfssatzes:

Hilfssatz. *Ist ein Körper K, eine Menge von τ_1 Variablen $x_1, x_2, \ldots, x_\tau, \ldots$ und ein System $l_1(x), l_2(x), \ldots, l_\tau(x), \ldots$ von Linearformen in je endlich*

[38]) Was darunter zu verstehen ist, falls $\tau - 1$ nicht existiert, ist wohl klar.

[39]) $\aleph_1$ ist also gleich der Mächtigkeit der Menge aller Ordinalzahlen, die kleiner oder gleich τ_1 sind.

vielen der Variablen x_τ gegeben, und sind je endlich viele der Linearformen $l_\tau(x)$ linear unabhängig, so bilden die $l_\tau(x)$ eine Menge, deren Mächtigkeit höchstens gleich der Mächtigkeit aller Ordinalzahlen kleiner oder gleich τ_1 ist.

Der Hilfssatz ist evidenterweise richtig, falls τ_1 eine endliche Zahl bedeutet. Ferner folgt aus seiner Richtigkeit für $\tau_1 = \tau$ seine Richtigkeit für $\tau + 1$. Tritt nämlich unter den $l_\sigma(x)$ keine Linearform auf, die die Variable $x_{\tau+1}$ wirklich enthält, so ist die Behauptung trivial. Im andern Fall enthalte etwa $l_1(x)$ die Variable $x_{\tau+1}$ wirklich, und allgemein möge in $l_\sigma(x)$ die Variable $x_{\tau+1}$ mit dem Koeffizienten a_σ behaftet auftreten. Dann bildet die Gesamtheit der Linearformen

$$l_1'(x) = l_1(x),\ l_2'(x) = l_2(x) - \frac{a_2}{a_1} l_1(x),\ \ l_3'(x) = l_3(x) - \frac{a_3}{a_1} l_1(x), \ldots,$$
$$l_\sigma'(x) = l_\sigma(x) - \frac{a_\sigma}{a_1}\, l_1(x), \ldots$$

ein System von offenbar linear unabhängigen Linearformen, das jedenfalls gleiche Mächtigkeit wie das System der $l_\sigma(x)$ besitzt. Andererseits besitzt aber das System der $l_\tau'(x)$ höchstens die Mächtigkeit der Menge aller Ordinalzahlen $\sigma \leqq \tau + 1$. Denn das System der Linearformen $l_2'(x), l_3'(x), \ldots, l_\sigma'(x), \ldots$, auf das sich nach Voraussetzung unser Hilfssatz anwenden läßt, weil diese Linearformen von $x_{\tau+1}$ unabhängig sind, besitzt höchstens die Mächtigkeit der Menge aller Ordinalzahlen $\sigma \leqq \tau$.

Es ist nur noch zu zeigen, daß der Hilfssatz für $\tau_1 = \tau$ richtig ist, falls $\tau - 1$ nicht existiert, und falls seine Gültigkeit für alle $\sigma < \tau$ bereits nachgewiesen ist. Da jede der Linearformen nur endlich viel Variable x_i enthält, so gibt es zu jeder Linearform ein x_σ mit größtem Index, das in der betreffenden Linearform mit einem von Null verschiedenen Koeffizienten auftritt. Daraus folgt, daß die Menge $\mathfrak{M}$ aller Linearformen $l(x)$ die Vereinigungsmenge von τ_1 Mengen $\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2, \ldots, \mathfrak{M}_\sigma, \ldots$ darstellt, wobei $\mathfrak{M}_\sigma$ die Gesamtheit aller derjenigen Linearformen $l(x)$ bedeutet, in denen x_σ das Glied mit höchstem Index ist, das einen von Null verschiedenen Koeffizienten besitzt. Existiert $\sigma - 1$ nicht, so ist $\mathfrak{M}_\sigma$ gleich der Nullmenge zu setzen. Auf die Mengen $\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2, \ldots, \mathfrak{M}_\sigma, \ldots$ $(\sigma < \tau)$ kann man nach Voraussetzung den Hilfssatz anwenden, jede dieser Mengen besitzt daher höchstens die Mächtigkeit $\aleph$, wenn $\aleph$ die Mächtigkeit der Menge aller Ordinalzahlen $\sigma \leqq \tau$ bedeutet. Daraus folgt, daß die Vereinigungsmenge $\mathfrak{M}$ der τ_1 Mengen $\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2, \ldots, \mathfrak{M}_\sigma, \ldots$ höchstens die Mächtigkeit $\aleph^2$ besitzt, und da $\aleph$ seiner Natur nach die Mächtigkeit einer unendlichen Menge bedeutet, so ist $\aleph^2 = \aleph$. Der Hilfssatz ist daher auch im vorliegenden Fall, also, wie aus der transfiniten Induktion folgt, allgemein richtig.

Aus dem nunmehr bewiesenen Hilfssatz ergibt sich sehr leicht die Richtigkeit von Satz 22. Zwischen den Basen $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\sigma, \ldots$ und $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_\sigma, \ldots$ bestehen Transformationsformeln $\alpha_\sigma = l_\sigma(\beta)$, wobei die l_σ Linearformen mit Koeffizienten aus R bedeuten, von denen jede einzelne endlich viele der Variablen $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_\sigma, \ldots$ enthält. Nimmt man die Koeffizienten der Linearformen modulo $\mathfrak{p}^*$, so geht jede Linearform $l_\sigma(\beta)$ in eine Linearform $\bar{l}_\sigma(\beta)$ mit Koeffizienten aus K über, und man erhält auf diese Weise τ_1 linear unabhängige Linearformen $\bar{l}_1(\beta), \bar{l}_2(\beta), \ldots, \bar{l}_\sigma(\beta), \ldots$, weil andernfalls, wie leicht einzusehen, die Elemente $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\sigma, \ldots$ keine Minimalbasis bildeten. Man kann daher auf die τ_1 Linearformen $\bar{l}_1(\beta), \bar{l}_2(\beta), \ldots, \bar{l}_\sigma(\beta), \ldots$ den Hilfssatz anwenden, die Mächtigkeit $\aleph_1$ der Menge dieser Linearformen kann also höchstens gleich $\aleph_2$ sein, es ist mithin $\aleph_1 \leqq \aleph_2$. Ebenso beweist man $\aleph_2 \leqq \aleph_1$, also ist $\aleph_1 = \aleph_2$ gemäß der Behauptung von Satz 22.

Gestützt auf Satz 21 und Satz 22 definieren wir die allgemeinen Hilbertschen Invarianten eines beliebigen Ringideals $\mathfrak{a}$ in folgendem Theorem:

Hauptsatz 2. *Ist $\mathfrak{a}$ ein beliebiges Nullteilerideal aus dem beliebigen speziellen Ringe R, so kann man dem Ideal $\mathfrak{a}$ im ganzen $\varrho - 1$ mit Einschluß der Reihenfolge eindeutig bestimmte Mächtigkeiten $\aleph^{(i)}$ $(i = 0, 1, \ldots, \varrho - 2)$ zuordnen, wobei $\aleph^{(i)}$ dadurch charakterisiert ist, daß jede Minimalbasis von $\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{p}^{*i}$ die Mächtigkeit $\aleph^{(i)}$ besitzt. Die Mächtigkeiten $\aleph^{(i)}$ heißen die Hilbertschen Invarianten von $\mathfrak{a}$. Ist die erste Hilbertsche Invariante von $\mathfrak{p}^*$ eine natürliche Zahl, so sind für jedes Ringideal $\mathfrak{a}$ sämtliche Hilbertsche Invarianten natürliche Zahlen.*

(Eingegangen am 8. 3. 1923.)

Über die Zerlegung von Primgruppen.

Von

Werner Schmeidler in Breslau.

Einleitung.

In der Lehre von den Systemen algebraischer Gleichungen gilt als einfachstes Grundelement das „Primmodulsystem“, kürzer als „Primmodul“, nach einem neueren Vorschlage von E. Noether, dem wir uns anschließen, besser als „Primideal“ (aus Polynomen) bezeichnet; ein solches wird im Falle einer Variablen durch ein im zugrunde gelegten Koeffizientenbereich irreduzibles Polynom erzeugt. Die weitere Zurückführung einer irreduziblen Gleichung einer Variablen auf eine Kette von „einfacheren“ irreduziblen Gleichungen, die Angabe von Kriterien für die Möglichkeit einer derartigen Reduktion usw. ist bekanntlich die Aufgabe der Galoisschen Theorie. Eine analoge Untersuchung für Gleichungssysteme in mehreren Variablen ist bisher nur in dem sozusagen trivialen Sinne vorgenommen worden, daß genügend viele Variable zum Grundbereiche adjungiert und die gegebenen Gleichungen damit auf Gleichungen in einer Variablen, und zwar letzten Endes wieder auf *eine* Gleichung in *einer* Variablen zurückgeführt wurden.

In der vorliegenden Arbeit wird nun zunächst darauf hingewiesen, daß die in früheren Untersuchungen behandelte *Zerlegung der Restgruppe von Polynomidealen*[1]) prinzipiell einen Schritt in der Richtung einer *nichttrivialen Ausdehnung der Galoisschen Aufgabe auf Gleichungssysteme* bedeutet. In der Tat leistet sie die Zurückführung von Gleichungssystemen auf „einfachere“ Gleichungssysteme, und zwar ist der durchgreifende Unterschied gegen die oben als „trivial“ charakterisierte Methode, daß diese

[1]) Vgl. meine Habilitationsschrift: Über die Zerlegung der Gruppe der Restklassen eines endlichen Moduls, Math. Zeitschr. 5 (1919), S. 222–267 (zitiert mit Z), sowie die Arbeit des Herrn Mittelsten Scheid: Die Zerlegung irreduzibler integrabler Gruppen hyperkomplexer Größen in unzerlegbare Faktoren, Math. Zeitschr. 14 (1922), S. 263–328.

einfacheren Gleichungssysteme Ideale *niedrigerer Mannigfaltigkeit* erzeugen als das gegebene, daß also z. B. die Untersuchung einer *Fläche* mit zerlegbarer Restgruppe zurückgeführt wird auf diejenige von *Kurven*, während dies nach der obigen Methode nicht möglich ist. Die Zerlegbarkeit der Restgruppe ist auch bei Primidealen möglich und liefert insbesondere für den Fall einer Variablen, wenn die vorgelegte irreduzible Gleichung eine Normalgleichung ist, die Zerlegung des Körpers der Wurzeln in direkte Faktoren, also eine spezielle in der Galoisschen Theorie behandelte Reduktion, womit der Anschluß an diese Theorie hergestellt ist[2]). — Es wird dann weiter bemerkt, daß überhaupt die Grundbegriffe der Galoisschen Theorie, also vor allem die Galoissche Gruppe selbst, auf den Begriff der *Restgruppe* anstatt auf den engeren des Körpers gestützt werden können. Da die Restgruppe bei Gleichungssystemen mehrerer Variablen unverändert ihre Bedeutung beibehält, während dies für den Körperbegriff nur bei Veränderung des Grundbereichs oder Hinzunahme von idealen Elementen gilt, so scheint mir diese Bemerkung der Erwähnung wert.

Im zweiten Paragraphen wird die Zerlegung der Restgruppe für ein Primideal im algebraisch abgeschlossenen Grundbereich genauer untersucht. Die in den oben zitierten Arbeiten behandelte Eindeutigkeitsfrage wird für eine gewisse Klasse von Primgruppen, nämlich für diejenigen, deren unzerlegbare Faktoren Kurvengruppen sind, während sie selbst beliebige Mannigfaltigkeit haben können, in einem bestimmten Sinne bejahend beantwortet. Die betreffenden Sätze gehören zur affinrationalen Geometrie, die damit in eine enge Verwandtschaft zur Galoisschen Gleichungstheorie tritt.

---

[2]) Nach Fertigstellung der Arbeit bekam ich Kenntnis von einem Korrekturabzuge der Arbeit von E. Noether, Eliminationstheorie und allgemeine Idealtheorie (erschienen in Math. Ann. **90**, S. 229–261), wo in § 3 aus der Restgruppe eines Primideals beliebiger Mannigfaltigkeit durch Quotientenbildung in Steinitzscher Weise ein Restklassenkörper konstruiert wird, der sich mit dem Körper der Nullstellen als isomorph erweist. Führt man diesen Begriff ein, so liefert die Zerlegung der Restgruppe für ein *beliebiges* Primideal die Zerlegung des Nullstellenkörpers in direkte Faktoren, also seine Darstellung als Vereinigungskörper von elementenfremden Teilkörpern. Diese werden insbesondere in dem oben näher betrachteten Falle vom „Transzendenzgrad" 1. — Ich führe dies hier an, um den Anschluß an die bekannteren Begriffe der Körpertheorie herzustellen. An sich ist die Erweiterung der Restgruppe zum Restklassenkörper für die vorliegenden Zwecke überflüssig und nur bei Primidealen überhaupt möglich, während die Restgruppe und ihre Zerlegung bei beliebigen Idealen definiert ist.

§ 1.

Bemerkungen zur Galoisschen Theorie.

Es sei $\mathfrak{M}(x_1, \ldots, x_m)$ ein *Ideal* aus Polynomen in $x_1, \ldots, x_m$ mit Koeffizienten im Körper P,[3]) $\mathfrak{A}$ die Gesamtheit der Restklassen $F(x, \ldots, x_m)$ aller Polynome $F(x_1, \ldots, x_m)$ mod $\mathfrak{M}$, die *Restgruppe* von $\mathfrak{M}$. Wir nennen jedes Ideal $\mathfrak{N}(y_1, \ldots, y_n)$, dessen Restgruppe zu $\mathfrak{A}$ *isomorph* ist, *zu* $\mathfrak{A}$ *gehörig*, und die beiden Ideale $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{N}$ zueinander *äquivalent*. Eine Restgruppe $\mathfrak{A}$ heißt *zerlegbar* in die beiden *Faktoren* $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{C}$, oder das *Produkt* von $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{A} = \mathfrak{B} \times \mathfrak{C}$, wenn es unter den zu ihr gehörigen Idealen ein solches von der Gestalt $\mathfrak{M}(x_1, \ldots, x_m) = (\mathfrak{N}(x_1, \ldots, x_n), \mathfrak{R}(x_{n+1}, \ldots, x_m))$ gibt, wobei $n < m$ ist, und $\mathfrak{N}(x_1, \ldots, x_n)$ als Ideal in den Variablen $x_1, \ldots, x_n$ allein aufgefaßt die Restgruppe $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{R}(x_{n+1}, \ldots, x_m)$ in den Variablen $x_{n+1}, \ldots, x_m$ allein aufgefaßt die Restgruppe $\mathfrak{C}$ besitzt. Daß das Produkt von den speziell gewählten Idealen $\mathfrak{N}$ und $\mathfrak{R}$ unabhängig und nur von $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{C}$ selbst abhängig ist, ist in meiner oben zitierten Arbeit enthalten (man vergleiche insbesondere die dortige Definition VIII und den Satz 21, die beide nur von der Körpereigenschaft des Koeffizientenbereichs Gebrauch machen).

Geht man aus von einem Gleichungssystem in P,

$$F_1(x_1, \ldots, x_m) = 0, \quad \ldots, \quad F_k(x_1, \ldots, x_m) = 0,$$

hat das Ideal $\mathfrak{M} = (F_1, \ldots, F_k)$ eine zerlegbare Restgruppe $\mathfrak{A} = \mathfrak{B} \times \mathfrak{C}$, sind ferner $\mathfrak{N}(y_1, \ldots, y_n)$ und $\mathfrak{R}(z_1, \ldots, z_r)$ zwei zu $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{C}$ gehörige Ideale, und sind endlich die Übergangstransformationen von $\mathfrak{M}$ zu $(\mathfrak{N}, \mathfrak{R})$[4]) bekannt, so ist das gegebene Gleichungssystem zurückgeführt auf die beiden Systeme

$$G_1(y_1, \ldots, y_n) = 0, \quad \ldots, \quad G_l(y_1, \ldots, y_n) = 0$$

und

$$H_1(z_1, \ldots, z_r) = 0, \quad \ldots, \quad H_s(z_1, \ldots, z_r) = 0,$$

deren Mannigfaltigkeiten zusammen nach Z., Satz 26 die Mannigfaltigkeit des gegebenen Systems ergeben und worin $G_1, \ldots, G_l$ eine Basis von $\mathfrak{N}$, $H_1, \ldots, H_s$ eine solche von $\mathfrak{R}$ bedeutet. Eine solche Zurückführung eines Gleichungssystems auf zwei Systeme niedrigerer Mannigfaltigkeit, also einfachere Systeme, ist auch dann im allgemeinen möglich, wenn das gegebene Ideal ein *Primideal* ist. Alsdann ist auch jedes äquivalente Ideal ein

---

[3]) D. h. ein System von Polynomen in P, zu dem neben F_1 und F_2 auch $F_1 + F_2$ und neben F auch AF gehört; hierbei bedeutet A ein beliebiges Polynom in P. — Allgemein bedeuten im folgenden große lateinische Buchstaben Polynome in P.

[4]) Vgl. hierfür den Satz I meiner Arbeit: Über die Singularitäten algebraischer Gebilde, Math. Annalen 81 (1920), S. 223—234 (zitiert mit Sg.).

Primideal und die Restgruppe eine *Primgruppe*, die dadurch ausgezeichnet ist, daß keine zwei von Null verschiedenen Elemente ein verschwindendes Produkt haben.

Insbesondere sei jetzt $m=1$ und $\mathfrak{M}$ Primideal. Dann ist $\mathfrak{M}=(F(x))$ eingliedrig, $F(x)$ irreduzibel in P, $\mathfrak{A}$ endlich und isomorph zum Körper $\mathsf{P}(\alpha)$ einer Wurzel α von $F(x)=0$ (nach einer bekannten Bemerkung von Steinitz). Ist $\mathfrak{A}=\mathfrak{B}\times\mathfrak{C}$ zerlegbar, so ist $\mathsf{P}(\alpha)$ direktes Produkt zweier zu $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{C}$ isomorphen Teilkörper und umgekehrt, $\mathfrak{M}=(F(x))$ äquivalent zu $(\mathfrak{N}(y), \mathfrak{R}(z))$, wobei $\mathfrak{N}=(G(y))$ zu $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{R}=(H(z))$ zu $\mathfrak{C}$ gehört. *Die Zerlegung der Restgruppe geht also bei einer irreduziblen Gleichung einer Variablen einfach über in die Zerlegung des Körpers einer Wurzel in zwei direkte Faktoren und liefert demnach eine Verallgemeinerung hiervon auf beliebige Gleichungssysteme.* Speziell bei einer Normalgleichung ist die Zerlegung gleichbedeutend mit der Zerlegbarkeit des Körpers *aller* Wurzeln, wie sie in der Galoisschen Theorie mit Hilfe der Galoisschen Gruppe festgestellt werden kann.

Um die Bedeutung der Restgruppe für die Galoissche Theorie noch nach einer andern Richtung zu beleuchten, zeigen wir, *daß auch bei einer (nicht notwendig irreduziblen) Gleichung mit lauter einfachen Wurzeln die Galoissche Gruppe durch die Restgruppe eindeutig bestimmt ist.* Sind nämlich $F(x)=0$ und $G(y)=0$ zwei derartige Gleichungen mit den Wurzeln $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ und $\beta_1, \ldots, \beta_n$, und ist $(F(x))$ äquivalent $(G(y))$, so ist $m=n$ und bei passender Anordnung $\mathsf{P}(\alpha_1)=\mathsf{P}(\beta_1), \ldots, \mathsf{P}(\alpha_m)=\mathsf{P}(\beta_m)$. Ist dies gezeigt, so ist auch $\mathsf{P}(\alpha_1, \ldots, \alpha_m)=\mathsf{P}(\beta_1, \ldots, \beta_m)$ und folglich auch die Galoissche Gruppe als Gruppe der Selbstisomorphismen dieses Körpers bei Festhaltung aller Größen aus P dieselbe. Zum Beweise beachten wir, daß die Behauptung $m=n$ sofort aus der Isomorphie der Restgruppen von (F) und (G) folgt, die ja respektive von der Ordnung m bzw. n sind. Ferner liefert Sg. Satz I die Existenz zweier Übergangspolynome $f(x)$ und $g(y)$ in P, so daß für die Restklassen $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$ von x und y mod F und G die Relationen gelten:

$$F(g(\mathfrak{y}))=0, \quad G(f(\mathfrak{x}))=0,$$
$$f(g(\mathfrak{y}))=\mathfrak{y}, \quad g(f(\mathfrak{x}))=\mathfrak{x}.$$

Hiernach ist $F(g(\beta_i))=0$, $G(f(\alpha_i))=0$; also ist $g(\beta_i)$ ein α und $f(\alpha_i)$ ein β. Wegen $f(g(\beta_i))=\beta_i$ sind alle $g(\beta_i)$ voneinander verschieden; also ist bei passender Anordnung $\alpha_i=g(\beta_i)$ und demnach auch $\beta_i=f(\alpha_i)$. Somit ist $\mathsf{P}(\alpha_i)=\mathsf{P}(\beta_i)$.

Ist $F(x)$ nicht nur irreduzibel, sondern auch Normalgleichung, so besitzt die (mit $\mathsf{P}(\alpha_1, \ldots, \alpha_m)$ isomorphe) Restgruppe $\mathfrak{A}$ von (F) m verschiedene Elemente, die je die Restgruppe erzeugen und zum selben Ideal

$\mathfrak{M} = (F)$ gehören; die Restgruppe ist eine „Normalgruppe" (Galoisscher Körper). Umgekehrt genügt jedes erzeugende Element einer Normalgruppe einer Normalgleichung. Die Grundtatsache der Galoisschen Theorie kann dann „invariant" so ausgesprochen werden, *daß zu jeder Restgruppe einer Gleichung mit lauter verschiedenen Wurzeln eindeutig eine Normalgruppe gehört, deren Gruppe der Selbstisomorphismen die Galoissche Gruppe der gegebenen Restgruppe ist.*

§ 2.

Die Zerlegung von Primgruppen bei algebraisch abgeschlossenem Grundbereich.

Es sei jetzt P algebraisch abgeschlossen und $\mathfrak{A}$ eine beliebige Primgruppe, d. h. eine Restgruppe ohne Nullteiler. Dann ist jedes zugehörige Ideal ein Primideal. Für ein solches Ideal $\mathfrak{P}(x_1, \ldots, x_m)$ von der Mannigfaltigkeit d gilt dann als Grundtatsache der Eliminationstheorie:

A. *Durchläuft* $(\alpha_1, \ldots, \alpha_m)$ *alle Nullstellen von* $\mathfrak{P}$ *oder wenigstens eine Menge von Nullstellen von der Mannigfaltigkeit* d, *und ist für alle diese Wertsysteme* $F(\alpha_1, \ldots, \alpha_m) = 0$, *so ist* $F \equiv 0\ (\mathfrak{P})$, *d. h.* $F(\mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{x}_m) = 0$.

Satz 1. *Es sei* $\mathfrak{M}(x_1, \ldots, x_m)$ *ein Ideal,* $\mathfrak{Q}(y_1, \ldots, y_n)$ *ein Primideal von der Mannigfaltigkeit* d. *Ist dann*

$$F(x_1, \ldots, x_m, \beta_1, \ldots, \beta_n) \equiv 0\ (\mathfrak{M})$$

für eine Menge von Nullstellen $(\beta_1, \ldots, \beta_n)$ *von* $\mathfrak{Q}$ *von der Mannigfaltigkeit* d, *so ist*

$$F(x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_n) \equiv 0\ (\mathfrak{M}, \mathfrak{Q})$$

oder

$$F(\mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{x}_m, \mathfrak{y}_1, \ldots, \mathfrak{y}_n) = 0,$$

wenn $\mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{x}_m$ *die Restklassen von* $x_1, \ldots, x_m \bmod \mathfrak{M}$, $\mathfrak{y}_1, \ldots, \mathfrak{y}_n$ *die von* $y_1, \ldots, y_n \bmod \mathfrak{Q}$ *bedeuten.*

Zum Beweise erinnern wir uns daran, daß es eine aus Potenzprodukten $\mathfrak{x}_1^{e_1} \ldots \mathfrak{x}_m^{e_m}$ bestehende lineare Basis von $\mathfrak{M}$ und eine Darstellung

$$(1) \qquad F(\mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{x}_m, y_1, \ldots, y_n) = \sum C_{e_1 \ldots e_m}(y_1, \ldots, y_n)\, \mathfrak{x}_1^{e_1} \ldots \mathfrak{x}_m^{e_m}$$

durch endlich viele dieser Potenzprodukte gibt, wobei $C_{e_1 \ldots e_m}$ Polynome in $y_1, \ldots, y_n$ sind. Nach der Voraussetzung $F(\mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{x}_m, \beta_1, \ldots, \beta_n) = 0$ muß dann wegen der Basiseigenschaft

$$C_{e_1 \ldots e_m}(\beta_1, \ldots, \beta_n) = 0$$

sein für alle Wertsysteme $\beta_1, \ldots, \beta_n$ des Satzes. Dies bedeutet aber wegen A.

$$C_{\varrho_1 \ldots \varrho_m}(\mathfrak{y}_1, \ldots, \mathfrak{y}_n) = 0.$$

Einsetzung in (1) ergibt die Behauptung des Satzes.

Satz 2. *Das Produkt zweier Primgruppen in* P *ist eine Primgruppe in* P.[5])

Es sei $F(x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_n)$ ein Polynom, dessen Restklasse mod $(\mathfrak{P}(x_1, \ldots, x_m), \mathfrak{Q}(y_1, \ldots, y_n))$ ein Teiler der Null ist, und es seien $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{Q}$ Primideale. Dann gibt es ein $G(x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_n)$, so daß

$$F \cdot G \equiv 0 \ (\mathfrak{P}, \mathfrak{Q}).$$

Setzen wir hierin für $y_1, \ldots, y_n$ irgendeine Nullstelle $\beta_1, \ldots, \beta_n$ von $\mathfrak{Q}$ ein, so ist

$$F(x_1, \ldots, x_m, \beta_1, \ldots, \beta_n) \ G(x_1, \ldots, x_m, \beta_1, \ldots, \beta_n) \equiv 0 \ (\mathfrak{P}).$$

Weil $\mathfrak{P}$ ein Primideal ist, so muß einer der beiden Faktoren zu $\mathfrak{P}$ gehören, und zwar muß mindestens eine der beiden Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} F(x_1, \ldots, x_m, \beta_1, \ldots, \beta_n) \equiv 0 \\ G(x_1, \ldots, x_m, \beta_1, \ldots, \beta_n) \equiv 0 \end{aligned}\right. (\mathfrak{P})$$

für eine Menge von Nullstellen $\beta_1, \ldots, \beta_n$ von der Mannigfaltigkeit d von $\mathfrak{Q}$ gelten. Nach Satz 1 ist demnach

$$F(x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_n) \equiv 0 \ \text{oder} \ G(x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_n) \equiv 0 \ (\mathfrak{P}, \mathfrak{Q}).$$

Satz 3. *Jeder Faktor einer Primgruppe ist eine Primgruppe.*

Der Satz gilt für jeden Grundbereich und ist trivial, weil jeder Nullteiler eines Faktors auch Nullteiler des Produktes wäre.

Es sei nun $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}_1 \times \ldots \times \mathfrak{A}_k$ eine Darstellung der Primgruppe $\mathfrak{A}$ durch endlich viele unzerlegbare Primgruppen $\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_k$ (vgl. Satz 3 und Z., Satz 33). Wir bezeichnen ein System von endlich vielen Erzeugenden $\mathfrak{x}_1', \ldots, \mathfrak{x}_1^{(m_1)}$ von $\mathfrak{A}_1$ kurz mit $\mathfrak{x}_1$, analog mit $\mathfrak{x}_2, \ldots, \mathfrak{x}_k$ solche Systeme für $\mathfrak{A}_2, \ldots, \mathfrak{A}_k$. $\mathfrak{P}_1(x_1)$ sei das Primideal aller Relationen der $\mathfrak{x}_1$, α_1 eine Nullstelle von $\mathfrak{P}_1$. Analoge Bedeutung mögen $\mathfrak{P}_2(x_2), \ldots, \mathfrak{P}_k(x_k)$ und $\alpha_2, \ldots, \alpha_k$ haben. Jede Restklasse $\mathfrak{x}$ von $\mathfrak{A}$ ist dann in der Gestalt

$$\mathfrak{x} = F(\mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{x}_k) \tag{2}$$

darstellbar.

Die Haupteigenschaft des algebraisch abgeschlossenen Grundbereichs,

---

[5]) Ohne die Voraussetzung der algebraischen Abgeschlossenheit von P ist dieser Satz falsch. Z. B. ist die Restgruppe $\mathfrak{A}$ von (x^2-2) im Rationalitätsbereich (1) eine Primgruppe, dagegen $(x^2-2, \ y^2-2)$ wegen $x^2-y^2 \equiv 0$ nicht. In der Tat ist weder $x+y$ noch $x-y \equiv 0$.

die wir im folgenden benutzen, ist nun die, daß stets gewisse Größen des Bereiches existieren, die allen Relationen genügen, die zwischen irgendwelchen vorgegebenen Elementen der Restgruppe bestehen. So betrachten wir z. B. die Elemente $\mathfrak{x}_2, \ldots, \mathfrak{x}_k$ und deren Relationen, die in dem Ideal $(\mathfrak{P}_2, \ldots, \mathfrak{P}_k)$ zusammengefaßt sind; alle diese Relationen gelten auch für eine beliebige Nullstelle $(\alpha_2, \ldots, \alpha_k)$ von $(\mathfrak{P}_2, \ldots, \mathfrak{P}_k)$. *Die Größe* $F(\mathfrak{x}_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k)$ *nennen wir alsdann die zu* $(\alpha_2, \ldots, \alpha_k)$ *gehörende* $\mathfrak{A}_1$*-Komponente der Größe* (2). Sie hängt nicht von dem Polynom F, sondern nur von der Restklasse $\mathfrak{x}$ und der Nullstelle $(\alpha_2, \ldots, \alpha_k)$ ab. Analog definieren wir die $\mathfrak{A}_2$-Komponente, ..., die $\mathfrak{A}_k$-Komponente, die neben $\mathfrak{x}$ noch von der Wahl der Nullstelle $(\alpha_1, \alpha_3, \ldots, \alpha_k), \ldots, (\alpha_1, \ldots, \alpha_{k-1})$ abhängt. Diese Definitionen behalten auch dann ihre Gültigkeit, wenn eins der auftretenden Ideale $\mathfrak{P}$ das Nullideal des betreffenden Variablenbereiches ist.

Sind jetzt $\mathfrak{y} = G(\mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{x}_k), \ldots, \mathfrak{z} = H(\mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{x}_k)$ irgendwelche anderen Größen von $\mathfrak{A}$, also $G(\mathfrak{x}_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k), \ldots, H(\mathfrak{x}_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k)$ ihre $\mathfrak{A}_1$-Komponenten in bezug auf $(\alpha_2, \ldots, \alpha_k)$, so ist die $\mathfrak{A}_1$-Komponente von $K(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \ldots, \mathfrak{z})$ in bezug auf dieselbe Nullstelle die Größe

$$K(F(\mathfrak{x}_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k), G(\mathfrak{x}_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k), \ldots, H(\mathfrak{x}_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k))$$

von $\mathfrak{A}_1$. Analoges gilt bezüglich der anderen Komponenten.

Wir nennen eine Größe von $\mathfrak{A}$ *skalar*, wenn sie die Restklasse einer Größe des Grundbereichs ist.

Satz 4. *Hat eine Größe* $\mathfrak{x}$ *von* $\mathfrak{A}$ *in bezug auf jede Nullstelle* $(\alpha_2, \ldots, \alpha_k)$ *von* $(\mathfrak{P}_2, \ldots, \mathfrak{P}_k)$ *skalare* $\mathfrak{A}_1$*-Komponenten, so ist sie zu* $\mathfrak{A}_2 \times \ldots \times \mathfrak{A}_k$ *gehörig, und umgekehrt. Ist insbesondere jede* $\mathfrak{A}_1$*-Komponente einer Größe* $= 0$, *so ist die Größe selbst* $= 0$.

Wir stellen $\mathfrak{x} = F(\mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{x}_k) = \sum\limits_{\lambda} C_\lambda(\mathfrak{x}_2, \ldots, \mathfrak{x}_k) \cdot \mathfrak{u}_\lambda$ durch eine Basis $\mathfrak{u}_\lambda$ $(\mathfrak{u}_0 = 1)$ von $\mathfrak{A}_1$ dar, deren Koeffizienten C_λ Polynome in $\mathfrak{x}_2, \ldots, \mathfrak{x}_k$ sind. Es ist dann nach Voraussetzung $F(\mathfrak{x}_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k)$ stets skalar, also $C_\lambda(\alpha_2, \ldots, \alpha_k)$ stets $= 0$, wenn $\mathfrak{u}_\lambda$ ein Potenzprodukt der $\mathfrak{x}_1$, das von 1 verschieden ist, bedeutet, also für $\lambda > 0$. Nach A. ist dann wegen der Primeigenschaft von $\mathfrak{A}_2 \times \ldots \times \mathfrak{A}_k$ auch $C_\lambda(\mathfrak{x}_2, \ldots, \mathfrak{x}_k) = 0$ für $\lambda > 0$; daher ist

$$\mathfrak{x} = C_0(\mathfrak{x}_2, \ldots, \mathfrak{x}_k),$$

also die Behauptung bewiesen. — Ist speziell auch $C_0(\alpha_2, \ldots, \alpha_k)$ stets $= 0$, so folgt aus demselben Grunde auch $C_0(\mathfrak{x}_2, \ldots, \mathfrak{x}_k) = 0$, d. h.

$$\mathfrak{x} = 0\,.$$

Hiermit ist der Satz gezeigt, da die Umkehrung der ersten Behauptung trivial ist.

Mehrfache Anwendung des Satzes 4 ergibt:

Satz 5. *Hat eine Größe* $\mathfrak{x}$ *von* $\mathfrak{A}$ *in bezug auf alle Nullstellen* $(\alpha_1, \ldots, \alpha_k)$ *skalare* $\mathfrak{A}_1$-, $\mathfrak{A}_2$-, $\ldots$, $\mathfrak{A}_k$-*Komponenten, so ist sie selbst skalar.*

Es seien jetzt die Gruppen $\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_k$ unzerlegbar und außerdem eine zweite Zerlegung $\mathfrak{A} = \mathfrak{B}_1 \times \ldots \times \mathfrak{B}_l$ in unzerlegbare Faktoren $\mathfrak{B}_1, \ldots, \mathfrak{B}_l$ gegeben. Wir bezeichnen ein System von Erzeugenden der Gruppe $\mathfrak{B}_j$ mit $\mathfrak{y}_j$, das zugehörige Primideal mit $\mathfrak{Q}_j$ und eine beliebige seiner Nullstellen mit β_j. Die Übergangssubstitutionen seien gegeben durch

$$\begin{aligned} \mathfrak{x}_i &= g_i(\mathfrak{y}_1, \ldots, \mathfrak{y}_l) \\ \mathfrak{y}_j &= f_j(\mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{x}_k) \end{aligned} \qquad \begin{pmatrix} i = 1, \ldots, k \\ j = 1, \ldots, l \end{pmatrix};$$

die Anzahl der Größen $\mathfrak{x}_1$ sei $m_1, \ldots,$ der Größen $\mathfrak{x}_k$ sei m_k. Analoge Bedeutung haben $n_1, \ldots, n_l$. In diesen Bezeichnungen gilt folgender Satz:

Satz 6. *Es gibt zu jedem* $\mathfrak{A}_i$ $(i = 1, \ldots, k)$ *und zu jeder Nullstelle* $(\alpha_1, \ldots, \alpha_k)$ *von* $(\mathfrak{P}_1, \ldots, \mathfrak{P}_k)$ *ein* $\mathfrak{B}_j$, *so daß die* $\mathfrak{B}_j$-*Komponenten der Größen von* $\mathfrak{A}_i$ *in bezug auf die Nullstelle* $(f_1(\alpha_1, \ldots, \alpha_k), \ldots, f_{j-1}(\alpha_1, \ldots, \alpha_k),$ $f_{j+1}(\alpha_1, \ldots, \alpha_k), \ldots, f_l(\alpha_1, \ldots, \alpha_k))$ *von* $(\mathfrak{Q}_1, \ldots, \mathfrak{Q}_{j-1}, \mathfrak{Q}_{j+1}, \ldots, \mathfrak{Q}_l)$ *nicht sämtlich skalar sind, ja daß sogar die* $\mathfrak{A}_i$-*Komponenten dieser* $\mathfrak{B}_j$-*Komponenten in bezug auf die Nullstelle* $(\alpha_1, \ldots, \alpha_{i-1}, \alpha_{i+1}, \ldots, \alpha_k)$ *von* $(\mathfrak{P}_1, \ldots, \mathfrak{P}_{i-1}, \mathfrak{P}_{i+1}, \ldots, \mathfrak{P}_k)$ *ebenfalls nicht sämtlich skalar sind.*

Für den Beweis genügt die Annahme $i = 1$. Setzen wir $f_j(\alpha_1, \ldots, \alpha_k) = \beta_j$ $(j = 1, \ldots, l)$, so sind die fraglichen $\mathfrak{B}_j$-Komponenten erzeugt durch die Größen

$$(3) \qquad g_1^{(\lambda)}(\beta_1, \ldots, \beta_{j-1}, \mathfrak{y}_j, \beta_{j+1}, \ldots, \beta_l) \qquad (\lambda = 1, \ldots, m_1)$$

von $\mathfrak{B}_j$. Die $\mathfrak{A}_1$-Komponenten dieser Größen (3) in bezug auf $(\alpha_2, \ldots, \alpha_k)$ sind alsdann die Größen

$$(4) \qquad g_1^{(\lambda)}(\beta_1, \ldots, \beta_{j-1}, f_j(\mathfrak{x}_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k), \beta_{j+1}, \ldots, \beta_l) \qquad (\lambda = 1, \ldots, m_1).$$

Wir haben nur zu zeigen, daß diese Größen von $\mathfrak{A}_1$ nicht bei jeder Wahl von j skalar sein können. Vermöge der obigen Substitution sind die Restklassen (4) in der Form

$$(4) \quad F_j^{(\lambda)}(\mathfrak{x}_1; \alpha_1, \ldots, \alpha_k) = g_1^{(\lambda)}(f_1(\alpha_1, \ldots, \alpha_k), \ldots, f_j(\mathfrak{x}_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k), \ldots, f_l(\alpha_1, \ldots, \alpha_k)) \quad (\lambda = 1, \ldots, m_1)$$

darstellbar, und können z. B. durch die Polynome

$$(5) \quad F_j^{(\lambda)}(x_1; \alpha_1, \ldots, \alpha_k) = g_1^{(\lambda)}(f_1(\alpha_1, \ldots, \alpha_k), \ldots, f_j(x_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k), \ldots, f_l(\alpha_1, \ldots, \alpha_k)) \quad (\lambda = 1, \ldots, m_1)$$

erzeugt werden. Wenn die Restklassen (4) sämtlich skalar wären, so wäre

$$F_j^{(\lambda)}(x_1; \alpha_1, \ldots, \alpha_k) = c_j^{(\lambda)}(\alpha_1, \ldots, \alpha_k) + P_{1j}^{(\lambda)}(x_1; \alpha_1, \ldots, \alpha_k) \quad \begin{pmatrix} \lambda = 1, \ldots, m_1 \\ j = 1, \ldots, l \end{pmatrix},$$

wobei $c_j^{(\lambda)}$ eine Größe des Bereiches und $P_{1j}^{(\lambda)} \equiv 0\,(\mathfrak{P}_1)$ wäre. Es wäre dann

$$\frac{\partial F_j^{(\lambda)}}{\partial x_1^{(\mu)}} = \frac{\partial P_{1j}^{(\lambda)}}{\partial x_1^{(\mu)}} \qquad \begin{pmatrix} \lambda, \mu = 1, \ldots, m_1 \\ j = 1, \ldots, l \end{pmatrix}.$$

Durch Summation über j würde dann

$$\sum_{j=1}^{l} \frac{\partial F_j^{(\lambda)}}{\partial x_1^{(\mu)}} = \frac{\partial P_1^{(\lambda)}}{\partial x_1^{(\mu)}} \tag{6}$$

mit $P_1^{(\lambda)} = \sum\limits_{j=1}^{l} P_{1j}^{(\lambda)}$ entstehen.

Andererseits gehen wir aus von der Relation

$$\mathfrak{x}_1 = g_1(f_1, \ldots, f_l)$$

oder ausführlicher geschrieben

$$x_1^{(\lambda)} \equiv g_1^{(\lambda)}(f_1, \ldots, f_l) \quad (\mathfrak{P}_1, \ldots, \mathfrak{P}_k).$$

Hieraus folgt

$$x_1^{(\lambda)} \equiv g_1^{(\lambda)}(f_1(x_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k), \ldots, f_l(x_1, \alpha_2, \ldots \alpha_k)) \quad (\mathfrak{P}_1),$$

oder

$$g_1^{(\lambda)}(f_1(x_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k), \ldots, f_l(x_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k)) = x_1^{(\lambda)} + \overline{P}_1^{(\lambda)} \quad (\lambda = 1, \ldots, m_1)$$

mit $\overline{P}_1^{(\lambda)} \equiv 0\,(\mathfrak{P}_1)$. Daraus folgt durch Differentiation:

$$\sum_{j=1}^{l} \sum_{\varrho=1}^{n_j} \frac{\partial g_1^{(\lambda)}}{\partial f_j^{(\varrho)}} \cdot \frac{\partial f_j^{(\varrho)}}{\partial x_1^{(\mu)}} = \delta_{\lambda\mu} + \frac{\partial \overline{P}_1^{(\lambda)}}{\partial x_1^{(\mu)}} \quad (\lambda, \mu = 1, \ldots, m_1).$$

Setzt man hierin alle $x_1^{(\lambda)} = \alpha_1^{(\lambda)}$, kurz $x_1 = \alpha_1$, so findet man

$$\left(\sum_{j=1}^{l} \sum_{\varrho=1}^{n_j} \frac{\partial g_1^{(\lambda)}}{\partial f_j^{(\varrho)}} \cdot \frac{\partial f_j^{(\varrho)}}{\partial x_1^{(\mu)}}\right)_{x_1=\alpha_1} = \left(\delta_{\lambda\mu} + \frac{\partial \overline{P}_1^{(\lambda)}}{\partial x_1^{(\mu)}}\right)_{x_1=\alpha_1}. \tag{7}$$

Andererseits ist wegen (5)

$$\frac{\partial F_j^{(\lambda)}}{\partial x_1^{(\mu)}} = \sum_{\varrho=1}^{n_j} \frac{\partial g_1^{(\lambda)}}{\partial f_j^{(\varrho)}}(f_1(\alpha_1, \ldots, \alpha_k), \ldots, f_j(x_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k), \ldots, f_l(\alpha_1, \ldots, \alpha_k)) \cdot \frac{\partial f_j^{(\varrho)}}{\partial x_1^{(\mu)}}.$$

Hieraus folgt durch Summation über j:

$$\left(\sum_{j=1}^{l} \frac{\partial F_j^{(\lambda)}}{\partial x_1^{(\mu)}}\right)_{x_1=\alpha_1} = \left(\sum_{j=1}^{l} \sum_{\varrho=1}^{n_j} \frac{\partial g_1^{(\lambda)}}{\partial f_j^{(\varrho)}} \cdot \frac{\partial f_j^{(\varrho)}}{\partial x_1^{(\mu)}}\right)_{x_1=\alpha_1},$$

und dies gibt vermöge (6) und (7)

$$\left(\frac{\partial P_1^{(\lambda)}}{\partial x_1^{(\mu)}}\right)_{x_1=\alpha_1} = \left(\delta_{\lambda\mu} + \frac{\partial \overline{P}_1^{(\lambda)}}{\partial x_1^{(\mu)}}\right)_{x_1=\alpha_1} \quad (\lambda, \mu = 1, \ldots, m_1). \tag{8}$$

Nun ist die Mannigfaltigkeit von $\mathfrak{P}_1$ größer als 0, weil sonst $\mathfrak{P}_1 = 1$ wäre und kein eigentlicher Faktor $\mathfrak{A}_1$ vorliegen würde. Aus (8) folgt aber durch Determinantenbildung

$$1 = |\delta_{\lambda\mu}| = \left|\left(\frac{\partial P_1^{(\lambda)}}{\partial x_1^{(\mu)}} - \frac{\partial \overline{P}_1^{(\lambda)}}{\partial x_1^{(\mu)}}\right)_{x_1=\alpha_1}\right| = \left|\frac{\partial \overline{P}_1^{(\lambda)}}{\partial x_1^{(\mu)}}\right|_{x_1=\alpha_1}$$

Nach Sg. Satz II ist nun die Determinante rechter Hand $= 0$, und damit ist ein Widerspruch gefunden. Dieser Widerspruch löst sich nur, wenn wir annehmen, daß die Restklassen (4) nicht sämtlich skalar sind.

Endlich bedürfen wir zur Formulierung unserer Eindeutigkeitssätze noch des Begriffes der „Homöomorphie" zweier Restgruppen.

Definition. *Zwei Restgruppen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ heißen homöomorph, wenn jede zu einer Untergruppe der andern isomorph ist.*

Die Beziehung der Homöomorphie ist wechselseitig und durchlaufend, d. h. ist $\mathfrak{A}$ zu $\mathfrak{B}$ homöomorph, so ist auch $\mathfrak{B}$ zu $\mathfrak{A}$ homöomorph, und ist $\mathfrak{A}$ zu $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{B}$ zu $\mathfrak{C}$ homöomorph, so auch $\mathfrak{A}$ zu $\mathfrak{C}$. Ferner sind zwei zueinander *iso*morphe Restgruppen natürlich auch homöomorph.

Sind $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ homöomorph und ist eine der beiden Restgruppen endlich, so ist auch die andere endlich und beide Gruppen sind isomorph. Hieraus folgt, daß es (endliche) Gruppen gibt, die nicht zueinander homöomorph sind. Es gibt aber auch unendliche Gruppen, sogar Primgruppen derselben Mannigfaltigkeit, die nicht homöomorph sind; z. B. die Restgruppe von $\mathfrak{M}(x_1, x_2) = x_1 x_2 - 1$ und die von einer Variablen ohne Relationen erzeugte Gruppe; denn die erste enthält nichtskalare „Einheiten", d. h. Teiler der Restklasse 1, z. B. $\mathfrak{x}_1$, während in der zweiten nur skalare Einheiten existieren.

Wir kommen nunmehr zur Formulierung von Eindeutigkeitssätzen.

Satz 7. *Es sei $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}_1 \times \mathfrak{A}_2 \times \ldots \times \mathfrak{A}_k = \mathfrak{B}_1 \times \mathfrak{B}_2 \times \ldots \times \mathfrak{B}_l$ und $\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{B}_l$ seien unzerlegbare Primgruppen der Mannigfaltigkeit* 1. *Dann ist $k = l$ und bei passender Bezeichnung $\mathfrak{A}_1$ homöomorph $\mathfrak{B}_1, \ldots, \mathfrak{A}_k$ homöomorph $\mathfrak{B}_k$.*

Die Anzahlgleichheit $k = l$ folgt ohne weiteres aus Z, Satz 26, wonach sich die Mannigfaltigkeiten der Faktoren bei der Produktbildung einfach addieren. Zum Beweise der zweiten Behauptung gehen wir aus von den Bezeichnungen des Satzes 6 und betrachten irgendeine Nullstelle $(\alpha_1, \ldots, \alpha_k)$ von $(\mathfrak{P}_1, \ldots, \mathfrak{P}_k)$. Es gibt dann nach Satz 6 eine Gruppe $\mathfrak{B}_j$, so daß die $\mathfrak{B}_j$-Komponenten von $\mathfrak{A}_1$ sowie deren $\mathfrak{A}_1$-Komponenten nicht sämtlich skalar sind. Wir ändern die Bezeichnung so ab, daß $j = 1$ wird. Dann sind die $\mathfrak{B}_1$-Komponenten von $\mathfrak{A}_1$ in bezug auf die Nullstelle $\beta_2 = f_2(\alpha_1, \ldots, \alpha_k), \ldots, \beta_l = f_l(\alpha_1, \ldots, \alpha_k)$ von $(\mathfrak{O}_2, \ldots, \mathfrak{O}_l)$ nicht sämt-

lich skalar und erzeugen eine Untergruppe $\mathfrak{B}_1^*$ von $\mathfrak{B}_1$ von der Mannigfaltigkeit 1. Letzteres folgt daraus, daß in $\mathfrak{B}_1^*$ eine nichtskalare Größe $\mathfrak{y} = r(\mathfrak{y}_1)$ existiert, und daß deren sämtliche Potenzen linear unabhängig sind. Bestände nämlich eine Relation

$$R(\mathfrak{y}) = a_0 + a_1\mathfrak{y} + \ldots + a_\lambda \mathfrak{y}^\lambda = 0,$$

so sei dies eine Relation niedrigsten Grades für $\mathfrak{y}$; dann ist $R(r(\beta_1)) = 0$, also nach Umordnung der linken Seite nach Potenzen von $\mathfrak{y} - r(\beta_1)$

$$R(\mathfrak{y}) = b_1(\mathfrak{y} - r(\beta_1)) + \ldots + b_\lambda(\mathfrak{y} - r(\beta_1))^\lambda = 0.$$

Ist nun $\varkappa$ der kleinste Index, für den $b_\varkappa \neq 0$ ist, so muß wegen der Primeigenschaft von $\mathfrak{B}_1$ entweder $(\mathfrak{y} - r(\beta_1)) = 0$ sein oder

$$b_\varkappa + \ldots + b_\lambda(\mathfrak{y} - r(\beta_1))^{\lambda-\varkappa} = 0.$$

Beides ist aber unmöglich. Also hat $\mathfrak{B}_1^*$ die Mannigfaltigkeit $\geqq 1$, daher als Untergruppe von $\mathfrak{B}_1$ die Mannigfaltigkeit 1. Wir behaupten nun weiterhin, daß $\mathfrak{A}_1$ zu $\mathfrak{B}_1^*$ isomorph ist.

Offenbar sind $g_1(\mathfrak{y}_1, \beta_2, \ldots, \beta_l)$ ein System von Erzeugenden von $\mathfrak{B}_1^*$; ist nun $P_1 \equiv 0(\mathfrak{P}_1)$, also $P_1(\mathfrak{x}_1) = 0$, so ist auch $P_1(g_1(\mathfrak{y}_1, \beta_2, \ldots, \beta_l)) = 0$. Ist umgekehrt für irgendein Polynom P_1 der Ausdruck $P_1(g_1(\mathfrak{y}_1, \beta_2, \ldots, \beta_l)) = 0$, und ist $P_1(\mathfrak{x}_1) \neq 0$, so ist $(\mathfrak{P}_1, P_1)$ ein echter Teiler von $\mathfrak{P}_1$, also von der Mannigfaltigkeit 0. A fortiori müßte dann die Gruppe $\mathfrak{B}_1^*$ endlich sein, was nach den obigen Überlegungen nicht der Fall ist. Demnach folgt aus $P_1(g_1(\mathfrak{y}_1, \beta_2, \ldots, \beta_l)) = 0$ auch $P_1(\mathfrak{x}_1) = 0$, also die Isomorphie von $\mathfrak{A}_1$ und $\mathfrak{B}_1^*$.

Umgekehrt sind nun auch die $\mathfrak{A}_1$-Komponenten von $\mathfrak{B}_1$ nicht sämtlich skalar, da dies ja sogar für $\mathfrak{B}_1^*$ gilt. Demnach ist $\mathfrak{B}_1$ einer Untergruppe $\mathfrak{A}_1^*$ von $\mathfrak{A}_1$ isomorph, was man ebenso zeigt, wie die Isomorphie von $\mathfrak{A}_1$ und $\mathfrak{B}_1^*$. Folglich sind $\mathfrak{A}_1$ und $\mathfrak{B}_1$ homöomorph; analog beweist man die Homöomorphie der übrigen Faktoren $\mathfrak{A}_2$ und $\mathfrak{B}_2, \ldots, \mathfrak{A}_k$ und $\mathfrak{B}_k$.

Satz 8. *Unter den Voraussetzungen von Satz 7 sei weiter angenommen, daß keine zwei der Gruppen $\mathfrak{A}$ zueinander homöomorph seien. Dann ist $\mathfrak{A}_1$ isomorph $\mathfrak{B}_1, \ldots, \mathfrak{A}_k$ isomorph $\mathfrak{B}_k$.*

Zunächst ist nach Satz 7 $\mathfrak{A}_1$ homöomorph $\mathfrak{B}_1$, $\mathfrak{A}_2$ homöomorph $\mathfrak{B}_2$. Weil nun $\mathfrak{A}_1$ und $\mathfrak{A}_2$ nicht homöomorph sind, so können auch $\mathfrak{A}_2$ und $\mathfrak{B}_1$ nicht homöomorph sein, da ja die Beziehung der Homöomorphie durchlaufend ist. Demnach können $\mathfrak{A}_2$ und $\mathfrak{B}_1$ nicht in der Beziehung des Satzes 6 zueinander stehen, aus der ja die Homöomorphie ebenso wie oben folgen würde, sondern es müssen *entweder* die $\mathfrak{B}_1$-Komponenten von $\mathfrak{A}_2$ in bezug auf alle Nullstellen von $(\mathfrak{Q}_2, \ldots, \mathfrak{Q}_l)$ sämtlich skalar sein, *oder*, wenn dies für eine bestimmte Nullstelle nicht zutrifft, so müssen

die $\mathfrak{A}_2$-Komponenten der $\mathfrak{B}_1$-Komponenten von $\mathfrak{A}_2$, welch letztere dann also eine Untergruppe $\mathfrak{B}_1^{**}$ von $\mathfrak{B}_1$ bilden, in bezug auf alle Nullstellen von $(\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \ldots, \mathfrak{P}_k)$ sämtlich skalar sein. In der Tat könnte man die Homöomorphie von $\mathfrak{A}_2$ und $\mathfrak{B}_1$ nach der Schlußweise von Satz 7 schon dann folgern, wenn es *irgend*eine Nullstelle von $(\mathfrak{Q}_2, \ldots, \mathfrak{Q}_l)$ und *irgend*eine Nullstelle von $(\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \ldots, \mathfrak{P}_k)$ gäbe, in bezug auf die die $\mathfrak{B}_1$-Komponenten von $\mathfrak{A}_2$ und deren $\mathfrak{A}_2$-Komponenten nicht sämtlich skalar wären.

In dem ersteren der beiden möglichen Fälle ist nun nach Satz 4 die Gruppe $\mathfrak{A}_2$ eine Untergruppe von $\mathfrak{B}_2 \times \ldots \times \mathfrak{B}_k$; im zweiten Falle ist aus demselben Grunde $\mathfrak{B}_1^{**}$ eine Untergruppe von $\mathfrak{A}_1 \times \mathfrak{A}_3 \times \ldots \times \mathfrak{A}_k$. Nun ist jede Größe von $\mathfrak{B}_1$ darstellbar durch die $\mathfrak{B}_1$-Komponenten von $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \ldots, \mathfrak{A}_k$ in bezug auf irgendeine Nullstelle $(\beta_2, \ldots, \beta_l)$; denn sie ist darstellbar durch die Größen dieser Gruppen selbst. Im ersten Falle ist daher $\mathfrak{B}_1$ darstellbar durch die $\mathfrak{B}_1$-Komponenten von $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_3, \ldots, \mathfrak{A}_k$, im zweiten durch die $\mathfrak{B}_1$-Komponenten von $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_3, \ldots, \mathfrak{A}_k$ und durch die Größen von $\mathfrak{B}_1^{**}$. Letztere gehören aber zu $\mathfrak{A}_1 \times \mathfrak{A}_3 \times \ldots \times \mathfrak{A}_k$. *Also ist in jedem Falle $\mathfrak{B}_1$ darstellbar durch die $\mathfrak{B}_1$-Komponenten von* $\mathfrak{A}_1 \times \mathfrak{A}_3 \times \ldots \times \mathfrak{A}_k$; die $\mathfrak{B}_1$-Komponenten von $\mathfrak{A}_2$ spielen für die Darstellung von $\mathfrak{B}_1$ keine Rolle. Genau dasselbe schließen wir nun aber mit demselben Rechte bezüglich der $\mathfrak{B}_1$-Komponenten von $\mathfrak{A}_3, \ldots, \mathfrak{A}_k$ und finden schließlich auf diese Weise, *daß $\mathfrak{B}_1$ darstellbar ist durch die $\mathfrak{B}_1$-Komponenten von $\mathfrak{A}_1$ allein*, deren Gruppe im Beweis des Satzes 7 mit $\mathfrak{B}_1^*$ bezeichnet wurde. Damit ist aber $\mathfrak{B}_1^* = \mathfrak{B}_1$ sowie die Isomorphie von $\mathfrak{A}_1$ und $\mathfrak{B}_1$ bewiesen, weil $\mathfrak{A}_1$ mit $\mathfrak{B}_1^*$ isomorph war. Genau ebenso findet man $\mathfrak{A}_2$ isomorph $\mathfrak{B}_2, \ldots, \mathfrak{A}_k$ isomorph $\mathfrak{B}_k$.

Der Beweis zeigt zugleich, daß auch falls einige der $\mathfrak{A}$, sagen wir $\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_r$, untereinander homöomorph sind, jedenfalls die $\mathfrak{B}_1$-Komponenten von $\mathfrak{A}_{r+1}, \ldots, \mathfrak{A}_k$ bei der Darstellung von $\mathfrak{B}_1$ keine Rolle spielen. Gleiches gilt bezüglich der Darstellung von $\mathfrak{B}_2, \ldots, \mathfrak{B}_r$. In der Darstellung von $\mathfrak{B}_1 \times \ldots \times \mathfrak{B}_r$ durch die $\mathfrak{B}_1 \times \ldots \times \mathfrak{B}_r$-Komponenten von $\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_k$ sind dann die Komponenten von $\mathfrak{A}_{r+1}, \ldots, \mathfrak{A}_k$ entbehrlich, demnach ist die Gruppe der $\mathfrak{B}_1 \times \ldots \times \mathfrak{B}_r$-Komponenten von $\mathfrak{A}_1 \times \ldots \times \mathfrak{A}_r$ schon selbst mit $\mathfrak{B}_1 \times \ldots \times \mathfrak{B}_r$ identisch, also speziell sicher von der Mannigfaltigkeit r. Hieraus folgert man nun aber genau wie im Beweise von Satz 7, daß $\mathfrak{A}_1 \times \ldots \times \mathfrak{A}_r$ zu $\mathfrak{B}_1 \times \ldots \times \mathfrak{B}_r$ isomorph ist. In der Tat sind nach Satz 3 beide Gruppen Primgruppen, und zwischen den Erzeugenden

$$g_1(\mathfrak{y}_1, \ldots, \mathfrak{y}_r, \beta_{r+1}, \ldots, \beta_k), \ldots, g_r(\mathfrak{y}_1, \ldots, \mathfrak{y}_r, \beta_{r+1}, \ldots, \beta_k)$$

von $\mathfrak{B}_1 \times \ldots \times \mathfrak{B}_r$ gelten alle Relationen, die für $\mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{x}_r$ gelten. Ist umgekehrt $P = 0$ eine Relation zwischen den ersteren Größen und $P(\mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{x}_r) \neq 0$, so muß $(\mathfrak{P}_1, \ldots, \mathfrak{P}_r, P)$ als echter Teiler eines Prim-

ideals der Mannigfaltigkeit r von niedrigerer Mannigfaltigkeit sein, was aber auch für $\mathfrak{B}_1 \times \ldots \times \mathfrak{B}_r$ eine niedrigere Mannigfaltigkeit zur Folge hätte. Da dies nicht zutrifft, so muß $P(\mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{x}_r) = 0$ sein, und damit ist die fragliche Isomorphie bewiesen. Durch Fortsetzung dieser Schlußweise zeigt sich, daß folgender Satz gilt:

Satz 9. *Faßt man in jeder von zwei Zerlegungen einer Primgruppe $\mathfrak{A}$ in unzerlegbare Faktoren der Mannigfaltigkeit* 1 *alle die unzerlegbaren Faktoren zusammen, die zueinander homöomorph sind, so entstehen zwei Darstellungen:*

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{C}_1 \times \ldots \times \mathfrak{C}_s = \mathfrak{D}_1 \times \ldots \times \mathfrak{D}_t.$$

In dieser ist $s = t$ und bei passender Bezeichnung

$$\mathfrak{C}_1 \textit{ isomorph } \mathfrak{D}_1, \ldots, \mathfrak{C}_s \textit{ isomorph } \mathfrak{D}_s.$$

Breslau, den 25. Mai 1923.

(Eingegangen am 25. 6. 1923.)

Ein Kriterium für Irreduzibilität ganzer Funktionen in einem beliebigen algebraischen Körper.

Von

M. Sopmann in Charkow (Ukraine).

Wir benutzen die Idee von Furtwängler[1]) zum Beweise der folgenden Verallgemeinerung des Eisensteinschen Satzes, die in einem beliebigen Zahlkörper gilt:

Satz. *Es sei ein Polynom*

$$(*) \qquad f(x) = x^n + \delta(a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots + a_n)$$

gegeben; $\delta, a_1, a_2, \ldots, a_n$ *seien ganze Zahlen eines algebraischen Zahlkörpers* R *und* δ *prim zu* a_n, *d. h.*

$$(**) \qquad (\delta, a_n) = 1.$$

Wenn $f(x)$ *in* R *einen Teiler vom Grade* r *hat, so besteht die Gleichung*:

$$(***) \qquad (\delta^r) = \mathfrak{j}^n,$$

wo $\mathfrak{j}$ *ein Ideal aus* R *bedeutet.*

Beweis. Es mögen $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ die Wurzeln von $f(x)$ bezeichnen. Aus der Gleichung $f(\xi_i) = 0$ folgt nach (*)

$$\xi_i^n = \delta(-a_1 \xi_i^{n-1} - \ldots - a_n)$$

oder

$$(1) \qquad \xi_i^n = \delta k_i,$$

wo k_i eine ganze algebraische Zahl ist, da ξ_i eine solche ist. Ferner bekommen wir aus der Gleichung

$$\xi_1 \cdot \xi_2 \cdot \ldots \cdot \xi_n = \pm \delta a_n$$

nach (1)

$$\delta^n k_1 \cdot k_2 \cdot \ldots \cdot k_n = \pm \delta^n a_n^n$$

oder

$$(2) \qquad k_1 \cdot k_2 \cdot \ldots \cdot k_n = \pm a_n^n.$$

[1]) Math. Annalen 85 (1921), S. 34.

Es sei jetzt $\varphi(x) = x^r + b_1 x^{r-1} + b_2 x^{r-2} + \ldots + b_r$ der Teiler von $f(x)$; $b_1, b_2, \ldots, b_r$ sind ganze Zahlen aus R. $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_r$ seien die Wurzeln von $\varphi(x)$.

Aus der Gleichung

$$\xi_1 \cdot \xi_2 \cdot \ldots \cdot \xi_r = \pm b_r$$

bekommen wir nach (1)

$$\delta^r K = \pm b_r^n, \tag{3}$$

wo $K = k_1 \cdot k_2 \cdot \ldots \cdot k_r$ eine ganze algebraische Zahl ist, die nach (3) offenbar in R liegt. Da nach (2) K ein Teiler von a_n^n ist, so folgt aus (**), daß δ^r prim zu K ist, und die Richtigkeit der Behauptung (***) folgt unmittelbar aus (3) durch die Zerlegung der linken Seite in Primidealfaktoren.

Folgerung 1. Das Polynom $f(x)$ ist irreduzibel in R, wenn (δ) keine Idealpotenz darstellt, deren Exponent ein Teiler von r ist.

Folgerung 2. Ist n eine Primzahl, so ist $f(x)$ in R irreduzibel, wenn (δ) keine n-te Idealpotenz darstellt.

Bemerkung 1. Falls $a_n = 1$ ist, bedeutet $\mathfrak{j}$ in (***) ein Hauptideal. Das folgt aus (3), da K, als ein Teiler von a_n^n, eine Einheit ist.

Bemerkung 2. Die Voraussetzung des Satzes kann folgendermaßen verallgemeinert werden:

Satz. *Es sei ein Polynom*

$$f(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1} x + a_n \delta$$

gegeben; $a_1, a_2, \ldots, a_n, \delta$ *seien ganze Zahlen eines algebraischen Zahlkörpers* R *und* $(a_n, \delta) = 1$. *Ferner sei*

$$a_i^n \equiv 0 \ (\delta^i) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n-1).$$

Wenn $f(x)$ *in* R *einen Teiler vom Grade* r *hat, so besteht die Gleichung*

$$(\delta^r) = \mathfrak{j}^n,$$

wo $\mathfrak{j}$ *ein Ideal aus* R *bedeutet.*

Zum Beweise setzen wir $\xi_i = \sqrt[n]{\delta} \cdot \eta_i$ (ξ_i sind die Wurzeln von $f(x)$). η_i genügt der Gleichung:

$$\eta_i^n + \frac{a_1}{\sqrt[n]{\delta}} \eta_i^{n-1} + \ldots + \frac{a_{n-1}}{\sqrt[n]{\delta^{n-1}}} + a_n = 0,$$

deren Koeffizienten nach der Voraussetzung ganze algebraische Zahlen sind. Daher sind auch η_i und $k_i = \eta_i^n$ aus der Gleichung (1) ganze algebraische Zahlen, und der Beweis endigt sich wie vorher.

(Eingegangen am 8. 8. 1923.)

Über ein Biorthogonalsystem von Polynomen zweier Veränderlichen[1]).

Von

Lothar Koschmieder in Breslau.

Inhalt.

---

[1]) Über den Inhalt dieser Arbeit hat Verf. bei der Jahresversammlung der D. M.-V. zu Leipzig am 20. September 1922 vorgetragen.

Einleitung.

Eine große Anzahl der formalen Beziehungen, die die Legendreschen Polynome

$$P_n(x) = \frac{(-1)^n}{2^n n!} \frac{d^n \mathfrak{p}^n}{dx^n}, \qquad \mathfrak{p} = \mathfrak{p}(x) = 1 - x^2$$

darbieten, finden sich, sinngemäß übertragen, auch bei den allgemeineren Polynomen von Gegenbauer

$$(1) \qquad P_n(x; \alpha) = \frac{(-1)^n}{2^n n!} \frac{\Gamma(\alpha+1)\,\Gamma(2\alpha+n+1)}{\Gamma(2\alpha+1)\,\Gamma(\alpha+n+1)} \mathfrak{p}^{-\alpha} \frac{d^n \mathfrak{p}^{\alpha+n}}{dx^n},$$

wo die reelle Konstante $\alpha > -\frac{1}{2}$ und im übrigen beliebig ist. Andererseits zeigten Hermite[2]) und Didon[3]), daß die Polynome

$$U_{mn}(x, y) = \frac{(-1)^{m+n}}{2^{m+n} m!\, n!} \frac{\partial^{m+n} p^{m+n}}{\partial x^m \partial y^n}, \qquad p = p(x, y) = 1 - x^2 - y^2$$

die Eigenschaften besitzen, die man von solcher Verallgemeinerung der Legendreschen Polynome auf den Fall zweier Veränderlichen erwartet. Daher liegt es nahe, auch die den Gegenbauerschen Polynomen entsprechenden Polynome $m+n$-ten Grades in zwei Veränderlichen

$$(2) \qquad \begin{aligned} P_{mn}(x, y; \alpha) &= c_{mn} p^{-\alpha} \frac{\partial^{m+n} p^{\alpha+m+n}}{\partial x^m \partial y^n}, \\ c_{mn} &= \frac{(-1)^{m+n}}{2^{m+n} m!\, n!} \frac{\Gamma(\alpha+1)\,\Gamma(2\alpha+m+n+1)}{\Gamma(2\alpha+1)\,\Gamma(\alpha+m+n+1)}, \text{[4])} \end{aligned}$$

mit denen sich für ganzzahlige α und in den Fällen $\alpha = \pm\frac{1}{2}$ schon Didon[5]) beschäftigt hat, für *beliebige* $\alpha > -\frac{1}{2}$ in der von Hermite und Didon angegebenen Richtung zu untersuchen[6]). Dies geschieht im folgenden.

---

[2]) Ch. Hermite, Œuvres **2** (1908), S. 309, 313, 319.

[3]) F. Didon, Ann. Éc. Norm. (1) **5** (1868), S. 229–310; (1) **6** (1869), S. 7–26; (1) **7** (1870), S. 247–268. Vgl. den Artikel Généralisations diverses des fonctions sphériques von P. Appell und A. Lambert in Encycl. des sc. math. T. II, vol. 5, fasc. 2, namentlich S. 247 ff.

[4]) Der Grund für diese Art der Normierung wird in § 3 ersichtlich.

[5]) Ann. Éc. Norm. (1) **5**, S. 272–274; S. 274–301.

[6]) Erst nach Fertigstellung dieser Arbeit wurde mir bekannt, daß Untersuchungen von A. Angelesco über die Polynome (2), (3) vorliegen:

I. C. R. Acad. sc. Paris **158** (1914), S. 1770–74. Vgl. [14]).

II. Die Hauptabhandlung Sur les polynomes généralisant les polynomes de Legendre et d'Hermite, Thèse de la Faculté des Sciences de Paris 1916, war mir nicht zugänglich; ich konnte nur die Inhaltsangabe in Bull. sc. math. (2) **40** (1916), S. 257–261 einsehen.

§ 1.

Das Biorthogonalsystem der Polynome P_{mn}, Q_{mn}. Berechnung eines bestimmten Integrals.

Das Gebiet der im folgenden vorkommenden Doppelintegrationen ist, wenn nichts anderes bemerkt wird, die Fläche des Einheitskreises.

Setzt man (vgl. [6]), I)

$$(3)\qquad \Omega = (1 - 2ax - 2by + a^2 + b^2)^{-\alpha-1} = \sum_{m,n}^{0,\infty} a^m b^n Q_{mn},$$

so *bilden die Polynome* P_{mn} *mit den* so erzeugten *Polynomen* $Q_{mn}(x, y; \alpha)$ *ein Biorthogonalsystem in dem Sinne, daß das Integral*

$$(4)\qquad \iint p^\alpha P_{mn} Q_{\mu\nu}\, dx\, dy = 0$$

ist, sofern nur $(m-\mu)^2 + (n-\nu)^2 > 0$.

Was die Systeme der P_{mn} und Q_{mn} allein betrifft, so ist

$$(5)\qquad \begin{aligned} &\iint p^\alpha P_{mn} P_{\mu\nu}\, dx\, dy = 0, \\ &\iint p^\alpha Q_{mn} Q_{\mu\nu}\, dx\, dy = 0, \end{aligned}$$

wenn $m + n \neq \mu + \nu$ ist[7]).

Zum Nachweise der Beziehung (4) genügt es, die Formel

$$(6)\qquad \iint p^\alpha P_{mn} \sum_{\mu,\nu}^{0,\infty} a^\mu b^\nu Q_{\mu\nu}\, dx\, dy = \frac{\pi\, \Gamma(2\alpha + l + 1)}{m!\, n!\, (\alpha + l + 1)\, \Gamma(2\alpha + 1)} a^m b^n$$

herzuleiten, wo fortan zur Abkürzung

$$m + n = l$$

gesetzt ist. Wendet man die für eine willkürliche Funktion $F(x, y)$ mittels fortgesetzter partieller Integration erweisbare Formel

$$(7)\qquad \iint F \frac{\partial^l p^{\alpha+l}}{\partial x^m \partial y^n}\, dx\, dy = (-1)^l \iint p^{\alpha+l} \frac{\partial^l F}{\partial x^m \partial y^n}\, dx\, dy$$

auf die linke Seite $\iint p^\alpha P_{mn} \Omega\, dx\, dy$ von (6) (vgl. (3)) an und setzt $F = \Omega$, so erhält man nach (2)

$$\iint p^\alpha P_{mn} \Omega\, dx\, dy = \frac{a^m b^n}{m!\, n!} \frac{\Gamma(2\alpha + l + 1)}{\Gamma(2\alpha + 1)} \iint \frac{p^{\alpha+l}\, dx\, dy}{(1 - 2ax - 2by + a^2 + b^2)^{\alpha+l+1}}.$$

Das rechtsstehende Integral C, das ich a. a. O. [6]), I nicht ausgerechnet fand, führen wir mittels der orthogonalen Substitution

$$\varrho x = a\xi + b\eta, \qquad \varrho y = b\xi - a\eta, \qquad \varrho = \sqrt{a^2 + b^2}$$

---

[7]) Wir benutzen später (§ 2) nur die erste dieser Formeln, deren Beweis sofort aus (7) folgt.

über in

$$C=\iint\frac{(1-\xi^2-\eta^2)^{\alpha+l}\,d\xi\,d\eta}{(1-2\varrho\xi+\varrho^2)^{\alpha+l+1}}=\int_{-1}^{+1}\frac{dx}{(1-2\varrho x+\varrho^2)^{\alpha+l+1}}\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{+\sqrt{1-x^2}}(1-x^2)^{\alpha+l}\left(1-\frac{y^2}{1-x^2}\right)^{\alpha+l}dy$$

$$=\int_{-1}^{+1}\frac{(1-x^2)^{\alpha+l+\frac12}\,dx}{(1-2\varrho x+\varrho^2)^{\alpha+l+1}}\cdot\int_{-1}^{+1}(1-z^2)^{\alpha+l}\,dz;$$

beim Übergang zur letzten Form ist $y=\sqrt{1-x^2}\,z$, $dy=\sqrt{1-x^2}\,dz$ gesetzt. So ist das Doppelintegral C auf das Produkt $A\cdot B$ zweier einfacher Integrale zurückgeführt, dessen zweiter Faktor vermöge der Eigenschaften der Gammafunktion den Wert hat

$$B=\int_{-1}^{+1}(1-z^2)^{\alpha+l}\,dz=\sqrt{\pi}\,\frac{\Gamma(\alpha+l+1)}{\Gamma(\alpha+l+\frac32)};\tag{8}$$

das als erster Faktor A auftretende Integral aber läßt sich auf Grund seiner Beziehungen zur Theorie der Gegenbauerschen Polynome berechnen[8]).

Mit Hilfe der für irgendeine Funktion $f(x)$ geltenden Formel

$$\int_{-1}^{+1}\mathfrak{p}^{\alpha+l+\frac12}\frac{d^lf}{dx^l}\,dx=(-1)^l\int_{-1}^{+1}f\,\frac{d^l\mathfrak{p}^{\alpha+l+\frac12}}{dx^l}\,dx,$$

die in den Bezeichnungen der Einleitung der Identität (7) im Falle *einer* Veränderlichen entspricht, ergibt sich nämlich

$$A=\frac{1}{2^l\varrho^l}\,\frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha+l+1)}\int_{-1}^{+1}\mathfrak{p}^{\alpha+l+\frac12}\,\frac{d^l}{dx^l}[(1-2\varrho x+\varrho^2)^{-\alpha-1}]\,dx$$

$$=\frac{l!}{\varrho^l}\,\frac{2^{2\alpha+1}}{\sqrt{\pi}}\,\frac{\Gamma(\alpha+1)^2\,\Gamma(\alpha+l+\frac32)}{\Gamma(\alpha+l+1)\,\Gamma(2\alpha+l+2)}\int_{-1}^{+1}\frac{\mathfrak{p}^{\alpha+\frac12}P_l(x;\alpha+\frac12)\,dx}{(1-2\varrho x+\varrho^2)^{\alpha+1}}\ ^{9})$$

mit Rücksicht auf den aus (1) zu entnehmenden Ausdruck des l-ten zum Parameterwerte $\alpha+\frac12$ gehörigen Gegenbauerschen Polynoms. Nun ist

$$(1-2\varrho x+\varrho^2)^{-\alpha-1}=\sum_k^{0,\infty}\varrho^kP_k(x;\alpha+\tfrac12)$$

die Erzeugende dieser Polynome, folglich hat das letzte Integral den Wert

$$\int_{-1}^{+1}\mathfrak{p}^{\alpha+\frac12}P_l\sum_k^{0,\infty}\varrho^kP_k\,dx=\varrho^l\int_{-1}^{+1}\mathfrak{p}^{\alpha+\frac12}P_l(x;\alpha+\tfrac12)^2\,dx$$

---

[8]) Zum entsprechenden Zusammenhang bei den Kugelfunktionen vgl. Didon, Ann. Éc. Norm. (1) 5, S. 262–263.

[9]) Ich schreibe kurz $\Gamma(z)^2=(\Gamma(z))^2$ usw.

wegen der Orthogonalität der Gegenbauerschen Polynome[10]). Da in deren Theorie als Wert des rechts auftretenden „Normierungsintegrales“ $\pi\Gamma(2\alpha+l+2)/l!\,2^{2\alpha+1}(\alpha+l+1)\Gamma(\alpha+1)^2$ gefunden wird[11]), *erhält man das* wegen der Willkürlichkeit von α *für sich beachtenswerte bestimmte Integral*

$$(9)\qquad A=\int_{-1}^{+1}\frac{(1-x^2)^{\alpha+l+\frac{1}{2}}\,dx}{(1-2\varrho x+\varrho^2)^{\alpha+l+1}}=\sqrt{\pi}\,\frac{\Gamma(\alpha+l+\frac{3}{2})}{\Gamma(\alpha+l+2)}.$$

Die Einsetzung der Ergebnisse (8) und (9) in $C=AB$ liefert die Behauptung (6).

Aus (4) und (6) folgt

$$(10)\qquad \iint p^\alpha P_{mn}Q_{mn}\,dx\,dy=\frac{\pi\Gamma(2\alpha+l+1)}{m!\,n!\,(\alpha+l+1)\Gamma(2\alpha+1)},$$

und (4) und (10) geben zur Entwicklung einer willkürlichen Funktion etwa nach den Q_{mn} Anlaß in der Form

$$(11)\qquad \begin{aligned} F(x,y)&=\sum_{m,n}^{0,\infty}A_{mn}Q_{mn},\\ A_{mn}&=\frac{m!\,n!\,(\alpha+l+1)\Gamma(2\alpha+1)}{\pi\Gamma(2\alpha+l+1)}\iint p^\alpha F P_{mn}\,dx\,dy;\end{aligned}$$

nach (2) und (7) läßt A_{mn} sich schreiben

$$(11a)\qquad A_{mn}=\frac{(\alpha+l+1)\Gamma(\alpha+1)}{2^l\pi\Gamma(\alpha+l+1)}\iint p^{\alpha+l}\frac{\partial^l F}{\partial x^m\,\partial y^n}\,dx\,dy.$$

§ 2.

Herstellung der Q_{mn} aus den P_{mn}.

Die ersten P_{mn} sind nach (2)

$$P_{00}=1,\quad P_{10}=(2\alpha+1)x,$$

$$P_{20}=\frac{2\alpha+1}{2}[(2\alpha+3)x^2+y^2-1],\quad P_{11}=(2\alpha+1)(2\alpha+2)xy,$$

$$P_{30}=\frac{1}{6}(2\alpha+1)(2\alpha+3)[(2\alpha+5)x^3+3xy^2-3x],$$

$$P_{21}=\frac{1}{2}(2\alpha+1)(2\alpha+3)[(2\alpha+3)x^2y+y^3-y],$$

$$P_{nm}(x,y)=P_{mn}(y,x);$$

---

[10]) Vgl. z. B. des Verf. Habilitationsschrift: Untersuchungen über Jacobische Polynome, Breslau 1919, S. 1.

[11]) Ebenda S. 13 (1). Zwischen unserem P_l und dem dort benutzten T_l besteht der Zusammenhang $P_l\left(x;\alpha+\frac{1}{2}\right)=\frac{2^l\Gamma(\alpha+l+1)}{l!\,\Gamma(\alpha+1)}T_l\left(x;\alpha+\frac{1}{2}\right)$.

die ersten Q_{mn}, wie man durch wirkliche Entwicklung des Ausdrucks Ω nach (3) erhält,

$$Q_{00}=1\,,\quad Q_{10}=2(\alpha+1)x\,,$$
$$Q_{20}=(\alpha+1)[2(\alpha+2)x^2-1],\qquad Q_{11}=4(\alpha+1)(\alpha+2)xy,$$
$$Q_{30}=\frac{2}{3}(\alpha+1)(\alpha+2)[2(\alpha+3)x^3-3x],$$
$$Q_{21}=2(\alpha+1)(\alpha+2)[2(\alpha+3)x^2y-y],$$
$$Q_{nm}(x,y)=Q_{mn}(y,x).$$

In Q_{mn} ist, wie (3) zeigt, $x^m y^n$ bis auf einen konstanten Faktor das einzige Glied vom Grade l.

Didon[12]) hat ein Verfahren angegeben, die Hermiteschen Polynome $V_{mn}=Q_{mn}(x,y;0)$ aus den ihnen zugeordneten $U_{mn}=P_{mn}(x,y;0)$ zu gewinnen; man kann, wie wir jetzt zeigen werden, auf dem gleichen Wege die allgemeineren Polynome $Q_{mn}(x,y;\alpha)$ aus den $P_{mn}(x,y;\alpha)$ berechnen.

Auf der rechten Seite jeder der $l+1$ Gleichungen, die die $l+1$ Größen $P_{mn}(x,y;\alpha)$ als Polynome in x und y darstellen, unterdrücken wir alle Glieder von niedrigerem als l-tem Gesamtgrade in x und y und bezeichnen die so aus den P_{mn} entstehenden Größen mit p_{mn}. Durch Auflösung des so erklärten Gleichungssystems nach den $l+1$ Größen $x^k y^{l-k}$, $k=0,1,2,\ldots,l$ erhält man für jede von ihnen eine lineare Verbindung der p_{mn},

$$x^k y^{l-k}=\delta_{l,0}p_{l,0}+\delta_{l-1,1}p_{l-1,1}+\ldots+\delta_{0,l}p_{0,l}.$$

Es wird behauptet, daß *die rechte Seite bis auf einen konstanten Faktor das Polynom $Q_{k,l-k}$ liefert, wenn man die p_{mn} wieder durch die P_{mn} ersetzt.*

Zum Beweise zeigen wir, daß die Entwicklung des fraglichen Ausdrucks nach den $Q_{\mu\nu}$,

$$\sum_{m+n=l}\delta_{mn}P_{mn}=\sum A_{\mu\nu}Q_{\mu\nu},$$

auf ein einziges Glied $A_{k,l-k}Q_{k,l-k}$ zusammenschrumpft. Der nach (11) gebildete Koeffizient $A_{\mu\nu}$ verschwindet nämlich auf Grund von (5), wenn die Größe $\mu+\nu=\lambda$ von l verschieden ist. Im Falle $\lambda=l$ benutzen wir (11a): da $\Sigma\delta_{mn}p_{mn}$ und daher auch $\Sigma\delta_{mn}P_{mn}$ als einziges Glied l-ten Grades den Ausdruck $x^k y^{l-k}$ enthält, ist die in (11a) unter dem Integralzeichen auftretende Teilableitung nur dann von Null verschieden, wenn

[12]) Ann. Éc. Norm. (1) 5, S. 233–235. Vgl. auch die Bemerkung über entsprechende Entwicklungen im Falle $\alpha=-\frac{1}{2}$ ebenda S. 291.

$\mu = k$, $\nu = l - k$ ist; sie hat dann den Wert $k!\,(l-k)!$. Also ist in der Tat

$$\sum_{m+n=l} \delta_{mn} P_{mn} = A_{k,\,l-k}\, Q_{k,\,l-k};$$

durch Ausrechnung des Doppelintegrals (11a) in Polarkoordinaten r, θ findet man

$$A_{k,\,l-k} = \frac{k!\,(l-k)!\,(\alpha+l+1)\,\Gamma(\alpha+1)}{2^l \pi\, \Gamma(\alpha+l+1)} \int\limits_0^{2\pi} d\theta \int\limits_0^1 (1-r^2)^{\alpha+l}\, r\, dr$$

$$= \frac{k!\,(l-k)!\,\Gamma(\alpha+1)}{2^l\, \Gamma(\alpha+l+1)}.$$

Beispiel: Aus den eingangs angegebenen Ausdrücken P_{mn}, $l = 3$ findet man z. B.

$$x^3 = \frac{3}{2(\alpha+1)(\alpha+3)(2\alpha+1)} p_{30} - \frac{3}{2(\alpha+1)(\alpha+3)(2\alpha+1)(2\alpha+3)} p_{12},$$

und wirklich gilt

$$\frac{3}{2(\alpha+1)(\alpha+3)(2\alpha+1)} P_{30} - \frac{3}{2(\alpha+1)(\alpha+3)(2\alpha+1)(2\alpha+3)} P_{12}$$

$$= x^3 - \frac{3}{2(\alpha+3)} x = \frac{3!\,\Gamma(\alpha+1)}{2^3\, \Gamma(\alpha+4)} Q_{30}.$$

§ 3.

Die Erzeugende der Polynome P_{mn}.

Um auch für die P_{mn} eine Erzeugende anzugeben, gehen wir von der Erzeugenden der Gegenbauerschen Polynome *einer* Veränderlichen[13])

$$(1 - 2wz + w^2)^{-(\alpha+\frac{1}{2})} = \sum_l^{0,\infty} w^l P_l(z;\alpha)$$

aus. Setzt man in ihr, um statt *eines* Parameters z deren *zwei* ξ, η einzuführen,

$$z = \frac{\xi}{\sqrt{1-\eta^2}}, \qquad dz = \frac{d\xi}{\sqrt{1-\eta^2}}, \qquad w = \varrho\sqrt{1-\eta^2}$$

und schreibt rechts für P_l seinen Ausdruck (1), so ergibt sich

$$(12)\quad [1 - 2\varrho\xi + \varrho^2(1-\eta^2)]^{-(\alpha+\frac{1}{2})} = \sum_l^{0,\infty} \varrho^l c_l\, p(\xi,\eta)^{-\alpha} \frac{d^l p(\xi,\eta)^{\alpha+l}}{d\xi^l}.$$

[13]) Ich benutze dabei einen Gedanken, der in einer Arbeit von G. A. Orlov (Nouv. Ann. Math. (2) 20 (1881), S. 481—489) über ein *Orthogonal*system von Polynomen zweier Veränderlichen vorkommt. Die mir nachträglich bekannt gewordene Herleitung der Erzeugungsformel von Angelesco (a. a. O. [6]), I) beruht auf einem andern Grundgedanken und ist wohl weniger unmittelbar als die meinige, die ferner in § 4 in einfacher Weise eine Beziehung der $P_{mn}(x, y; \alpha)$ zu den Gegenbauerschen Polynomen P_l *einer* Veränderlichen liefert.

Bis hierher folgen wir Orlov[13]); jetzt setzen wir

$$\xi = x\cos\gamma + y\sin\gamma, \qquad \eta = -x\sin\gamma + y\cos\gamma,$$

$$\varrho\cos\gamma = a, \qquad \varrho\sin\gamma = b,$$

$$\frac{d}{d\xi} = \cos\gamma\frac{\partial}{\partial x} + \sin\gamma\frac{\partial}{\partial y}, \qquad \frac{d^l}{d\xi^l} = \sum_{m+n=l}\frac{l!}{m!\,n!}\cos\gamma^m\sin\gamma^n\frac{\partial^l}{\partial x^m\,\partial y^n}$$

und erhalten aus (12), wenn

$$(1-\varrho\xi)^2 + \varrho^2(1-\xi^2-\eta^2) = (1-ax-by)^2 + (a^2+b^2)(1-x^2-y^2)$$

$$= \Psi^{-\frac{2}{2\alpha+1}}$$

gesetzt wird,

$$\Psi = \sum_{m,n}^{0,\infty} a^m b^n c_{mn}\, p(x,y)^{-\alpha}\,\frac{\partial^l p(x,y)^{\alpha+l}}{\partial x^m\,\partial y^n}.$$

Dies ist nach (2) *die gesuchte Erzeugungsformel der* P_{mn},

$$\Psi = [(1-ax-by)^2 + (a^2+b^2)(1-x^2-y^2)]^{-\alpha-\frac{1}{2}}$$

$$(13) \qquad = \sum_{m,n}^{0,\infty} a^m b^n P_{mn}(x,y;\alpha).$$

Eine so einfache Formel kommt nur zustande, wenn wir gemäß der eben durchgeführten Rechnung dem konstanten Faktor des Polynoms P_{mn} den Wert (2) erteilen[4]); setzt man nach Didon[14]) $c_{mn} = (-1)^{l-1}/2^l m!\,n!$ und benutzt nach seinem Vorschlage zur Bestimmung der Erzeugenden die Formel von Lagrange, so ergibt sich für diese der weitläufige Ausdruck

$$\frac{1}{\sqrt{(1-ax-by)^2+(a^2+b^2)p}}\;\frac{2^\alpha}{\left[1+\sqrt{a^2+b^2-(bx-ay)^2}-\sqrt{(1-ax-by)^2+(a^2+b^2)p}\right]^\alpha}$$

$$\times\frac{2^\alpha}{\left[1-\sqrt{a^2+b^2-(bx-ay)^2}-\sqrt{(1-ax-by)^2+(a^2+b^2)p}\right]^\alpha}.\;{}^{15})$$

§ 4.

Zusammenhang der $P_{mn}(x, y; \alpha)$ mit den Gegenbauerschen Polynomen *einer* Veränderlichen.

Aus der Zusammenfassung der Formeln des § 3

$$(1-2wz+z^2)^{-(\alpha+\frac{1}{2})} = \sum_l^{0,\infty} w^l P_l\left(\frac{\xi}{\sqrt{1-\eta^2}};\alpha\right) = \sum_{m,n}^{0,\infty} a^m b^n P_{mn}(x,y;\alpha)$$

$$= \sum_{m,n}^{0,\infty}\varrho^{m+n}\cos\gamma^m\sin\gamma^n P_{mn} = \sum_l^{0,\infty}\frac{w^l}{(1-\eta^2)^{\frac{l}{2}}}\sum_{m+n=l}\cos\gamma^m\sin\gamma^n P_{mn}$$

---

[14]) Ann. Éc. Norm. 5, S. 272.

[15]) Zu derselben Erscheinung einer einfachen und einer verwickelten Erzeugenden der Gegenbauerschen Polynome vgl. Orlov [13]), S. 485.

folgt nämlich durch Vergleichung der Koeffizienten von w^l

$$(1-\eta^2)^{\frac{l}{2}} P_l\left(\frac{\xi}{\sqrt{1-\eta^2}}; \alpha\right)$$

$$= [1-(x\sin\gamma - y\cos\gamma)^2]^{\frac{l}{2}} P_l\left[\frac{x\cos\gamma + y\sin\gamma}{\sqrt{1-(x\sin\gamma-y\cos\gamma)^2}}; \alpha\right]$$

$$= \sum_{m+n=l} \cos\gamma^m \sin\gamma^n P_{mn}(x, y; \alpha)$$

oder in Polarkoordinaten

$$\begin{aligned} x &= r\cos\theta, & a &= \varrho\cos\gamma, & \xi &= r\cos(\theta-\gamma), \\ y &= r\sin\theta, & b &= \varrho\sin\gamma, & \eta &= r\sin(\theta-\gamma) \end{aligned}$$

$$(14)\qquad \begin{aligned} &[1-r^2\sin(\theta-\gamma)^2]^{\frac{l}{2}} P_l\left[\frac{r\cos(\theta-\gamma)}{\sqrt{1-r^2\sin(\theta-\gamma)^2}}; \alpha\right] \\ &= \sum_{m+n=l} \cos\gamma^m \sin\gamma^n P_{mn}(x, y; \alpha). \end{aligned}$$

Dies ist die schon erwähnte[13]) *Beziehung zwischen den Polynomen* (1) *und* (2), die sich aus unserer Herleitung der Erzeugungsformel in § 3 zwanglos ergibt.

Den entsprechenden Zusammenhang zwischen den Hermiteschen und den Legendreschen Polynomen hat auf anderem Wege Appell[16]) hergeleitet; wir übertragen jetzt seine weiteren daran anknüpfenden Entwicklungen für $\alpha = 0$ auf den Fall eines beliebigen α.

Wie die U_{mn}, so *lassen sich* auch *die Polynome P_{mn} gleichen Gesamtgrades l aus einem von ihnen gewinnen.*

Ersetzt man nämlich in der aus (14) für $\gamma = 0$ hervorgehenden Formel

$$(1-r^2\sin\theta^2)^{\frac{l}{2}} P_l\left(\frac{r\cos\theta}{\sqrt{1-r^2\sin\theta^2}}; \alpha\right) = (1-y^2)^{\frac{l}{2}} P_l\left(\frac{x}{\sqrt{1-y^2}}; \alpha\right) = P_{l0}(x, y; \alpha)$$

x, y durch $x\cos\gamma + y\sin\gamma$, $-x\sin\gamma + y\cos\gamma$, d. h. θ durch $\theta - \gamma$, so folgt

$$(15)\qquad P_{l0}(x\cos\gamma + y\sin\gamma, -x\sin\gamma + y\cos\gamma; \alpha) = \sum_{m+n=l} \cos\gamma^m \sin\gamma^n P_{mn}(x, y; \alpha).$$

Schreibt man also die linke Seite als ein homogenes Polynom in $\cos\gamma$ und $\sin\gamma$ vom Grade l, so ist P_{mn} der Faktor von $\cos\gamma^m \sin\gamma^n$.

Was die Polynome $Q_{mn}(x, y; \alpha)$ betrifft, so erhält man aus der Formel (3) in der Form

$$[1-2\varrho r\cos(\theta-\gamma)+\varrho^2]^{-\alpha-1} = \sum_l^{0,\infty} \varrho^l \sum_{m+n=l} \cos\gamma^m \sin\gamma^n Q_{mn}(x, y; \alpha)$$

[16]) Annaes da academia polytecnica do Porto 5 (1910), S. 65–68.

und der Erzeugungsformel der Gegenbauerschen Polynome mit dem Parameter $\alpha+\frac{1}{2}$

$$[1-2\varrho r\cos(\theta-\gamma)+\varrho^2]^{-\alpha-1}=\sum_l^{0,\infty}\varrho^l P_l\left[r\cos(\theta-\gamma);\,\alpha+\frac{1}{2}\right]$$

durch Vergleich der Koeffizienten gleich hoher Potenzen von ϱ die der Beziehung (14) entsprechende

$$(16)\qquad P_l\left[r\cos(\theta-\gamma);\,\alpha+\frac{1}{2}\right]=\sum_{m+n=l}\cos\gamma^m\sin\gamma^n\, Q_{mn}(x,\,y;\,\alpha).$$

Ferner gilt die der Gleichung (15) entsprechende und wie diese zu beweisende Formel

$$(17)\quad Q_{l0}(x\cos\gamma+y\sin\gamma,\;-x\sin\gamma+y\cos\gamma;\,\alpha)=\sum_{m+n=l}\cos\gamma^m\sin\gamma^n\, Q_{mn}(x,\,y;$$

die alle Polynome Q_{mn} gleichen Grades l aus einem von ihnen zu finden gestattet.

§ 5.

Über die Form der Polynome P_{mn} und eine Eigenschaft der Kurve $P_{mn}=0$.

Die folgenden Ergebnisse, die denen von Hermite für die Polynome U_{mn}[17]) entsprechen, kommen zustande, indem man in (13) die Gesamtheit der in a und b homogenen Glieder l-ter Ordnung beiderseits gleichsetzt.

Um diese links zu erhalten, bringt man die Erzeugende (13) durch die Substitution $(1-ax-by)^{-1}=u$ in die Form

$$\Psi=u^{2\alpha+1}[1-(a^2+b^2)(x^2+y^2-1)u^2]^{-\alpha-\frac{1}{2}}$$

$$=\frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(2\alpha+1)}\sum_h^{0,\infty}\frac{1}{2^{2h-1}h!}\frac{\Gamma(2\alpha+2h)}{\Gamma(\alpha+h)}(a^2+b^2)^h(x^2+y^2-1)^h u^{2\alpha+2h+1}.$$

Da sich die Potenzen von u leicht durch Potenzreihen in $z=ax+by$ ausdrücken,

$$u^{2\alpha+2h+1}=(1-z)^{-2\alpha-2h-1}=\frac{1}{\Gamma(2\alpha+2h+1)}\sum_k^{0,\infty}\frac{\Gamma(2\alpha+2h+k+1)}{k!}z^k,$$

ist

$$\Psi=\frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(2\alpha+1)}\sum_h^{0,\infty}\frac{(a^2+b^2)^h(x^2+y^2-1)^h}{2^{2h}h!\,\Gamma(\alpha+h+1)}\sum_k^{0,\infty}\frac{\Gamma(2\alpha+2h+k+1)}{k!}z^k.$$

Die eingangs erwähnte Gleichsetzung liefert also

$$a^l P_{l,0}+a^{l-1}b\,P_{l-1,1}+\ldots+ab^{l-1}P_{1,l-1}+b^l P_{0,l}$$

$$=\frac{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(2\alpha+l+1)}{\Gamma(2\alpha+1)}\sum_h^{0,\lambda}\frac{(x^2+y^2-1)^h}{2^{2h}h!(l-2h)!\,\Gamma(\alpha+h+1)}(a^2+b^2)^h(ax+by)^{l-2h},$$

[17]) A. a. O. [2]), S. 332–334.

wo $\lambda = \frac{l}{2}$ bzw. $\frac{l-1}{2}$ zu setzen ist, je nachdem ob l gerade oder ungerade ist.

Hieraus folgt erstens, daß außerhalb des Einheitskreises ($p < 0$) sämtliche Polynome $P_{l0}, \ldots, P_{0l}$ bei positiven Werten der Koordinaten positiv sind; zweitens, daß, *je nachdem ob*

$$m \equiv 0, \quad n \equiv 0; \quad m \equiv 1, \quad n \equiv 0; \quad m \equiv 0, \quad n \equiv 1; \quad m \equiv 1, \quad n \equiv 1$$

(mod. 2) *ist, das Polynom* P_{mn} *die Form*

$$\Phi_{00}(x^2, y^2); \quad x\Phi_{10}(x^2, y^2); \quad y\Phi_{01}(x^2, y^2); \quad xy\Phi_{11}(x^2, y^2)$$

hat, wo $\Phi_{00}, \ldots, \Phi_{11}$ *Polynome sind.*

Denn z. B. im ersten Falle sind ja bei der Bildung von P_{mn} jedem Faktor $(ax + by)^{l-2h}$ nur Produkte zweier *gerader* Potenzen von a und b und daher auch von x und y zu entnehmen.

Auf Grund dieser Form der P_{mn} aber ergänzt sich die Bemerkung über ihr Vorzeichen dahin, daß P_{mn} bis auf Faktoren x, y außerhalb des Einheitskreises stets positiv ist: *Die Kurve* $P_{mn}(x, y; \alpha) = 0$ *verläuft, von einem Faktor* $x = 0$ *oder* $y = 0$ *abgesehen, ganz im Innern des Einheitskreises.*

§ 6.

Das Integral $\int_0^{2\pi} P_{2p,2q}\, d\Theta$ als Jacobisches Polynom[17a]).

In $P_{mn}(x, y; \alpha)$ werde $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ gesetzt und das Integral $\int_0^{2\pi} P_{mn}\, d\theta$ gebildet. Wie sich aus der in § 5 angegebenen Form der Polynome P_{mn} sofort ergibt, verschwindet dieses Integral, wofern auch nur eine der Zahlen m, n ungerade ist. Von dem Integrale $\int_0^{2\pi} P_{2p,2q}\, d\theta$ zeigen wir jetzt, daß es ein *Jacobisches Polynom*[18]) $p + q = k$-ten Grades in $r^2 = s$ ist, daß nämlich die Gleichung besteht

$$\int_0^{2\pi} P_{2p,2q}\, d\theta = \Pi_{pq}(s) = c_{pq}(1+s)^{-\alpha} \frac{d^k}{ds^k}[s^k(1-s)^{\alpha+k}], \tag{18}$$

$$c_{pq} = \frac{2\pi}{p!\, q!} \frac{(-1)^k \Gamma(\alpha+1)\Gamma(2\alpha+2k)}{2^{2k-1} k!\, \Gamma(\alpha+k)\Gamma(2\alpha+1)}. \tag{18a}$$

Die den Entwicklungen des § 6 entsprechenden für $\alpha = 0$, die eine Beziehung zwischen den *Integralen* der Hermiteschen Polynome und den Legendreschen Polynomen liefern, rühren von Appell[19]) her.

[17a]) Eine Verwechslung der in § 6 als *Zeiger* benutzten Buchstaben p, q mit den sonst verwendeten *Funktions*zeichen p, q kommt nicht in Frage.

[18]) Jacobi, Journal f. d. reine u. angew. Math. 56 (1859), S. 149–165.

[19]) Annaes da academia polytecnica do Porto 5 (1910), S. 209–213.

Da ein Polynom k-ten Grades $T_k(s)$, das zu jedem Polynom $g(s)$ von höchstens $k-1$-tem Grade orthogonal ist im Sinne der Gleichung

$$\int_0^1 s^{\mu-1}(1-s)^{\nu-1} T_k(s)\, g(s)\, ds = 0,$$

ein Jacobisches ist[20]), nämlich bis auf einen konstanten Faktor C_k von der Form

$$J_k(s;\mu,\nu) = s^{1-\mu}(1-s)^{1-\nu}\frac{d^k}{ds^k}[s^{\mu+k-1}(1-s)^{\nu+k-1}],$$

so werden wir zum Beweise der Gleichung (18) $\Pi_{pq}(s) = c_{pq} J_k(s; 1, \alpha+1)$ zu zeigen haben, daß

$$(19) \qquad \int_0^1 (1-s)^\alpha \Pi_{pq}(s)\, s^h\, ds = 0$$

ist für alle ganzzahligen $h < k$. Nun gilt auf Grund von (7) für jedes Polynom $G(x, y)$ von niedrigerem als l-tem Gesamtgrade

$$\iint (1-x^2-y^2)^\alpha P_{mn} G(x, y)\, dx\, dy = 0,$$

im besonderen also

$$\iint (1-x^2-y^2)^\alpha P_{mn}(x^2+y^2)^h\, dx\, dy = 0, \quad \text{wenn } 2h < l;$$

führt man Polarkoordinaten r, θ ein und setzt $m = 2p$, $n = 2q$, $r^2 = s$, so erkennt man (19) und daher auch (18) in der Tat als gültig.

Zur Bestimmung des konstanten Faktors c_{pq} in (18a) führen wir erstens sämtliche Polynome $\Pi_{pq}(s)$ auf eines von ihnen $\Pi_{k0}(s)$ zurück. Hierzu integrieren wir die Gleichung (13) in der Gestalt

$$(13\text{a}) \qquad \{[1-\varrho r\cos(\theta-\gamma)]^2 + \varrho^2(1-r^2)\}^{-\alpha-\frac{1}{2}} = \sum_l^{0,\infty} \varrho^l R_l,$$

wo $\sum\limits_{m+n=l} \cos\gamma^m \sin\gamma^n P_{mn} = R_l$ gesetzt ist, nach θ in den Grenzen 0 und 2π. Da das Integral links nach einem bekannten Satze[21]) von γ unabhängig ist, gilt dasselbe von den Größen $\int_0^{2\pi} R_l\, d\theta$. Hierdurch bestätigt sich die Bemerkung am Anfang von § 6, daß $\int_0^{2\pi} P_{mn}\, d\theta$ verschwindet, sobald eine der Zahlen m und n ungerade ist. Für $m = 2p$, $n = 2q$ dagegen ist $\int_0^{2\pi} R_l\, d\theta$ dann und nur dann von γ unabhängig, wenn

$$(20) \qquad \sum_{p+q=k} \cos\gamma^{2p} \sin\gamma^{2q} \int_0^{2\pi} P_{2p,2q}\, d\theta = (\cos\gamma^2 + \sin\gamma^2)^k\, \Pi_{k0}(s),$$

---

[20]) C. Possé, Sur quelques applications des fractions continues algébriques, St. Pétersbourg 1886, S. 51. Ich setze dort $1 + z = 2s$.

[21]) Vgl. z. B. E. Heine, Handbuch der Kugelfunktionen 1 (1878), S. 26.

also

(21)
$$\Pi_{pq}(s)=\frac{k!}{p!\,q!}\,\Pi_{k0}(s)$$
ist.

Um zweitens c_{k0} zu berechnen, setzen wir nach der angegebenen Integration der Gleichung (13a) $\gamma=0$, wobei sich mit Rücksicht auf das Verschwinden der Integrale $\int\limits_0^{2\pi} P_{2k+1,0}\,d\theta$ ergibt

$$\int\limits_0^{2\pi}\frac{d\theta}{[(1-\varrho r\cos\theta)^2+\varrho^2(1-r^2)]^{\alpha+\frac{1}{2}}}=\sum_k^{0,\infty}\varrho^{2k}\int\limits_0^{2\pi}P_{2k,0}\,d\theta.$$

Für $r=0$ folgt

(22)
$$\frac{2\pi}{(1+\varrho^2)^{\alpha+\frac{1}{2}}}=\sum_k^{0,\infty}\varrho^{2k}\,\Pi_{k0}(0);$$

da nun in $J_k(s;1,\alpha+1)$ die Potenz s^k den Faktor $\frac{(-1)^k\,\Gamma(\alpha+2k+1)}{2^k\,\Gamma(\alpha+k+1)}$ hat[20]) und das Jacobische Polynom k-ten Grades, bei dem der Koeffizient dieser Potenz die Einheit ist, an dem unteren Ende des Grundgebietes den Wert $(-1)^k 2^k k!\,\Gamma(\alpha+k+1)/\Gamma(\alpha+2k+1)$ besitzt[22]), so ist

$$J_k(0;1,\alpha+1)=k!.$$

Durch die binomische Entwicklung der linken Seite von (22) erhält man also nach (18)

$$\sum_k^{0,\infty}2\pi\,\frac{(-1)^k\,\Gamma(\alpha+1)\,\Gamma(2\alpha+2k)}{2^{2k-1}k!\,\Gamma(\alpha+k)\,\Gamma(2\alpha+1)}\,\varrho^{2k}=\sum_k^{0,\infty}c_{k0}\,k!\,\varrho^{2k};$$

die Vergleichung der beiderseitigen Koeffizienten von ϱ^{2k} liefert

$$c_{k0}=2\pi\,\frac{(-1)^k\,\Gamma(\alpha+1)\,\Gamma(2\alpha+2k)}{2^{2k-1}k!^2\,\Gamma(\alpha+k)\,\Gamma(2\alpha+1)},$$

und hieraus folgt (18a) mit Hilfe von (21).

Im Hinblick auf (20) kommt durch Integration der Formel (14) nach θ zwischen 0 und 2π die *merkwürdige Integralformel für die Gegenbauerschen Polynome*

$$\int\limits_0^{2\pi}[1-s\sin(\theta-\gamma)^2]^k P_{2k}\left[\frac{\sqrt{s}\cos(\theta-\gamma)}{\sqrt{1-s\sin(\theta-\gamma)^2}};\alpha\right]d\theta=c_{k0}\,J_k(s;1,\alpha+1)$$
$$=c_{k0}(1-s)^{-\alpha}\frac{d^k}{ds^k}[s^k(1-s)^{\alpha+k}]$$

zustande, die für $\alpha=0$, d. h. im Falle der Kugelfunktionen von Appell a. a. O. [19]) angegeben ist.

[22]) A. a. O. [20]), S. 58.

§ 7.

Bemerkung über die Konvergenz der Reihe $\Sigma A_{mn} Q_{mn}$.

Die mit Hilfe der Integralgleichungen zu führende Untersuchung der Entwickelbarkeit einer willkürlichen Funktion $F(x, y)$ etwa nach den Q_{mn} gemäß (11) behalte ich späterer Gelegenheit vor; doch will ich hier nicht unerwähnt lassen, daß sich, wie im Falle $\alpha = 0$ [23]), auch im Falle eines beliebigen α die Glieder der Reihe (11a) bei passenden Voraussetzungen über die Funktion F leicht als absolut kleiner nachweisen lassen als die mit einem positiven Festwert K multiplizierten absoluten Beträge der Glieder der besonderen Entwicklung (3) $(a = b = \frac{1}{2})$

$$\left(1 - x - y + \frac{1}{2}\right)^{-\alpha-\frac{3}{2}} = \sum_{m,n}^{0,\infty} \frac{1}{2^m 2^n} Q_{mn}(x, y; \alpha).$$

Ist nämlich ω_{mn} die obere Grenze des absoluten Betrages der Teilableitung $\frac{\partial^l F}{\partial x^m \partial y^n}$ im Einheitskreise, so findet man nach (11a)

$$|A_{mn}| \leqq \omega_{mn} \frac{(\alpha+l+1)\,\Gamma(\alpha+1)}{2^l \pi\, \Gamma(\alpha+l+1)} \iint p(x,y)^{\alpha+l}\, dx\, dy$$

oder durch Ausrechnung (§ 2) des Doppelintegrals

$$|A_{mn}| \leqq \omega_{mn} \frac{\Gamma(\alpha+1)}{2^l\, \Gamma(\alpha+l+1)}.$$

Wenn also für alle Zeiger

$$\omega_{mn} \leqq K \frac{\Gamma(\alpha+l+1)}{\Gamma(\alpha+1)},$$

so folgt die oben ausgesprochene Behauptung.

§ 8.

Ein System linearer partieller Differentialgleichungen zweiter Ordnung für die Funktionen $\mathfrak{P}_{mn}$. [24])

Für die Funktionen

(23) $$\mathfrak{P}_{mn}(x, y; \alpha) = p^\alpha P_{mn}(x, y; \alpha) = \frac{\partial^l p^{\alpha+l}}{\partial x^m \partial y^n} \ ^{25})$$

---

[23]) A. a. O. [9]), S. 330–331.

[24]) Die Herleitung der den §§ 8–10 entsprechenden Ergebnisse für die Hermiteschen Polynome U_{mn}, V_{mn} bei Didon, Ann. Éc. Norm. (1) **5**, S. 235–244; **6**, S. 7–20.

[25]) Der konstante Faktor in P_{mn} [vgl. (2)] kann hier in Ansehung des Ergebnisses (28) gleich 1 gesetzt werden.

leitet man auf folgende Weise ein System zweier linearer partieller Differentialgleichungen zweiter Ordnung her. Der Ausdruck

$$T(x, y, z) = (z^2 - x^2 - y^2)^{-\alpha} \frac{\partial^l (z^2 - x^2 - y^2)^{\alpha + l}}{\partial x^m \partial y^n}$$

ist ein homogenes Polynom l-ten Grades in x, y, z; daher ist

$$x \frac{\partial T}{\partial x} + y \frac{\partial T}{\partial y} + z \frac{\partial T}{\partial z} = lT.$$

Rechnet man $\frac{\partial T}{\partial z}$ wirklich aus und setzt dann $z = 1$, so ergibt sich, wenn man statt P_{mn} kurz P schreibt,

$$x \frac{\partial P}{\partial x} + y \frac{\partial P}{\partial y} - lP - 2\alpha p^{-1} P = -2(\alpha + l) p^{-\alpha} \frac{\partial^l p^{\alpha + l - 1}}{\partial x^m \partial y^n};$$

die Einführung von $\mathfrak{P}$ an Stelle von P liefert

$$x \frac{\partial \mathfrak{P}}{\partial x} + y \frac{\partial \mathfrak{P}}{\partial y} - 2(\alpha + l)\mathfrak{P} = -2(\alpha + l) \frac{\partial^l p^{\alpha + l - 1}}{\partial x^m \partial y^n}, \tag{24}$$

und durch Differentiation nach x findet man

$$x \frac{\partial^2 \mathfrak{P}}{\partial x^2} - (2\alpha + l - 1) \frac{\partial \mathfrak{P}}{\partial x} + y \frac{\partial^2 \mathfrak{P}}{\partial x \partial y} = -2(\alpha + l) \frac{\partial^{l+1} p^{\alpha + l - 1}}{\partial x^{m+1} \partial y^n}. \tag{25}$$

Nun ist, wenn man

$$p^{\alpha + l} = \mathfrak{S}, \quad \frac{\partial^l \mathfrak{S}}{\partial x^m \partial y^n} = \mathfrak{P} \tag{26}$$

setzt,

$$\frac{\partial \mathfrak{S}}{\partial x} = -2(\alpha + l) x p^{\alpha + l - 1},$$

$$\frac{\partial^{l+2} \mathfrak{S}}{\partial x^{m+2} \partial y^n} = \frac{\partial^2 \mathfrak{P}}{\partial x^2} = -2(\alpha + l) x \frac{\partial^{l+1} p^{\alpha + l - 1}}{\partial x^{m+1} \partial y^n} - 2(\alpha + l)(m+1) \frac{\partial^l p^{\alpha + l - 1}}{\partial x^m \partial y^n}. \tag{27}$$

Setzt man für die Teilableitungen rechts die linken Seiten von (24) und (25) ein, und führt man eine der vorstehenden Herleitung entsprechende in der Veränderlichen y durch, so erhält man das gesuchte System

$$\begin{aligned} &(1 - x^2) \frac{\partial^2 \mathfrak{P}}{\partial x^2} - xy \frac{\partial^2 \mathfrak{P}}{\partial x \partial y} + (2\alpha + n - 2) x \frac{\partial \mathfrak{P}}{\partial x} - (m+1) y \frac{\partial \mathfrak{P}}{\partial y} \\ &\qquad + (m+1)(2\alpha + l)\mathfrak{P} = 0, \\ &(1 - y^2) \frac{\partial^2 \mathfrak{P}}{\partial y^2} - xy \frac{\partial^2 \mathfrak{P}}{\partial x \partial y} + (2\alpha + m - 2) y \frac{\partial \mathfrak{P}}{\partial y} - (n+1) x \frac{\partial \mathfrak{P}}{\partial x} \\ &\qquad + (n+1)(2\alpha + l)\mathfrak{P} = 0. \end{aligned} \tag{28}$$

Ich unterlasse es, das weniger einfache System anzuschreiben, dem die Polynome P selbst genügen; man findet es leicht aus (28) und (23). Durch Addition der beiden Gleichungen (28) entsteht die symmetrische

$$(1-x^2)\frac{\partial^2\mathfrak{P}}{\partial x^2} - 2xy\frac{\partial^2\mathfrak{P}}{\partial x\partial y} + (1-y^2)\frac{\partial^2\mathfrak{P}}{\partial y^2} + (2\alpha-3)x\frac{\partial\mathfrak{P}}{\partial x} + (2\alpha-3)y\frac{\partial\mathfrak{P}}{\partial y}$$
$$+ (l+2)(2\alpha+l)\mathfrak{P} = 0.$$

§ 9.

Vollständige Integration des in § 8 hergeleiteten Systems.

Einer Bemerkung von Didon anläßlich der Differentialgleichungen der Hermiteschen Polynome[26]) entnimmt man, daß *die allgemeine Lösung des Systems* (28) *vier willkürliche Konstanten enthält.* Wir stellen jetzt diese allgemeine Lösung mit Hilfe von Quadraturen her.

Nun folgen die Gleichungen (28), wie leicht nachzurechnen, aus denen des Systems

$$(29)\quad \begin{aligned} &(1-x^2)\frac{\partial^2\mathfrak{S}}{\partial x^2} - xy\frac{\partial^2\mathfrak{S}}{\partial x\partial y} + 2(\alpha+l-1)x\frac{\partial\mathfrak{S}}{\partial x} - y\frac{\partial\mathfrak{S}}{\partial y} + 2(\alpha+l)\mathfrak{S} = 0\\ &(1-y^2)\frac{\partial^2\mathfrak{S}}{\partial y^2} - xy\frac{\partial^2\mathfrak{S}}{\partial x\partial y} + 2(\alpha+l-1)y\frac{\partial\mathfrak{S}}{\partial y} - x\frac{\partial\mathfrak{S}}{\partial x} + 2(\alpha+l)\mathfrak{S} = 0\end{aligned}$$

durch die Operation

$$(30)\qquad \frac{\partial^l\mathfrak{S}}{\partial x^m\partial y^n} = \mathfrak{P}$$

[die Einführung der Funktion $\mathfrak{S}$ wird durch (26) nahegelegt]; wegen (30) genügt es, die allgemeine Lösung des Systems (29) zu ermitteln, was jetzt geschieht.

Die linken Seiten der Gleichungen (29) sind Teilableitungen nach x und y, so daß eine Integration nach diesen Veränderlichen ergibt

$$(31)\quad \begin{aligned} &(1-x^2)\frac{\partial\mathfrak{S}}{\partial x} - xy\frac{\partial\mathfrak{S}}{\partial y} + 2(\alpha+l)x\mathfrak{S} = \varphi(y),\\ &(1-y^2)\frac{\partial\mathfrak{S}}{\partial y} - xy\frac{\partial\mathfrak{S}}{\partial x} + 2(\alpha+l)y\mathfrak{S} = \psi(x),\end{aligned}$$

wo die Funktionen $\varphi(y)$, $\psi(x)$ näher zu bestimmen sind. Durch Elimination von $\frac{\partial\mathfrak{S}}{\partial y}$ bzw. $\frac{\partial\mathfrak{S}}{\partial x}$ erhält man

$$(32)\quad \begin{aligned} &(1-x^2-y^2)\frac{\partial\mathfrak{S}}{\partial x} + 2(\alpha+l)x\mathfrak{S} = (1-y^2)\varphi(y) + xy\psi(x),\\ &(1-x^2-y^2)\frac{\partial\mathfrak{S}}{\partial y} + 2(\alpha+l)y\mathfrak{S} = (1-x^2)\psi(x) + xy\varphi(y).\end{aligned}$$

[26]) Ann. Éc. Norm. (1) 5, S. 238–239.

Differentiation der Gleichung (32_1) nach y bzw. (32_2) nach x und Subtraktion liefert

$$(33)\qquad 2(\alpha+l+1)\left(x\frac{\partial\mathfrak{S}}{\partial y}-y\frac{\partial\mathfrak{S}}{\partial x}\right)$$
$$=(1-y^2)\varphi'(y)-3y\varphi(y)-(1-x^2)\psi'(x)+3x\psi(x),$$

während aus denselben beiden Gleichungen durch Elimination von $\mathfrak{S}$ folgt

$$(34)\qquad x\frac{\partial\mathfrak{S}}{\partial y}-y\frac{\partial\mathfrak{S}}{\partial x}=x\psi(x)-y\varphi(y);$$

die Einführung von (34) in (33) ergibt

$$(2\alpha+2l-1)x\psi(x)+(1-x^2)\psi'(x)=(2\alpha+2l-1)y\varphi(y)+(1-y^2)\varphi'(y).$$

Beide Seiten dieser Gleichung müssen einer und derselben Konstanten A gleich sein; diese Tatsache liefert für $\psi(x)$ bzw. $\varphi(y)$ je eine gewöhnliche Differentialgleichung erster Ordnung, in deren beiden Lösungen

$$(35)\qquad \begin{aligned}\psi(x)&=\mathfrak{p}(x)^{\alpha+l-\frac{1}{2}}\left[B+A\int_0^x\frac{dt}{\mathfrak{p}(t)^{\alpha+l+\frac{1}{2}}}\right],\\ \varphi(y)&=\mathfrak{p}(y)^{\alpha+l-\frac{1}{2}}\left[C+A\int_0^y\frac{dt}{\mathfrak{p}(t)^{\alpha+l+\frac{1}{2}}}\right],\end{aligned}\qquad \mathfrak{p}(z)=1-z^2,$$

zwei neue willkürliche Festwerte B, C auftreten. Die Ausdrücke (35) setzen wir in die Gleichungen (36) ein, die wir aus (32) durch die Substitution

$$\mathfrak{S}=p^{\alpha+l}\mathfrak{T}$$

erhalten,

$$(36)\qquad \begin{aligned}p^{\alpha+l+1}\frac{\partial\mathfrak{T}}{\partial x}&=(1-y^2)\varphi(y)+xy\psi(x),\\ p^{\alpha+l+1}\frac{\partial\mathfrak{T}}{\partial y}&=(1-x^2)\psi(x)+xy\varphi(y).\end{aligned}$$

Durch Integration der ersten dieser Gleichungen nach x folgt, wenn wir mit $\chi(y)$ eine noch näher zu bestimmende Funktion von y bezeichnen,

$$(37)\qquad \mathfrak{T}=\chi(y)+\mathfrak{p}(y)^{\alpha+l+\frac{1}{2}}\int_0^x\frac{dt}{p(t,y)^{\alpha+l+1}}\left[C+A\int_0^y\frac{dt}{\mathfrak{p}(t)^{\alpha+l+\frac{1}{2}}}\right]$$
$$+y\int_0^x\frac{t\mathfrak{p}(t)^{\alpha+l-\frac{1}{2}}dt}{p(t,y)^{\alpha+l+1}}\left[B+A\int_0^t\frac{ds}{\mathfrak{p}(s)^{\alpha+l+\frac{1}{2}}}\right].$$

Die Gleichsetzung des Ausdrucks (37) von $\mathfrak{T}$ mit dem zweiten, den man durch Integration der Gleichung (36_2) nach y findet und in dem zunächst eine unbekannte Funktion $\omega(x)$ auftritt, liefert nach passen-

der Umstellung der Glieder und beiderseitiger Hinzufügung der Größe $A\int\limits_0^x\int\limits_0^y \frac{ds\,dt}{p(s,t)^{\alpha+l+1}}$ die Beziehung

$$(38)\qquad \chi(y)+B\left[y\int\limits_0^x \frac{t\,\mathfrak{p}(t)^{\alpha+l-\frac{1}{2}}\,dt}{p(t,y)^{\alpha+l+1}}-\mathfrak{p}(x)^{\alpha+l+\frac{1}{2}}\int\limits_0^y \frac{dt}{p(t,x)^{\alpha+l+1}}\right]$$

$$+A\left[y\int\limits_0^x \frac{t\,\mathfrak{p}(t)^{\alpha+l-\frac{1}{2}}\,dt}{p(t,y)^{\alpha+l+1}}\int\limits_0^t \frac{ds}{\mathfrak{p}(s)^{\alpha+l+\frac{1}{2}}}-\mathfrak{p}(x)^{\alpha+l+\frac{1}{2}}\int\limits_0^x \frac{dt}{\mathfrak{p}(t)^{\alpha+l+\frac{1}{2}}}\int\limits_0^y \frac{dt}{p(t,x)^{\alpha+l+1}}\right.$$

$$\left.+\int\limits_0^y ds\int\limits_0^x \frac{dt}{p(s,t)^{\alpha+l+1}}\right]=\omega(x)+C[\;]_1+A[\;]_2,$$

wo die beiden eckigen Klammern rechts die Größen sind, die aus den Faktoren von B und A links durch Vertauschung von x und y entstehen. Nun sind ebendiese Faktoren von x unabhängig, da ihre Differentiation nach x, wie man leicht bestätigt, den Wert Null ergibt; die linke Seite von (38) ist folglich eine Funktion nur von y, die rechte ebenso eine Funktion nur von x. Beide Seiten sind also einer und derselben vierten Konstanten D gleich. Nach (38) drücken sich jetzt die Funktionen $\omega(x)$, $\chi(y)$ mit Hilfe der Festwerte A, B, C, D durch bekannte Funktionen aus; die Einsetzung in (37) liefert die gesuchte allgemeine Lösung des Systems (29)

$$(39)\qquad \mathfrak{S}(x,y)=p(x,y)^{\alpha+l}\left\{D+C\,\mathfrak{p}(y)^{\alpha+l+\frac{1}{2}}\int\limits_0^x \frac{dt}{p(t,y)^{\alpha+l+1}}\right.$$

$$+B\,\mathfrak{p}(x)^{\alpha+l+\frac{1}{2}}\int\limits_0^y \frac{dt}{p(t,x)^{\alpha+l+1}}+A\left[\mathfrak{p}(x)^{\alpha+l+\frac{1}{2}}\int\limits_0^x \frac{dt}{\mathfrak{p}(t)^{\alpha+l+\frac{1}{2}}}\int\limits_0^y \frac{dt}{p(t,x)^{\alpha+l+1}}\right.$$

$$\left.\left.+\mathfrak{p}(y)^{\alpha+l+\frac{1}{2}}\int\limits_0^y \frac{dt}{\mathfrak{p}(t)^{\alpha+l+\frac{1}{2}}}\int\limits_0^x \frac{dt}{p(t,y)^{\alpha+l+1}}-\int\limits_0^x\int\limits_0^y \frac{ds\,dt}{p(s,t)^{\alpha+l+1}}\right]\right\}.$$

Von (39) kehrt man über (30) und (23) zu den Polynomen P_{mn} zurück, indem man $A=B=C=0$ setzt.

§ 10.

Ausdruck der Funktion Q_{mn} durch eine Teilableitung. Ein System linearer partieller Differentialgleichungen zweiter Ordnung für die Funktionen $\mathfrak{Q}_{mn}$ und seine vollständige Integration.

Die Größen Q_{mn} lassen sich in ähnlicher Form darstellen, wie die P_{mn} sie in (2) darbieten. Um diesen Ausdruck (41) der Q_{mn} durch eine Teilableitung zu gewinnen, setzen wir in (3)

$$(40)\qquad x=\frac{\xi}{\sqrt{q}},\quad y=\frac{\eta}{\sqrt{q}},\quad q=q(\xi,\eta)=1+\xi^2+\eta^2,\ ^{27})$$
$$a=\frac{\varkappa}{\sqrt{q}},\quad b=\frac{\lambda}{\sqrt{q}}.$$

Wenn wir die durch (40) transformierten $Q_{mn}(x,y)$ mit $Q^*_{mn}(\xi,\eta)$ bezeichnen, so geht (3) über in

$$[1+(\xi-\varkappa)^2+(\eta-\lambda)^2]^{-\alpha-1}=\sum_{m,n}^{0,\infty}\varkappa^m\lambda^n q^{-\frac{l}{2}-\alpha-1}Q^*_{mn}.$$

Aus der Taylorschen Entwicklung der linken Seite schließt man

$$(41)\qquad Q^*_{mn}(\xi,\eta;\alpha)=\frac{(-1)^{m+n}}{m!\,n!}\,q^{\alpha+\frac{m+n}{2}+1}\frac{\partial^{m+n}q^{-\alpha-1}}{\partial\xi^m\partial\eta^n}.$$

Auch für die Funktionen

$$(42)\qquad \mathfrak{Q}_{mn}=\mathfrak{Q}=\frac{\partial^l q^{-\alpha-1}}{\partial\xi^m\partial\eta^n}$$

kann man mit der in § 8 benutzten Methode ein System linearer partieller Differentialgleichungen zweiter Ordnung aufstellen; es lautet

$$(43)\qquad \begin{aligned}&(1+\xi^2)\frac{\partial^2\mathfrak{Q}}{\partial\xi^2}+\xi\eta\frac{\partial^2\mathfrak{Q}}{\partial\xi\partial\eta}+(2\alpha+l+m+4)\xi\frac{\partial\mathfrak{Q}}{\partial\xi}+(m+1)\eta\frac{\partial\mathfrak{Q}}{\partial\eta}\\&\qquad+(m+1)(2\alpha+l+2)\mathfrak{Q}=0,\\&(1+\eta^2)\frac{\partial^2\mathfrak{Q}}{\partial\eta^2}+\xi\eta\frac{\partial^2\mathfrak{Q}}{\partial\xi\partial\eta}+(2\alpha+l+n+4)\eta\frac{\partial\mathfrak{Q}}{\partial\eta}+(n+1)\xi\frac{\partial\mathfrak{Q}}{\partial\xi}\\&\qquad+(n+1)(2\alpha+l+2)\mathfrak{Q}=0.\end{aligned}$$

Für die Polynome $Q_{mn}(x,y)$ hat es nach (41) und (42) die Form

$$(44)\qquad \begin{aligned}&(1-x^2)\frac{\partial^2Q}{\partial x^2}-xy\frac{\partial^2Q}{\partial x\partial y}-(2\alpha+n+3)x\frac{\partial Q}{\partial x}+my\frac{\partial Q}{\partial y}\\&\qquad+m(2\alpha+l+2)Q=0,\\&(1-y^2)\frac{\partial^2Q}{\partial y^2}-xy\frac{\partial^2Q}{\partial x\partial y}-(2\alpha+m+3)y\frac{\partial Q}{\partial y}+nx\frac{\partial Q}{\partial x}\\&\qquad+n(2\alpha+l+2)Q=0.\end{aligned}$$

[27]) Dieser Substitution bedient sich Hermite zur Darstellung seiner Polynome V_{mn} a. a. O. [6]), S. 343.

Man kann, ausgehend von der Erzeugungsformel (3), zu (44) auch auf dem selben Wege gelangen wie Didon bei den Hermiteschen Polynomen V_{mn}.[28])

Das System (43) entsteht aus dem folgenden

$$(45)\quad \begin{aligned} &(1+\xi^2)\frac{\partial^2 \mathfrak{U}}{\partial \xi^2}+\xi\eta\frac{\partial^2 \mathfrak{U}}{\partial \xi\,\partial \eta}+2(\alpha+2)\xi\frac{\partial \mathfrak{U}}{\partial \xi}+\eta\frac{\partial \mathfrak{U}}{\partial \eta}+2(\alpha+1)\,\mathfrak{U}=0,\\ &(1+\eta^2)\frac{\partial^2 \mathfrak{U}}{\partial \eta^2}+\xi\eta\frac{\partial^2 \mathfrak{U}}{\partial \xi\,\partial \eta}+2(\alpha+2)\eta\frac{\partial \mathfrak{U}}{\partial \eta}+\xi\frac{\partial \mathfrak{U}}{\partial \xi}+2(\alpha+1)\,\mathfrak{U}=0 \end{aligned}$$

durch den Ansatz

$$(46)\qquad \mathfrak{Q}=\frac{\partial^l \mathfrak{U}}{\partial \xi^m\,\partial \eta^n}.$$

Nun führt die Substitution $i\xi=\mathfrak{x}$, $i\eta=\mathfrak{y}$ das System (45) in dasjenige über, welches aus (29) hervorgeht, wenn man dort $\mathfrak{S}$; x, y; α durch $\mathfrak{U}$; $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}$; $-\alpha-l-1$ ersetzt. Diese Bemerkung ermöglicht nach § 9 fast ohne Rechnung die Angabe der *allgemeinen Lösung* $\mathfrak{U}(\xi,\eta)$ *des Systems* (45): Setzt man $\mathfrak{q}(\zeta)=1+\zeta^2$, so ist auf Grund von (39)

$$(47)\quad \begin{aligned} \mathfrak{U}(\xi,\eta)=q(\xi,\eta)^{-\alpha-1}\Bigg\{&D+\frac{C}{\mathfrak{q}(\eta)^{\alpha+\frac12}}\int_0^\xi q(\tau,\eta)^\alpha d\tau\\ &+\frac{B}{\mathfrak{q}(\xi)^{\alpha+\frac12}}\int_0^\eta q(\tau,\xi)^\alpha d\tau+A\Bigg[\frac{1}{\mathfrak{q}(\xi)^{\alpha+\frac12}}\int_0^\xi \mathfrak{q}(\tau)^{\alpha+\frac12}d\tau\int_0^\eta q(\tau,\xi)^\alpha d\tau\\ &+\frac{1}{\mathfrak{q}(\eta)^{\alpha+\frac12}}\int_0^\eta \mathfrak{q}(\tau)^{\alpha+\frac12}d\tau\int_0^\xi q(\tau,\eta)^\alpha d\tau-\int_0^\xi\int_0^\eta q(\sigma,\tau)^\alpha d\sigma\,d\tau\Bigg]\Bigg\}. \end{aligned}$$

Die Größen (42) erhält man aus (47) durch Anwendung von (46), indem man $A=B=C=0$ wählt.

[28]) Ann. Éc. Norm. (1) **5**, S. 241–243.

(Eingegangen am 7. 4. 1923.)

Über S. Lies Geometrie der Kreise und Kugeln.

Von

E. Study in Bonn

(4. Fortsetzung.)

Inhalt.

Dritter Abschnitt.

Dritter Abschnitt.

Das Elementkontinuum der Kugelgeometrie.

Wir kehren nunmehr zum Gedankengang unseres ersten Abschnittes zurück, um auf ähnliche Art, wie dort eine „Geometrie der Kreise", nunmehr eine „Geometrie der Kugeln" zu entwickeln.

Vorausschicken muß ich diesem Abschnitt eine Bemerkung über Dimensionszählungen.

Es ist üblich, und gewöhnlich auch sehr zweckmäßig, von den „∞^1 Punkten" einer Geraden, den „∞^2 Punkten" einer Ebene usw. zu reden. Auch wird der Raum der elementaren projektiven Geometrie als ein R_3, eine analytische oder auch algebraische Fläche darin als eine Mannigfaltigkeit M_2, ein Linienkomplex als eine Mannigfaltigkeit M_3 bezeichnet, wobei der Index die Dimensionenzahl andeutet.

Hiergegen ist nun nichts einzuwenden (oder doch nichts Stichhaltiges), solange man es nur mit Örtern reeller Punkte, reeller Geraden usw. zu tun hat. Die analytische Behandlung (und Begründung) der Geometrie nötigt aber zur Einführung komplexer Elemente, und damit werden alle

Dimensionenzahlen verdoppelt. Dieser Erweiterung des betrachteten Gebietes auch in der Bezeichnung Rechnung zu tragen, also z. B. von ∞^6 Punkten des Raumes der projektiven Geometrie zu reden, ist indessen nicht üblich geworden. Daraus ergeben sich nun Diskrepanzen, die ganz unerträglich werden, sobald man Anlaß hat, auch Mannigfaltigkeiten zu betrachten, die *nicht* durch analytische Gleichungen darstellbar sind. Dieser Anlaß aber ergibt sich sehr oft: Schon die reellen Punkte des gewöhnlichen Raumes bilden ja eine solche Mannigfaltigkeit, die aus der seiner komplexen Punkte durch Gleichungen der Form

$$x_0 : x_1 : x_2 : x_3 = \bar{x}_0 : \bar{x}_1 : \bar{x}_2 : \bar{x}_3,$$

also *durch nicht-analytische Gleichungen* abgeschieden wird, und der nun folgerecht, aber doch ganz sinnloser Weise, die gebrochene „Dimensionenzahl" $\frac{3}{2}$ zugeschrieben werden müßte. Änderungen des üblichen Bezeichnungssystems werden also unvermeidlich, wenn man sich nicht mit diesem Widersinn abfinden und auch nicht zu schleppenden Umschreibungen seine Zuflucht nehmen will.

Eine gewisse Erleichterung bildet ein von C. Segre gemachter Vorschlag, den ich annehme. Danach wird das Substrat der gewöhnlichen projektiven Geometrie im komplexen Gebiet — in der Erweiterung des gewöhnlichen Raumes — als ein Raum (Kontinuum) von drei *komplexen* Dimensionen bezeichnet. Entsprechend sage ich auch, dieser Raum „enthalte $\infty^{2\cdot 3}$ Punkte", von denen ∞^3 *reell* sind. Einer analytischen Kurve schreibe ich demgemäß „$\infty^{2\cdot 1}$ Punkte" zu (zu denen dann etwanige Grenzstellen nicht gehören, die Punktmengen der verschiedensten Art bilden, ja den ganzen Raum erfüllen können). Hat die Kurve einen reellen Zug, so wird dieser von „∞^1 Punkten" gebildet. Sind k solche Züge vorhanden, die nur durch Vermittelung des komplexen Gebietes *analytisch* miteinander zusammenhängen (was nicht ausschließt, daß sie im Reellen Punkte miteinander gemein haben), so rede ich von „$k\cdot\infty^1$" reellen Punkten; usw.

Die Gruppe der komplexen Kollineationen und Korrelationen in dem sonst dreidimensional genannten Raume, also die Kollineations- und Korrelationsgruppe in der analytischen Erweiterung des reellen projektiven Punktkontinuums, umfaßt danach $2\cdot\infty^{2\cdot 15}$ Transformationen, von denen $4\cdot\infty^{15}$ reell sind, usf. Folgerecht müßte nun freilich auch eine analytische Fläche als eine $M_{2\cdot 2}$, die Kollineationsgruppe als eine $G_{2\cdot 15}$ bezeichnet werden. Um aber nicht gleich gar zu radikal vorzugehen, behalte ich in diesen Fällen die Bezeichnungen M_2, G_{15} bei. Ich halte einen solchen Kompromiß für nicht unbedenklich; doch wird er in der vorliegenden Arbeit keinen Schaden anrichten.

13. Orientierte Punkte und Ebenen.

Wenden wir eine Schwenkung (§ 3, S. 67) von der Periode vier,

$$l_1^* : l_2^* : r_1^* : r_2^* = l_1 : l_2 : \sqrt{-1}\, r_1 : \sqrt{-1}\, r_2,$$

auf einen orientierten ebenen Schnitt der Fläche $x_0 x_1 - x_2 x_3 = 0$ an, nämlich auf den Verein

$$l_1 : l_2 : r_1 : r_2 = l_{11} + l_{12} t : l_{21} + l_{22} t : r_{11} + r_{12} t : r_{21} + r_{22} t,$$
$$\{l_{11} l_{22} - l_{12} l_{21} = r_{11} r_{22} - r_{12} r_{21}\},$$

so erhalten wir eine Schar von Elementen, deren je zwei sich in antizyklischer Lage befinden; aus den Tangenten des ebenen Schnittes (im Grenzfall aus den Geraden eines Tangentenbüschels)

$$(1)\qquad \begin{aligned} X_{01} &= l_1 l_2 + r_1 r_2, & X_{02} &= l_1^2, & X_{03} &= r_1^2, \\ X_{23} &= -l_1 l_2 + r_1 r_2, & X_{31} &= l_2^2, & X_{12} &= -r_2^2 \end{aligned}$$

gehen andere Tangenten der absoluten Fläche hervor,

$$(2)\qquad \begin{aligned} X_{01}^* &= l_1 l_2 - r_1 r_2, & X_{02}^* &= l_1^2, & X_{03}^* &= -r_1^2, \\ X_{23}^* &= -l_1 l_2 - r_1 r_2, & X_{31}^* &= l_2^2, & X_{12}^* &= r_2^2, \end{aligned}$$

deren *je zwei* $X^*(s)$ und $X^*(t)$ einander wiederum schneiden, die also Erzeugende eines Tangentialkegels der Fläche 2. Ordnung (oder, im Grenzfall, wiederum die Tangenten jenes ebenen Büschels) sind.

Wie man sieht, kann es auf *zwei* Arten geschehen, daß orientierte Tangenten der absoluten Fläche einander schneiden: Die zugehörigen orientierten Linienelemente können sich in zyklischer *oder* antizyklischer Lage befinden.

Wir gelangen so zu dem Lehrsatz

XVI. *Durch den Orientierungsprozeß wird die Bedingung der vereinigten Lage zweier Tangenten der absoluten Fläche in zwei analytisch-getrennte Bedingungen zerlegt.*

In der Tat erhalten wir, wenn X und X' irgend zwei Tangenten der absoluten Fläche bedeuten, und l, r, l', r' die zugehörigen Parameter und Bildpunkte bezeichnen,

$$(2)\qquad \boxed{\begin{aligned} X_{01} X_{23}' + X_{02} X_{31}' + X_{03} X_{12}' + X_{23} X_{01}' + X_{31} X_{02}' + X_{12} X_{03}' \\ = \{(l l') - (r r')\} \cdot \{(l l') + (r r')\} \end{aligned}}$$

Wir werden von zwei orientierten Tangenten der absoluten Fläche nur dann sagen, ***daß sie einander schneiden****, wenn der zweite Faktor des angeführten Produkts verschwindet, wenn also die zugehörigen orientierten Linienelemente antizyklische Lage haben.*

Wir erkennen dann unmittelbar:

XVII. *Im Bildraume werden zwei einander schneidenden aber verschiedenen orientierten Tangenten der absoluten Fläche Punkte* ξ, ξ' *zugeordnet, deren Verbindungslinie einem bestimmten linearen Linienkomplex*

$$\boxed{\Xi_{01} + \Xi_{23} = 0} \tag{3}$$

angehört.

Wir wollen diesen Komplex des Bildraumes nunmehr den zu unserer Abbildung gehörigen *Hauptkomplex* nennen.

Es ist derselbe Komplex, dem wir schon früher begegnet sind (§ 2 Nr. 9). Er enthält, gleich dem zuvor untersuchten Komplex

$$\Xi_{01} - \Xi_{23} = 0, \tag{4}$$

der von nun an als *Nebenkomplex* bezeichnet werden soll, die absolute Kongruenz, und beide Komplexe liegen harmonisch zu den zwei singulären („ausgearteten“) Komplexen des Büschels, dessen Basis die absolute Kongruenz ist; jeder der beiden zueinander *konjugierten* Komplexe (3), (4) geht in den anderen über durch die beiden zyklischen Kollineationen von der Periode vier

$$\xi_0^* : \xi_1^* : \xi_2^* : \xi_3^* = \xi_0 : \xi_1 : \sqrt{-1}\,\xi_2 : \sqrt{-1}\,\xi_3, \tag{5}$$

die den zuvor ausgeführten Schwenkungen zugeordnet sind. Die involutorischen Korrelationen, die zu den Komplexen (3) und (4) gehören, ergeben zusammengesetzt die Spiegelung, die mit der absoluten Kongruenz verbunden ist; jeder der beiden Komplexe ist in bezug auf diese involutorische Kollineation sein eigenes Spiegelbild.

Betrachten wir nun ein Paar orientierter Tangenten X, X' der absoluten Fläche, die einander in einem Punkte x schneiden! Zu diesem Paar gehört dann ein zweites — das entgegengesetzt-orientierte — und auch die Geraden dieses zweiten Paares schneiden einander im Punkte x. Also erhält man den Punkt x zweimal, es muß möglich sein, das Kontinuum aller dieser Punkte mit zwei *Blättern* zu überdecken, den „Schnittpunkt“ der orientierten Tangenten $(l:r)$, $(l':r')$, vom „Schnittpunkt“ der entgegengesetzt-orientierten Tangenten $(l':-r)$, $(l':-r')$ zu unterscheiden; wobei dann solche Punkte x, die auf der absoluten Fläche liegen und Vereinen orientierter Elemente *eindeutig* entsprechen, als Verzweigungsfiguren dienen werden. (Vgl. § 1, S. 48.)

In der Tat liefert die Rechnung die folgenden Koordinaten des Schnittpunktes von zwei durch ihre Parameter $(l:r)$ und $(l':r')$ gegebenen und in vereinigter Lage befindlichen orientierten Tangenten X, X' der absoluten Fläche:

$$(6)\qquad \boxed{\begin{array}{ll} x_0 = l_1 r_1' - r_1 l_1', & x_1 = l_2 r_2' - r_2 l_2', \\ x_2 = l_1 r_2' - r_2 l_1', & x_3 = l_2 r_1' - r_1 l_2'; \end{array}}$$

die Verhältnisse dieser Größen ändern sich nicht, wenn man bei beiden Tangenten X, X' die Orientierung wechselt. Dabei sind Faktoren unterdrückt, die nicht immer Null sein können, was fernerhin von Bedeutung wird. (Lehrsatz XXI.) Aus (6) aber folgt

$$x_2 x_3 - x_0 x_1 = -(l l')\cdot(r r'),$$

so daß man zufolge der Voraussetzung

$$(7)\qquad (l l') + (r r') = 0$$

erklären (und zwar ein für allemal erklären) kann, daß

$$(8)\qquad \boxed{x_4 = \sqrt{x_2 x_3 - x_0 x_1} = (l l') = -(r r')}$$

sein soll.

Hiermit haben wir die in Rede stehende doppelte Überdeckung des projektiven Punktkontinuums $\{x\}$. Jedem Paar von *orientierten* Tangenten der absoluten Fläche, die einander schneiden, entspricht jedenfalls dann, wenn sie überhaupt einen bestimmten Schnittpunkt haben, *ein* Wertsystem

$$(9)\qquad x_0 : x_1 : x_2 : x_3 : x_4;$$

dem Paar der entgegengesetzt-orientierten Tangenten $(l : -r)$, $(l' : -r')$ entspricht das andere

$$(10)\qquad -x_0 : -x_1 : -x_2 : -x_3 : x_4.$$

Die Operation aber, durch die wir von den Punktkoordinaten $x_0 \dots x_3$ zu dem Wertsystem (9) gelangt sind, ist vollkommen analog dem Orientierungsprozeß, den wir auf die Tangenten der absoluten Fläche angewendet hatten. Wir reden daher nunmehr auch von einem *orientierten Punkt*, und verstehen darunter eben das Wertsystem (9), das aus dem Wertsystem $x_0 \dots x_3$ durch Verfügung über die Wurzelgröße (8) und Hinzufügung dieser Wurzelgröße als einer fünften, mit den vorigen durch die Gleichung

$$(11)\qquad x_0 x_1 - x_2 x_3 + x_4^2 = 0$$

verbundenen Koordinate entstanden ist. Durch *Umkehrung*, also etwa durch einen Zeichenwechsel der Irrationalität $\sqrt{x_2 x_3 - x_0 x_1}$, lassen wir dann aus diesem Punkt den ebenfalls orientierten Punkt (10) entstehen, der mit dem Punkte (9) dann und nur dann zusammenfällt, wenn der Radikand jener Wurzelgröße gleich Null ist, wenn also beide Punkte auf der absoluten Fläche liegen. Und weiter betrachten wir *nur* den durch

(6) und (8) dargestellten orientierten Punkt x als „Schnittpunkt" der *orientierten* Tangenten X, X', den daraus durch Umkehrung entstandenen Punkt $\underline{x}$ aber als Schnittpunkt der umgekehrten Tangenten $\underline{X}, \underline{X}'$: Wir erhalten alle drei Figuren $\underline{x}, \underline{X}, \underline{X}'$ durch einen gleichzeitigen Vorzeichenwechsel der Größen r_1, r_2, r_1', r_2'. Wenn aber x und $\underline{x}$ verschieden sind und also der absoluten Fläche nicht angehören, so lassen wir x nicht auf $\underline{X}$ und $\underline{X}'$ und $\underline{x}$ nicht auf X und X' liegen.

Wir sagen also, daß ein orientierter Punkt x und eine orientierte Tangente $(l:r)$ der absoluten Fläche dann und nur dann „vereinigt liegen" — oder daß die Tangente „durch den Punkt geht" — oder daß der Punkt „auf der Tangente liegt" —, wenn zwischen den Koordinaten beider Figuren die Gleichungen bestehen:

$$
\tag{12}
\boxed{\begin{array}{rrrrl}
* & x_4 l_2 & + x_1 r_1 & - x_3 r_2 & = 0, \\
- x_4 l_1 & * & - x_2 r_1 & + x_0 r_2 & = 0, \\
- x_1 l_1 & + x_2 l_2 & * & - x_4 r_2 & = 0, \\
x_3 l_1 & - x_0 l_2 & + x_4 r_1 & * & = 0.
\end{array}}
$$

Wenn also Gleichungen bestehen, die aus (12) durch einen Zeichenwechsel von x_4 hervorgehen, so heißt das, der orientierte Punkt x liegt vereinigt mit der orientierten Tangente der absoluten Fläche, die aus der gegebenen durch Umkehrung entsteht.

Die Gesamtheit der orientierten Tangenten der absoluten Fläche, deren Parameter $l:r$ Gleichungen der Form (12) genügen (wobei durch die Koeffizienten die Relation (11) erfüllt ist) — die Gesamtheit der orientierten Tangenten also, die einen vorgeschriebenen orientierten Punkt enthalten, bildet ein einziges Kontinuum, und zwar *ein binäres Gebiet*, das projektiv bezogen ist auf die Punkte ξ einer Geraden Ξ des Bildraumes, die dem absoluten Komplex angehört:

$$
\tag{13}
\boxed{\begin{array}{lll}
\Xi_{01} = x_4, & \Xi_{02} = x_0, & \Xi_{03} = x_2, \\
\Xi_{23} = - x_4, & \Xi_{31} = - x_1, & \Xi_{12} = x_3.
\end{array}}
$$

In der Tat geht durch diese Substitution das Gleichungssystem (12) hervor aus den Bedingungen für die vereinigte Lage einer Geraden Ξ und eines Punktes ξ des Bildraumes.

Wir fassen das Wesentliche hiervon wie folgt zusammen:

XVIII. *Man kann das projektive Punktkontinuum mit zwei Blättern überdecken, die längs der absoluten Fläche zusammenhängen. In dem so entstandenen Kontinuum* o r i e n t i e r t e r *Punkte sind dann jeder Tangente*

der absoluten Fläche, die nicht auf ihr liegt, zwei analytisch-getrennte Örter (Punktkontinua) zugeordnet, und diese Zuordnung entspricht den beiden Orientierungen der Tangente. Jede Erzeugende der absoluten Fläche aber ist ein einziger Ort orientierter Punkte.

Im Bildraum entsprechen, ausnahmslos eindeutig-umkehrbar, den orientierten Tangenten die Punkte, und den orientierten Punkten die Geraden des Hauptkomplexes, und Figuren (Tangente-Punkt) in vereinigter Lage entsprechen Figuren (Punkt-Komplexgerade) in vereinigter Lage.

Als Anwendung und zur Erläuterung dieses Satzes betrachten wir zunächst die Figur aller Tangenten der absoluten Fläche, die eine bestimmte unter ihnen treffen. Ist die gegebene Tangente nicht Erzeugende der absoluten Fläche, so bilden ihre Sekanten aus dem Tangentenkomplex eine (spezielle) irreduzibele Kongruenz 2. Ordnung und 2. Klasse. Diese ist *Trägerin eines ternären Gebietes*; durch den Orientierungsprozeß gehen aus ihr zwei verschiedene Kongruenzen orientierter Tangenten hervor, deren jede zu Bildern die Punkte einer anderen Ebene des Bildraumes hat. Wenn aber die gegebene Tangente Erzeugende der absoluten Fläche ist, so bilden ihre Sekanten aus dem Tangentenkomplex (bekanntlich) eine spezielle Kongruenz 1. Ordnung 1. Klasse, die („projektiv") auf die Punkte eines irreduzibelen Kegels 2. Ordnung abgebildet werden kann und mithin *nicht Trägerin eines ternären Gebietes* ist. Aber ein ternäres Gebiet, *das Grenzfall der zwei vorigen ist*, entsteht nun aus dieser Kongruenz 1. Ordnung 1. Klasse durch den Orientierungsprozeß: Diese Kongruenz wird durch ihn nicht, wie die vorige, in zwei verschiedene irreduzibele Kongruenzen zerlegt, sondern sie bleibt irreduzibel, sie wird mit zwei (in Erzeugenden der absoluten Fläche) *analytisch-zusammenhängenden* Blättern überdeckt — wodurch eben das ternäre Gebiet zustande kommt. Geht man also vom allgemeinen Fall zum speziellen über, so wird aus der Kongruenz 2. Ordnung 2. Klasse eine doppelt überdeckte Kongruenz 1. Ordnung 1. Klasse, und gleichzeitig vereinigen sich die zwei ternären Gebiete, deren jedes als Bild der Kongruenz 2. Ordnung 2. Klasse auftritt, zu einem einzigen, das nun aber nicht etwa Bild der Kongruenz 1. Ordnung 1. Klasse selbst, sondern Bild ihrer durch den Orientierungsprozeß hervorgerufenen doppelten Überdeckung ist.

Eine unmittelbare Folgerung aus dem Satze XVIII ist der Satz

XIX. *Im Kontinuum der orientierten Punkte gibt es eine zehngliedrige analytische Gruppe vollkommen eindeutiger Transformationen, denen die (charakteristische) Eigenschaft zukommt, die orientierten Tangenten der absoluten Fläche untereinander zu vertauschen, und die Bedingung des „Schneidens" zweier solcher orientierter Tangenten nicht zu*

stören. Diese Gruppe hat zum Bilde die automorphen Kollineationen des Hauptkomplexes

$$\Xi_{01} + \Xi_{23} = 0.$$

Es ist dies, in der Sprache der Nicht-Euklidischen Geometrie (des komplexen Gebietes), die *Gruppe der konformen Transformationen* in einem (je nach Umständen) „sphärischen“ oder „pseudosphärischen“ (oder endlich „quasisphärischen“) Raume — eben dem zu geeigneter absoluter Fläche gehörigen Kontinuum orientierter Punkte.

Wir wollen, ähnlich einer in § 2 eingeführten Bezeichnung, dieser Gruppe selbst das Zeichen G_{10}^* zuordnen und wollen ihr Bild Γ_{10}^* nennen.

Dann haben wir den weiteren Satz:

XX. *Betrachtet man als Raumelemente die orientierten Tangenten der absoluten Fläche, so gehen die Gruppen G_{10} und G_{10}^* durch die Schwenkungen von der Periode vier ineinander über.*

Aus den Vereinen orientierter Elemente auf der absoluten Fläche, die durch die Gruppe G_{10} untereinander vertauscht werden (§ 2, S. 60), gehen hierbei andere Figuren hervor, die man, in einem anderen Sinne, ebenfalls als *Vereine* wird bezeichnen dürfen, und deren Inbegriff nun bei der Gruppe G_{10}^* in Ruhe bleibt. „*Verein orientierter Tangenten der absoluten Fläche*“ heißt jetzt, kurz gesagt, eine analytische Mannigfaltigkeit solcher Tangenten, in der je zwei „konsekutive“ einander schneiden, eine analytische Mannigfaltigkeit also, deren Parameter $l_1 : l_2 : r_1 : r_2$ nunmehr der Bedingung

$$(14) \qquad \boxed{l_1\, d l_2 - l_2\, d l_1 + r_1\, d r_2 - r_2\, d r_1 = 0}$$

genügen, die an Stelle der für Vereine von orientierten Elementen auf der absoluten Fläche geltenden Gleichung

$$l_1\, d l_2 - l_2\, d l_1 - r_1\, d r_2 + r_2\, d r_1 = 0$$

tritt. Wir werden offenbar zweierlei „Vereine“ *auf verschiedene Art* „orientierter“ Tangenten der absoluten Fläche zu unterscheiden haben: Die einen, von denen früher die Rede war, entsprechen Vereinen *orientierter Linienelemente* auf der absoluten Fläche; die anderen aber, mit denen wir es jetzt zu tun haben, gehen durch Schwenkung aus ihnen hervor; sie entsprechen, wenn man von Kegeln und ebenen Tangentenbüscheln absieht, *Tangentenflächen unebener Kurven*, die der absoluten Fläche umschrieben sind[86]).

In ähnlicher Weise, wie zwei der Gleichung (7) genügende, also „*einander schneidende*“ orientierte Tangenten eine Orientierung ihres Schnitt-

[86]) In der Ausdrucksweise der Nicht-Euklidischen Geometrie: Tangentenflächen unebener *isotroper Kurven* („Minimalkurven“).

punktes bestimmen, bestimmen sie auch eine „Orientierung" ihrer Verbindungsebene, also eine *orientierte Ebene.* Wir überdecken nunmehr auch das Kontinuum aller Ebenen mit zwei Blättern, die wir in der (jetzt als Ort von Ebenen gefaßten) absoluten Fläche zusammenhängen lassen. Die Entscheidung über die Orientierung einer Ebene mit Koordinaten $u_0 : u_1 : u_2 : u_3$ erfolgt durch Verfügung über den Wurzelwert $\sqrt{u_0 u_1 - u_2 u_3}$, den wir als eine fünfte Koordinate u_4 den anderen hinzufügen. Die Koordinaten der orientierten Verbindungsebene, oder vielmehr ihre Verhältnisse, können dann, wie folgt, bestimmt werden:

$$\boxed{\begin{aligned} u_0 &= l_2 r_2' + r_2 l_2', & u_1 &= l_1 r_1' + r_1 l_1', \\ u_2 &= -l_2 r_1' - r_1 l_2', & u_3 &= -l_1 r_2' - r_2 l_1', \end{aligned}} \tag{15}$$

$$\boxed{u_4 = \sqrt{u_0 u_1 - u_2 u_3} = (l l') = -(r r').} \tag{16}$$

Zu diesen Formeln ist ähnliches zu sagen wie zu den Formeln (6) und (8), aus denen sie ohne weiteres abgeleitet werden können. Indessen wird die Beziehung zwischen den homogenen Größen $u_0 \ldots u_4$ nicht nur dann gestört, wenn man die orientierten Tangenten $(l : r)$ und $(l' : r')$ dem Umkehrungsprozeß unterwirft, sondern auch schon dann, wenn man sie miteinander vertauscht: Wird die *vereinigte Lage* einer orientierten Ebene und einer orientierten Tangente der absoluten Fläche erklärt durch das folgende, aus (15) und (16) zu entnehmende und zu dem Gleichungssystem (12) analoge System bilinearer Gleichungen,

$$\boxed{\begin{array}{rrrrl} * & u_4 l_2 & + u_0 r_1 & + u_2 r_2 & = 0, \\ -u_4 l_1 & * & + u_3 r_1 & + u_1 r_2 & = 0, \\ -u_0 l_1 & - u_2 l_2 & * & + u_4 r_2 & = 0, \\ -u_3 l_1 & - u_1 l_2 & - u_4 r_1 & * & = 0, \end{array}} \tag{17}$$

so hat man das Vorzeichen von u_4 zu ändern, um eine mit $(l' : r')$ „vereinigte" orientierte Ebene zu erhalten. Die orientierte Ebene erweist sich damit als (gegenüber Γ_{10}) invariant-verbunden mit dem *zyklischen Verein* auf der absoluten Fläche, dem die orientierten Tangenten $(l : r)$ und $(l' : -r')$ angehören.

Die Gesamtheit der orientierten Tangenten ($l : r$ oder $l' : -r'$) der absoluten Fläche in gegebener orientierter Ebene u wird abgebildet auf die Punkte η einer Geraden H, *die dem Komplex* $\Xi_{01} - \Xi_{23} = 0$ *angehört:*

$$\boxed{\begin{aligned} \mathsf{H}_{01} &= u_4, & \mathsf{H}_{02} &= -u_1, & \mathsf{H}_{03} &= u_2, \\ \mathsf{H}_{23} &= u_4, & \mathsf{H}_{31} &= u_0, & \mathsf{H}_{12} &= u_3. \end{aligned}} \tag{18}$$

Wenn Punkt x und Ebene u vereinigt liegen, so werden wir auch sagen, daß die zugehörigen *orientierten* Punkte und Ebenen vereinigt liegen. D. h. wir definieren die *vereinigte Lage eines orientierten Punktes und einer orientierten Ebene* durch das Verschwinden des Wertes

$$(19)\qquad \begin{aligned}(ux) &= u_0x_0 + u_1x_1 + u_2x_2 + u_3x_3\\ &= \left\{\begin{matrix} \Xi_{01}\mathsf{H}_{23} + \Xi_{02}\mathsf{H}_{31} + \Xi_{03}\mathsf{H}_{12}\\ + \Xi_{23}\mathsf{H}_{01} + \Xi_{31}\mathsf{H}_{02} + \Xi_{12}\mathsf{H}_{03}.\end{matrix}\right\} = (\Xi\mathsf{H}).\end{aligned}$$

Punkt und Ebene in vereinigter Lage heißen üblicherweise *ein Flächenelement*. Wir werden also einen orientierten Punkt und eine orientierte Ebene in vereinigter Lage *ein orientiertes Flächenelement* nennen können. (Von der Betrachtung und Benennung der minder interessanten Flächenelemente, von denen *nur* der Punkt oder *nur* die Ebene orientiert ist, wollen wir absehen.)

Die hier benutzten Koordinaten sind noch dieselben wie in § 1, wo es sich darum handelte, mit möglichst wenig Formelapparat die Grundbegriffe einer Geometrie der Lieschen Kreistransformationen herzustellen. In der Regel wird man sich aber besser orthogonaler (oder quasi-orthogonaler) Koordinaten bedienen, die demnach auch mehr in Gebrauch sind. Sie haben den weiteren Vorteil, daß man mit ihrer Hilfe die Nicht-Euklidische und die Euklidische Geometrie eine Strecke weit zusammen behandeln kann. Doch darf man das nicht überschätzen.

Zur Bildung eines sachgemäßen Begriffs „orientierter Flächenelemente" ist im Euklidischen Raume *eine* Quadratwurzel nötig, statt der beiden des Textes.

14. Die quadratische Mannigfaltigkeit M_3^2.

In der vorausgehenden Darlegung ist implizite schon ein Lehrsatz enthalten, der seiner besonderen Bedeutung halber nun auch noch ausdrücklich formuliert werden soll:

XXI. *Wenn zwei orientierte Tangenten der absoluten Fläche einander in einem bestimmten Punkte schneiden, der dieser Fläche nicht angehört, so bestimmen sie zwei verschiedene orientierte Flächenelemente. Die Trennung dieser Figuren entspricht den beiden Möglichkeiten der Anordnung der beiden Tangenten, und erfordert also, wenn diese samt ihren Orientierungen gegeben sind, nur rationale Operationen. Im anderen Falle liefern sie im allgemeinen ein einziges orientiertes Flächenelement, dessen Punkt und Ebene der absoluten Fläche angehören und einander polar zugeordnet sind. Liegen sie aber übereinander, so wird der zugehörige orientierte* **Punkt** *unbestimmt, wenn sie gleich-orientiert sind, und die zugehörige orientierte* **Ebene**, *wenn sie entgegengesetzt-orientiert sind. Für die Erzeugenden der absoluten Fläche tritt beides zugleich ein.*

Wir sind nunmehr da angelangt, wo es zweckmäßig wird, die bisher gebrauchten Bezeichnungen zu ändern und auch den Übergang zum Bildraum anders auszuführen als bisher.

Wir hatten ja schon durch die Substitutionen

$$\xi_0 : \xi_1 : \xi_2 : \xi_3 = l_1 : l_2 : r_1 : r_2 ,$$
$$\eta_0 : \eta_1 : \eta_2 : \eta_3 = l_1' : l_2' : r_1' : r_2'$$

Übereinstimmung unserer Bezeichnung mit der sonst üblichen Bezeichnungsweise der projektiven Koordinaten erreicht. Nun bemerken wir noch, daß wir den im allgemeinen von ξ verschiedenen Bildpunkt η durch seine Nullebene φ in bezug auf den Hauptkomplex (oder das zugehörige Nullsystem) ersetzen können. Beide bestimmen ja einander gegenseitig eindeutig. Wir machen also an Stelle der angeführten Substitutionen nunmehr die folgenden:

$$(1)\qquad \begin{aligned} \xi_0 : \xi_1 : \xi_2 : \xi_3 &= l_1 : \quad l_2 : r_1 : \quad r_2 , \\ \varphi_0 : \varphi_1 : \varphi_2 : \varphi_3 &= l_2' : - l_1' : r_2' : - r_1' . \end{aligned}$$

Der Punkt ξ und die Ebene φ des Bildraumes liegen dann, *nach Voraussetzung*, vereinigt; die Gleichung $(ll') + (rr') = 0$ nimmt jetzt die Form

$$(2)\qquad \boxed{(\varphi\,\xi) = \varphi_0\,\xi_0 + \varphi_1\,\xi_1 + \varphi_2\,\xi_2 + \varphi_3\,\xi_3 = 0}$$

an. Fügen wir hierzu noch die weitere Voraussetzung, daß der Punkt ξ und die Ebene φ in bezug auf keinen der linearen Komplexe

$$\Xi_{01} + \Xi_{23} = 0, \qquad \Xi_{01} - \Xi_{23} = 0,$$

d. h. in bezug auf keines der Nullsysteme

$$\xi_0\,\eta_1 - \xi_1\,\eta_0 + \xi_2\,\eta_3 - \xi_3\,\eta_2 = 0,$$
$$\xi_0\,\eta_1 - \xi_1\,\eta_0 - \xi_2\,\eta_3 + \xi_3\,\eta_2 = 0$$

einander zugeordnet sind, daß also

$$(3)\qquad \begin{aligned} \varphi_0 : \varphi_1 : \varphi_2 : \varphi_3 &\neq \xi_1 : - \xi_0 : \quad \xi_3 : - \xi_2 , \\ \varphi_0 : \varphi_1 : \varphi_2 : \varphi_3 &\neq \xi_1 : - \xi_0 : - \xi_3 : \quad \xi_2 \end{aligned}$$

ist, so kann keine der durch die Wertsysteme (1) zu erklärenden Figuren x, u unbestimmt werden:

XXII. *Jedes Flächenelement* (ξ, φ) *des Bildraumes, das keinem der Komplexe*

$$\Xi_{01} + \Xi_{23} = 0, \qquad \Xi_{01} - \Xi_{23} = 0$$

angehört, bestimmt ***eindeutig*** *ein orientiertes Flächenelement* (x, u), *dessen Punkt und Ebene der absoluten Fläche dann nicht angehören, wenn das gegebene Flächenelement auch keinem der Komplexe*

$$(4)\qquad \lambda\,\Xi_{01} + \mu\,\Xi_{23} = 0$$

angehört, oder also, wenn im zugehörigen Linienbüschel keine Gerade der absoluten Kongruenz liegt. Umgekehrt entspricht jedem orientierten Element (x, u) *dieser Art auch ein Flächenelement* (ξ, φ).

Die zugehörigen Formeln sind:

$$
(5)\qquad \boxed{\begin{aligned}
x_0 &= -\xi_0\varphi_3 + \xi_2\varphi_1, & u_0 &= \xi_3\varphi_0 + \xi_1\varphi_2,\\
x_1 &= -\xi_3\varphi_0 + \xi_1\varphi_2, & u_1 &= -\xi_0\varphi_3 - \xi_2\varphi_1,\\
x_2 &= \xi_0\varphi_2 + \xi_3\varphi_1, & u_2 &= -\xi_2\varphi_0 + \xi_1\varphi_3,\\
x_3 &= -\xi_2\varphi_0 - \xi_1\varphi_3, & u_3 &= -\xi_0\varphi_2 + \xi_3\varphi_1,\\
x_4 &= \xi_0\varphi_0 + \xi_1\varphi_1 = & u_4 &= -\xi_2\varphi_2 - \xi_3\varphi_3.
\end{aligned}}
$$

Unter der Voraussetzung (3) sind die hierdurch gelieferten Verhältnisgrößen

$$x_0 : x_1 : x_2 : x_3 : x_4 \quad \text{und} \quad u_0 : u_1 : u_2 : u_3 : u_4$$

völlig bestimmt, und zwar so, daß immer

$$(6)\qquad (u\,x) = u_0 x_0 + u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3 = 0$$

und

$$(7)\qquad \begin{aligned} x_0 x_1 - x_2 x_3 + x_4^2 &= 0,\\ u_0 u_1 - u_2 u_3 - u_4^2 &= 0 \end{aligned}$$

ist, daß also zwei Wurzelgrößen sich *eindeutig* erklären lassen durch die weiteren Gleichungen

$$(8)\qquad \sqrt{x_2 x_3 - x_0 x_1} = x_4 = u_4 = \sqrt{u_0 u_1 - u_2 u_3}.$$

Es folgt dann noch $x_4 \neq 0$, $u_4 \neq 0$, wenn keine Gerade der absoluten Kongruenz den Punkt ξ und die Ebene φ trägt. Ist aber $x_4 = 0$, $u_4 = 0$, so sind der Punkt x und die Ebene u Pol und Polare (Punkt und Tangentialebene) in bezug auf die absolute Fläche, und *jede solche Figur erscheint* $\infty^{2\cdot 2}$ *mal*[87]): Alle nach (3) zulässigen Paare (ξ, φ), deren Punkt und Ebene derselben Geraden der absoluten Kongruenz angehören, liefern dieselbe Figur (x, u). *Es kommen also hier nicht nur die* $2\cdot\infty^{2\cdot 2}$ *orientierten Elemente nicht zum Vorschein, für die* $x_4 = 0$, $u_4 \neq 0$ *oder* $x_4 \neq 0$ $u_4 = 0$ *ist, sondern es erscheinen auch unter den Elementen, für die* $x_4 = 0$, $u_4 = 0$ *ist, die* $2\cdot\infty^{2\cdot 3}$ *nicht, für die x und u nicht absoluter Pol und absolute Polare sind.* Alle die hiermit ausgeschlossenen Figuren können nur durch Grenzübergänge, aber natürlich auch immer durch solche, erhalten werden.

Ist umgekehrt das orientierte Element (x, u) gegeben, so daß $x_4 \neq 0$, $u_4 \neq 0$ ist, so kann man, nötigenfalls nach proportionaler Änderung, $x_4 = u_4$

---

[87]) Vgl. S. 115.

annehmen, und dann die Gleichungen (5) ansetzen und eindeutig nach den Verhältnissen der Größen ξ_i und φ_k auflösen. Ist aber $x_4 = 0$, $u_4 = 0$, so muß noch

$$x_0 : x_1 : x_2 : x_3 = u_1 : u_0 : -u_3 : -u_2$$

sein, wenn die Gleichungen (5) widerspruchsfrei und dann (auf unendlich viele Arten) auflösbar sein sollen. —

Die Gleichungssysteme (12) und (17) des vorigen Paragraphen liefern nunmehr jedes zwei Systeme von vier linearen Gleichungen:

$$
(9)\quad
\begin{array}{rrrrl}
* & x_4\xi_1 & + x_1\xi_2 & - x_3\xi_3 & = 0, \\
-x_4\xi_0 & * & - x_2\xi_2 & + x_0\xi_3 & = 0, \\
-x_1\xi_0 & + x_2\xi_1 & * & - x_4\xi_3 & = 0, \\
x_3\xi_0 & - x_0\xi_1 & + x_4\xi_2 & * & = 0; \\
* & x_4\varphi_1 & + x_0\varphi_2 & + x_2\varphi_3 & = 0, \\
-x_4\varphi_0 & * & + x_3\varphi_2 & + x_1\varphi_3 & = 0, \\
-x_0\varphi_0 & - x_3\varphi_1 & * & - x_4\varphi_3 & = 0, \\
-x_2\varphi_0 & - x_1\varphi_1 & + x_4\varphi_2 & * & = 0; \\
* & u_4\xi_1 & + u_0\xi_2 & + u_2\xi_3 & = 0, \\
-u_4\xi_0 & * & + u_3\xi_2 & + u_1\xi_3 & = 0, \\
-u_0\xi_0 & - u_3\xi_1 & * & + u_4\xi_3 & = 0, \\
-u_2\xi_0 & - u_1\xi_1 & - u_4\xi_2 & * & = 0; \\
* & u_4\varphi_1 & - u_1\varphi_2 & + u_3\varphi_3 & = 0, \\
-u_4\varphi_0 & * & + u_2\varphi_2 & - u_0\varphi_3 & = 0, \\
u_1\varphi_0 & - u_2\varphi_1 & * & + u_4\varphi_3 & = 0, \\
-u_3\varphi_0 & + u_0\varphi_1 & - u_4\varphi_2 & * & = 0.
\end{array}
$$

Unmittelbar erhält man diese Formeln, wenn man ausdrückt, daß das Bild des orientierten Punktes x, die Gerade des Hauptkomplexes $\Xi_{01} + \Xi_{23} = 0$,

$$
(10)\quad
\boxed{
\begin{array}{lll}
\Xi_{01} = x_4, & \Xi_{02} = x_0, & \Xi_{03} = x_2, \\
\Xi_{23} = -x_4, & \Xi_{31} = -x_1, & \Xi_{12} = x_3,
\end{array}
}
$$

und das Bild der orientierten Ebene u, die Gerade des Nebenkomplexes $\Xi_{01} - \Xi_{23} = 0$,

$$
(11)\quad
\boxed{
\begin{array}{lll}
\mathsf{H}_{01} = u_4, & \mathsf{H}_{02} = -u_1, & \mathsf{H}_{03} = u_3, \\
\mathsf{H}_{23} = u_4, & \mathsf{H}_{31} = u_0, & \mathsf{H}_{12} = u_2,
\end{array}
}
$$

mit dem Punkte ξ und der Ebene φ vereinigt liegen.

Die vier Gleichungssysteme (9) haben alle dieselbe Struktur, sie gehen durch einfache Substitutionen ineinander über. Z. B. erhält man das dritte Gleichungssystem aus dem ersten durch die leicht zu deutenden Substitutionen

$$x_1 = u_0, \quad x_0 = u_1, \quad x_2 = -u_3, \quad x_3 = -u_2, \quad x_4 = i u_4,$$
$$\xi_0 = \eta_0, \quad \xi_1 = \eta_1, \quad \xi_2 = i \eta_2, \quad \xi_3 = i \eta_3.$$

Betrachtet man etwa das erste System (9) als ein System linearer Gleichungen für die Verhältnisgrößen $\xi_0 : \xi_1 : \xi_2 : \xi_3$, so ist seine Determinante

$$(x_0 x_1 - x_2 x_3 + x_4^2)^2;$$

diese vier Gleichungen sind also nur dann verträglich, wenn

$$x_0 x_1 - x_2 x_3 + x_4^2 = 0$$

ist. Das System hat dann den Rang 2 und bestimmt die dem orientierten Punkt x zugeordnete Gerade des Bildraumes als Ort von Punkten ξ. (Das zweite System bestimmt dieselbe Gerade als Ort von Ebenen φ.) Dasselbe System hat, wenn es als ein System von Gleichungen für die Verhältnisgrößen $x_0 : x_1 : x_2 : x_3 : x_4$ betrachtet wird, den Rang 3. Es bestimmt dann, wenn der Punkt ξ gegeben ist, eine auf der Mannigfaltigkeit $x_0 x_1 - x_2 x_3 + x_4^2 = 0$ verlaufende Gerade (siehe Formeln 13), oder eine *orientierte* Tangente unserer absoluten Fläche, usw.

Die Formeln (9) leisten also, zunächst allerdings nur in bezug auf einen Nicht-Euklidischen Raum, wirklich das, was S. Lie und andere, mit Bezug auf die Euklidische Geometrie, durch ein Gleichungspaar

$$(X + iY) + xZ + z = 0, \qquad x(X - iY) - Z - y = 0$$

haben ausdrücken wollen. (Vgl. Lie und Engel, Transformationsgruppen III, 1893, S. 138. Lie und Scheffers, Berührungstransformationen, 1896, S. 452 u. ff.)

Die Gleichungen (9) zeigen unter anderem, daß die Orientierung eines Punktes x oder einer Ebene u, die mit einer schon orientierten Tangente der absoluten Fläche vereinigt liegen, *immer* nur rationale Operationen erfordert. Vor allem aber ergibt sich nunmehr:

Die Zuordnung zwischen den Flächenelementen (ξ, φ) *des Bildraumes und den orientierten Flächenelementen des Raumes der absoluten Fläche ist im Großen wechselweise eindeutig, im Ganzen aber nicht.*

Auf der Seite des Bildraumes sind singuläre Stellen alle $\infty^{2\cdot 4}$ *Elemente* (ξ, φ), *die irgendeinem Komplex des Büschels*

$$\lambda\, \Xi_{01} + \mu\, \Xi_{23} = 0$$

angehören. Diese genügen den miteinander äquivalenten Gleichungen

$$\xi_0 \varphi_0 + \xi_1 \varphi_1 = 0, \qquad \xi_2 \varphi_2 + \xi_3 \varphi_3 = 0.$$

Im Raume der absoluten Fläche sind singuläre Stellen alle $2\cdot\infty^{2\cdot 4}$ *orientierter Elemente, die entweder ihren Punkt oder ihre Ebene auf der absoluten Fläche haben, und natürlich auch die, für die beides zutrifft.*

Daher werden unsere orientierten Elemente (*die für andere Zwecke sehr nützlich sind*) nicht recht zu brauchen sein, wenn es sich darum handeln soll, die Transformationen der Gruppe Γ_{15}, H_{15} aller Kollineationen

und Korrelationen des Bildraumes auf den Raum der absoluten Fläche (also auf den Raum der Nicht-Euklidischen Geometrie) zu übertragen. *Wir werden uns darum bemühen müssen, noch einen dritten Elementbegriff hinzuzufügen, der der Forderung einer vollkommen eindeutigen Zuordnung zu den Elementen* (ξ, φ) *entspricht.* Und für diesen Begriff werden wir dann natürlich auch *ein anderes Wort* (*Blatt*) zu verwenden haben.

Hierzu helfen uns nun eben die Gleichungen (9).

Es war schon früher (§ 1, S. 48) darauf hingewiesen worden, daß die doppelte Überdeckung des Punktkontinuums $\{x\}$ darauf hinauslaufen muß, daß dieses als *Zentralprojektion einer quadratischen Mannigfaltigkeit* M_3^2 des projektiven Kontinuums von vier (komplexen) Dimensionen aufgefaßt wird, wobei als Projektionszentrum der Pol einer linearen Mannigfaltigkeit, wie wir sagen wollen, *eines Flachs* fungiert. Der Komplex der $\infty^{2\cdot 3}$ Geraden auf der quadratischen Mannigfaltigkeit M_3^2 wird dann in den Komplex der Tangenten der Fläche $x_0 x_1 - x_2 x_3 = 0$ projiziert, und zwar erscheint dabei jede Tangente zweimal, mit Ausnahme derer, die in dem ausgezeichneten Flach liegen, d. h. mit Ausnahme der Erzeugenden unserer „absoluten Fläche“ $x_0 x_1 - x_2 x_3 = 0$. Die *orientierte* Tangente dieser Fläche aber kann dann offenbar als Projektion einer *bestimmten* Geraden aufgefaßt werden, die auf der Mannigfaltigkeit verläuft.

Eine hierzu geeignete quadratische Mannigfaltigkeit haben wir nun schon:

$$(12) \qquad x_0 x_1 - x_2 x_3 + x_4^2 = 0.$$

Projektionszentrum ist dann der Pol des Flachs $x_4 = 0$. *Und auch die einer orientierten Tangente der absoluten Fläche zugeordnete Gerade läßt sich angeben.*

Wenn man nämlich die Verhältnisgrößen ξ_i (oder φ_k) als Parameter der Projektion betrachtet, so wird die gesuchte Gerade ja dargestellt durch das erste (oder zweite) System der linearen Gleichungen unter (9). Man hat daher unter den Lösungen (x) dieser Gleichungen nur jedesmal zwei verschiedene auszuwählen, solche etwa, wie sie sich aus zweien der Annahmen

$$x_0 = 0, \quad x_1 = 0, \quad x_2 = 0, \quad x_3 = 0, \quad x_4 = 0$$

ergeben, und die gefundenen Werte zu Linienkoordinaten zu verbinden.

Man erhält dann, je nachdem man dem Punkte ξ des Bildraumes eine Gerade X oder der Ebene φ eine Gerade Y zuordnet, die Linienkoordinaten der gesuchten, auf der Mannigfaltigkeit M_3^2 (Nr. 12) ver-

laufenden Geraden in der einen oder anderen der beiden folgenden Formen ausgedrückt:

$$(13)\qquad \boxed{\begin{array}{llll}
X_{01} = & \xi_0\xi_1 + \xi_2\xi_3, & Y_{01} = & -\varphi_0\varphi_1 - \varphi_2\varphi_3, \\
X_{02} = & \xi_0^2, & Y_{02} = & \varphi_1^2, \\
X_{03} = & \xi_2^2, & Y_{03} = & \varphi_3^2, \\
X_{04} = & -\xi_0\xi_2, & Y_{04} = & -\varphi_1\varphi_3, \\
X_{12} = & -\xi_3^2, & Y_{12} = & -\varphi_2^2, \\
X_{13} = & -\xi_1^2, & Y_{13} = & -\varphi_0^2, \\
X_{14} = & -\xi_1\xi_3, & Y_{14} = & -\varphi_0\varphi_2, \\
X_{23} = & -\xi_0\xi_1 + \xi_2\xi_3, & Y_{23} = & \varphi_0\varphi_1 - \varphi_2\varphi_3, \\
X_{24} = & -\xi_0\xi_3, & Y_{24} = & \varphi_1\varphi_2, \\
X_{34} = & -\xi_1\xi_2, & Y_{34} = & \varphi_0\varphi_3.
\end{array}}$$

Diese beiden Reihen von Formeln, deren jede die geraden Linien auf unserer quadratischen Mannigfaltigkeit *erschöpfend* darstellt, sind natürlich nur formal voneinander verschieden, sie gehen ja durch die Zuordnung

$$\varphi_0 : \varphi_1 : \varphi_2 : \varphi_3 = -\xi_1 : \xi_0 : -\xi_3 : \xi_2$$

ineinander über. Drückt man aber aus, daß die Gerade X und die Gerade Y einander schneiden, so sieht man, welchen Vorteil es hat, solche Linienkoordinaten zwiefach dargestellt zu haben. Es findet sich nämlich dann, *daß die Bedingung des Schneidens von X und Y bei dieser Darstellung sich gerade auf die Bedingung der vereinigten Lage von ξ und φ reduziert.* In der Tat, setzen wir wie zuvor

$$(\varphi\xi) = \varphi_0\xi_0 + \varphi_1\xi_1 + \varphi_2\xi_2 + \varphi_3\xi_3,$$

verstehen wir zweitens unter x', x'' und y', y'' zwei Paare verschiedener Punkte, die auf X und Y liegen, so daß

$$X_{ik} = x_i' x_k'' - x_k' x_i'', \qquad Y_{ik} = y_i' y_k'' - y_k' y_i''$$

wird, und verstehen wir drittens nnter $z = z(\zeta, \omega)$ irgendeinen Punkt von M_3^2, der nach der Regel (5) durch seine Parameter dargestellt ist, so ergibt sich nach leichter Rechnung

$$(14)\qquad \boxed{[x' x'' y' y'' z] = -\begin{vmatrix} \xi_0 & -\varphi_1 & \zeta_0 & -\omega_1 \\ \xi_1 & \varphi_0 & \zeta_1 & \omega_0 \\ \xi_2 & -\varphi_3 & \zeta_2 & -\omega_3 \\ \xi_3 & \varphi_2 & \zeta_3 & \omega_2 \end{vmatrix} \cdot (\varphi\xi).}$$

Die Determinante links[88]) *wird also durch Substitution der Parameter der Figuren X, Y und z reduzibel.* Ihr Wert ist Null erstens, wenn der Punkt z mit den Geraden X und Y durch ein Flach verbunden werden kann. Das wird ausgedrückt durch das Verschwinden des ersten Faktors rechts; die Punkte ξ und ζ liegen dann in einer Ebene mit den Nullpunkten der Ebenen φ und ω in bezug auf den absoluten Komplex. Da das durch passende Wahl von z oder also von ζ und ω immer vermieden werden kann, wenn X und Y einander nicht gerade überdecken, so stellt das Verschwinden des zweiten Faktors, also das Bestehen der Gleichung $\boldsymbol{(}\varphi\xi\boldsymbol{)} = 0$, die Bedingung des Schneidens von X und Y *reinlich* dar.

Die Formeln (13) und (14) enthalten die Ausführung eines Gedankens, der wegen seiner Bedeutung für das Folgende auch noch in Worten abgefaßt werden soll:

XXIII. *Die $\infty^{2\cdot3}$ Punkte irgendeiner nicht-singulären quadratischen Mannigfaltigkeit im projektiven Kontinuum R_4 lassen sich nicht nur birational, sondern auch* v o l l k o m m e n *eindeutig-umkehrbar und stetig den $\infty^{2\cdot3}$ Geraden* (*irgend*) *eines nicht-singulären linearen Linienkomplexes des R_3 zuordnen. Mit dieser Abbildung sind zwei andere verbunden, deren eine den Punkten ξ und deren andere den Ebenen φ des Raumes R_3, ebenfalls birational und vollkommen eindeutig-umkehrbar und stetig, die $\infty^{2\cdot3}$ geraden Linien zuordnet, die auf der Mannigfaltigkeit M_3^2 liegen.* (*Der Komplex dieser Geraden ist also Träger eines quaternären Gebietes.*)

Geraden „erster Schicht" $X(\xi)$ und „zweiter Schicht" $Y(\varphi)$, die einander schneiden (*und insbesondere einander möglicherweise auch überdecken*) *entsprechen Punkt und Ebene in vereinigter Lage.*

Den Punkten ξ und Ebenen φ d e r s e l b e n *Geraden Ξ entsprechen auf M_3^2 die quadratischen Regelscharen einer Fläche* 2. *Ordnung. Diese sind im allgemeinen voneinander verschieden, sie fallen aber zusammen und überdecken einander in den Geraden eines Kegels, wenn der Ort von ξ und φ dem linearen Komplex angehört.*

Dieser Linienkomplex ist der Hauptkomplex der besprochenen Abbildung.

Daß man den $\infty^{2\cdot3}$ Geraden eines linearen Komplexes die Punkte einer M_3^2 im R_4 zuordnen kann, ist bekannt genug. Das ist ja eine Selbstverständlichkeit im Rahmen der Plückerschen Liniengeometrie. Damit hat man auch schon die doppelte

---

[88]) Die Determinante mit dem Diagonalglied $x_0' x_1'' y_2' y_3'' z_4$. Wir bedienen uns weiterhin scharfer Klammern zur Darstellung *quinärer* Invariantenbildungen, während die quaternären, wie bisher, durch *fette runde* Klammern bezeichnet werden, z. B. $\boldsymbol{(}\varphi\xi\boldsymbol{)}$, $\boldsymbol{(}ux\boldsymbol{)}$.

Beziehung der Geraden auf M_3^2 zu *Punkten* ξ und *Ebenen* φ, und von da führt ein leichter Schritt zu dem weiteren Gedanken, den ganzen Komplex jener Geraden mit zwei „Schichten" zu überdecken und sie als Geraden $X(\xi)$ und Geraden $Y(\varphi)$ zu unterscheiden. Indessen scheint diesen weiteren Schritt, trotz vielfältiger Behandlung des Stoffs, bis jetzt noch niemand getan zu haben: So fehlte von vornherein ein zu klarer Einsicht in den Sachverhalt unerläßliches Stück der Theorie. (Siehe § 15.)

Der vorliegende Fall ist darum lehrreich, weil man hier an einem drastischen Beispiel sieht, wie vieles auf sachgemäße Gestaltung des Formelapparates ankommt. Hätte man sich nämlich nicht mit ganz unvollkommenen Ansätzen begnügt und selbst die zunächst in Betracht kommenden Rechnungen nicht nur stückweise durchgeführt, so hätte man gar nicht übersehen können, daß man mit Übertragung des gewöhnlichen Begriffs der Berührung auf die Kugelgeometrie in ein falsches Geleise geraten war. Aber man hat ja nicht einmal die behauptete Zuordnung der „Elemente" (ξ, φ) zu (vermeintlich ebenso beschaffenen) „Elementen" des Kugelraumes analytisch auszudrücken versucht. So blieben die Widersprüche unbemerkt, mit denen Lies Theorie durchsetzt ist.

Auf ein (im Gegensatz zu bloßem Rechnen) begriffliches und womöglich auch anschauungsmäßiges Denken kann natürlich nicht verzichtet werden. Es versteht sich, daß dieses Denkverfahren (das zum Beispiel den Lehrsatz XXIII ohne weiteres liefert) die Führung haben muß. Indessen hat sich gezeigt, daß die Mathematiker, die ihm, unter dem Namen einer synthetischen Geometrie, eine fast ausschließliche Pflege haben zuteil werden lassen, die damit verbundenen Schwierigkeiten meistens sehr unterschätzt haben. Es ist unvorsichtig, ohne Not auf die Kontrollen zu verzichten, die die Analysis zu bieten vermag. Und übrigens glaube ich die Meinung vertreten zu können, daß in einer Disziplin wie der Kugelgeometrie die algebraischen Tatsachen den Kern der Sache bilden. Fehlen sie, so schwebt alles in der Luft; bestenfalls ruht es auf Axiomen, die ihrerseits in der Luft schweben. Die Algebra ist aber *hinreichend* zur Definition aller hier in Betracht kommenden Begriffe, und tatsächlich ist sie uns, wie eben schon angedeutet wurde, auch *notwendig*, notwendig zur wirklichen Beherrschung so manches Begriffssystems der Geometrie.

S. Lie war mit den Fehlern des Autodidakten behaftet, er war aber auch einer der genialsten Mathematiker, die je gelebt haben. Er besaß etwas, und zwar im reichsten Maße, das nie häufig war, und jetzt noch seltener geworden ist, eine schöpferische Phantasie. Spätere Generationen werden diesen weitblickenden Geist besser zu würdigen wissen als die gegenwärtige, die am Mathematiker lediglich den Scharfsinn zu schätzen versteht, und deren Spezialistentum die Einheit der mathematischen Wissenschaft, der doch überall bemerkbare Zusammenhang von allem mit allem, nahezu ganz aus dem Gesichtsfeld entschwunden ist. Und jene Kommenden, „a cui man' la face verrà che scórse da le nostre", werden auch das Reinigungswerk vollenden, mit dem hier ein bescheidener Anfang gemacht ist. Sie werden der Theorie der Transformationsgruppen den Platz in der Wissenschaft zu sichern wissen, den die Großartigkeit ihrer Anlage verdient.

Wir wollen einen ebenen Schnitt der Mannigfaltigkeit M_3^2, und ebenso den linearen Raum, *das Flach*, das ihn enthält, *orientiert* nennen, wenn seine zwei Scharen von Erzeugenden als Scharen von „Geraden X" und „Geraden Y" unterschieden (oder im Grenzfall doppelt gesetzt) und auf die beschriebene Art Punkten und Ebenen des Bildraumes zugeordnet sind.

Wir setzen ferner zur Abkürzung

$$[w\,x] = w_0 x_0 + w_1 x_1 + w_2 x_2 + w_3 x_3 + w_4 x_4 .$$

Die Gleichung $[w\,x] = 0$ bezeichnet dann, wenn x als veränderlich gedacht wird, irgendein Flach w. Es gilt dann der Satz:

XXIV. *Die Orientierung eines Flachs — also die Trennung der zwei Scharen von Erzeugenden auf der von ihm ausgeschnittenen Fläche* 2. *Ordnung — erfolgt durch Entscheidung über den Wert der Wurzelgröße*

$$w_5 = \sqrt{4(w_0 w_1 - w_2 w_3) + w_4^2} .$$

Ein Flach nämlich, für das diese Wurzelgröße den Wert Null hat, berührt die Mannigfaltigkeit M_3^2 und ist schon orientiert. Im anderen Falle aber können wir uns das Flach durch zwei der Geraden X, X' bestimmt denken, die einander nicht schneiden, und ebenso durch zwei Geraden Y, Y'. Im ersten Falle ist

$$\xi_0 \xi_1' - \xi_2 \xi_3' + \xi_2 \xi_3' - \xi_3 \xi_2' \neq 0,$$

im zweiten

$$\varphi_0 \varphi_1' - \varphi_2 \varphi_3' + \varphi_2 \varphi_3' - \varphi_3 \varphi_2' \neq 0.$$

Für die Koordinaten des Flachs erhalten wir beide Male gleichbedeutende Ausdrücke durch Linienkoordinaten des Bildraumes

$$\Xi_{01} = \xi_0 \xi_1' - \xi_1 \xi_0', \quad \text{usw.},$$

oder

$$\Xi_{01} = \varphi_2 \varphi_3' - \varphi_3 \varphi_2', \quad \text{usw.},$$

nämlich

$$(15) \quad \boxed{w_0 = \Xi_{31}, \quad w_1 = -\Xi_{02}, \quad w_2 = \Xi_{12}, \quad w_3 = \Xi_{03}, \quad w_4 = -\Xi_{01} + \Xi_{23}.}$$

Man kann also die soeben schon angeführte Wurzelgröße durch die Formel

$$(16) \qquad \boxed{w_5 = \sqrt{4(w_0 w_1 - w_2 w_3) + w_4^2} = \Xi_{01} + \Xi_{23}}$$

genauer erklären. Damit ist dem System von sechs Verhältnisgrößen

$$w_0 : w_1 : w_2 : w_3 : w_4 : w_5$$

eine *bestimmte* Gerade des Bildraumes zugeordnet:

$$(17) \qquad \boxed{\begin{aligned} \Xi_{01} &= \tfrac{1}{2}(-w_4 + w_5), & \Xi_{02} &= -w_1, & \Xi_{03} &= w_3, \\ \Xi_{23} &= \tfrac{1}{2}(\ \ w_4 + w_5), & \Xi_{31} &= \ \ w_0, & \Xi_{12} &= w_2. \end{aligned}}$$

Den Punkten dieser Geraden entsprechen dann die Geraden X, die auf

dem Flach w liegen, und ihren Ebenen ebenso die Geraden Y. Ändert man das Vorzeichen von w_5, so erhält man eine andere Gerade

$$\Xi_{01}^* : \Xi_{02}^* : \Xi_{03}^* : \Xi_{23}^* : \Xi_{31}^* : \Xi_{12}^* = -\Xi_{23} : \Xi_{02} : \Xi_{03} : -\Xi_{01} : \Xi_{31} : \Xi_{12}.$$

Diese ist das Spiegelbild der ersten im Nullsystem des Hauptkomplexes. Durch Änderung des Wertes der Wurzelgröße w_5 werden also die beiden Scharen von Geraden X und Y, die auf dem Flach liegen, vertauscht.

Was wir *Orientierung einer Ebene* u (im Flach $x_4 = 0$) genannt haben, ist offenbar ein Spezialfall der nunmehr ausgeführten algebraischen Operation. Die Formeln (16) gehen nämlich in die Formeln (11) über, wenn man

$$(18) \qquad w_0 = u_0, \quad w_1 = u_1, \quad w_2 = u_2, \quad w_3 = u_3, \quad w_4 = 0, \quad w_5 = 2u_4$$

setzt. Die Deutung dieses Sachverhalts liegt auf der Hand. Die Ebene u des Flachs $x_4 = 0$ wird aus diesem ausgeschnitten durch ein Flach w, das das Projektionszentrum

$$0:0:0:0:1$$

enthält; u ist also Projektion eines *Hauptschnittes* oder *Zentralschnittes* von M_3^2; indem man diesen Hauptschnitt oder das zugehörige Flach orientiert, wird auch die Ebene u orientiert, und umgekehrt.

Implizite haben wir hiermit auch schon den Begriff des orientierten Flächenelementes auf die Mannigfaltigkeit M_3^2 übertragen:

Ein orientiertes Flächenelement

$$x_0 : x_1 : x_2 : x_3 : x_4, \qquad u_0 : u_1 : u_2 : u_3 : u_4$$

von M_3^2 besteht aus irgendeinem Punkt x von M_3^2 und aus einem orientierten Zentralschnitt, der den Punkt x enthält.

$$\{(u x) = u_0 x_0 + u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3 = 0\}$$

Jedes *orientierte* Flächenelement im Raume oder Flach $x_4 = 0$ ist infolge unserer Festsetzungen Projektion eines *bestimmten* orientierten Flächenelementes auf M_3^2.

Natürlich läßt sich auch der Schwenkungsprozeß in die Geometrie auf M_3^2 übertragen. Insbesondere folgt:

XXV. *Durch eine Schwenkung von der Periode vier geht aus jedem zyklischen Verein orientierter Tangenten der Fläche*

$$x_0 x_1 - x_2 x_3 = 0, \qquad x_4 = 0$$

ein auf M_3^2 verlaufender Kegel 2. Ordnung hervor (und umgekehrt aus jedem solchen Kegel wieder der entsprechende zyklische Verein durch die andere — entgegengesetzte — Schwenkung der Periode vier).

In derselben Zuordnung entspricht jeder unebenen analytischen orientierten Kurve auf der genannten Fläche eine analytische Kurve, die mit allen ihren Tangenten auf M_3^2 liegt, und umgekehrt.

Jeder der genannten Kegel und jede der genannten Kurven auf M_3^2 ist als „*Verein*" von Geraden auf M_3^2 zu bezeichnen. Die Kurven dieser Art sind, wie man sagen darf, *dreifach gekrümmt*, d. h. keine von ihnen ist in einem Flach

$$w_0 x_0 + w_1 x_1 + w_2 x_2 + w_3 x_3 + w_4 x_4 = 0$$

enthalten.

Die einfachsten Kurven dieser Art sind rationale (sogenannte Normal-) Kurven der 4. Ordnung. Sie bilden ein analytisches Kontinuum und sind in $\infty^{2\cdot 7}$ Exemplaren vorhanden; ihre Bilder in R_3 sind $\infty^{2\cdot 7}$ Kurven 3. Ordnung — und zwar alle solchen Kurven —, die in dem linearen Linienkomplex $\Xi_{01} + \Xi_{23} = 0$ liegen.

Natürlich kann man, *mutatis mutandis*, in dem Satze XXV den ebenen Schnitt $x_4 = 0$ von M_3^2 durch irgendeinen anderen ebenen Schnitt ersetzen, der zwei getrennte Scharen von Erzeugenden hat. Und übrigens läßt sich diese letzte Einschränkung noch aufgeben, wobei die Theorie dann allerdings eine andere Gestalt bekommt.

Beiläufig entnimmt man den Formeln (13) schließlich noch den Satz:

XXVI. *In der Zuordnung $\xi \to X$ ($\varphi \to Y$) entspricht den Punkten ξ irgendeiner Fläche* 2. *Ordnung* (*den Ebenen φ irgendeiner Fläche* 2. *Klasse*) *des Bildraumes R_3 eine auf M_3^2 gelegene Kongruenz von $\infty^{2\cdot 2}$ Geraden, die aus dem Komplex aller auf M_3^2 verlaufenden $\infty^{2\cdot 3}$ geraden Linien durch eine* l i n e a r e *Gleichung zwischen den Koordinaten der Geraden X(Y) ausgeschnitten wird. Umgekehrt entspricht im Bildraume jeder solchen Schnittfigur eine Fläche* 2. *Ordnung* (2. *Klasse*)[89].

---

[89]) Dieser Lehrsatz ist, wie der Satz XXIII, ein Ausschnitt aus einem inhaltsreicheren Satz der Geometrie in fünf Dimensionen. Im R_5 gibt es $\binom{6}{3} = 20$ linear-unabhängige lineare Komplexe von Ebenen. Durch jede nicht singuläre M_4^2 in R_5 wird nun dieses System von Komplexen in zwei Systeme von je 10 linear-unabhängigen Komplexen zerlegt. Die $2\cdot\infty^{2\cdot 3}$ auf M_4^2 liegenden Ebenen tragen spezielle Komplexe dieser beiden Systeme. Ordnet man in bekannter Weise den Punkten und Ebenen des R_3 die $2\cdot\infty^{2\cdot 3}$ Ebenen auf M_4^2 zu, so werden damit auch den Flächen 2. Klasse und den Flächen 2. Ordnung die Komplexe jener zwei linearen Systeme stetig und eindeutig-umkehrbar zugeordnet. Und zwar entsprechen einer Fläche 2. Klasse und einer Fläche 2. Ordnung, *die konjugiert sind*, Komplexe, *die konjugiert sind*, d. h. solche, deren bilineare projektive Invariante den Wert Null hat.

15. Vereine von Flächenelementen und Blättern.

In der bis jetzt durchgeführten Untersuchung ließen wir den Punkten ξ und Ebenen φ des Bildraumes die Geraden X und Y auf M_3^2 entsprechen; den Flächenelementen (ξ, φ) entsprechen dann die Paare von Geraden (X, Y), die einander schneiden oder überdecken; und den Geraden des Komplexes $\Xi_{01} + \Xi_{23} = 0$ entsprechen die Punkte x auf M_3^2.

Nunmehr wollen wir die Graßmannschen Koordinaten der *Ebene U* bestimmen, die die Geraden X und Y verbindet. Da auf dieser Ebene einmal die Gerade X und die Spur von Y im Flach $x_4 = 0$, der Punkt

$$\varphi_1 \varphi_3 : \varphi_0 \varphi_2 : -\varphi_1 \varphi_2 : -\varphi_0 \varphi_3 : 0,$$

und ebenso die Gerade Y und die Spur von X, der Punkt

$$\xi_0 \xi_2 \ : \ \xi_1 \xi_3 \ : \ \xi_0 \xi_3 \ : \ \xi_1 \xi_2 \ : \ 0$$

liegen, so kann diese Rechnung leicht durchgeführt werden, wenn X und Y voneinander verschieden sind und die genannten Punkte nicht unbestimmt werden.

Es findet sich nun, daß die Koordinaten der Ebene U alle den gemeinsamen Faktor

$$\Omega = \varphi_0 \xi_0 + \varphi_1 \xi_1 = -\varphi_2 \xi_2 - \varphi_3 \xi_3 \tag{1}$$

haben. Nach Beseitigung dieses Faktors bleiben Ausdrücke zurück, die wiederum bilineare Funktionen der Größen ξ_i, φ_k *sind, und auch in den bezeichneten Grenzfällen nicht illusorisch werden.*

Tatsächlich werden alle $\infty^{2 \cdot 5}$ *Tangentialebenen der Mannigfaltigkeit* M_3^2 *durch die so entstehenden Formeln dargestellt und überall-stetig den Flächenelementen* (ξ, φ) *des Bildraumes zugeordnet.*

Führen wir neben der Bezeichnung der Graßmannschen Ebenenkoordinaten durch drei Indizes noch die korrelative Bezeichnung durch zwei Indizes ein, so erhalten wir die Formeln

$$\boxed{\begin{array}{l} U_{01} = \quad U_{234} = -\xi_0 \varphi_0 - \xi_2 \varphi_2 = \quad \xi_1 \varphi_1 + \xi_3 \varphi_3, \\ U_{23} = \quad U_{014} = \quad \xi_0 \varphi_0 + \xi_3 \varphi_3 = -\xi_1 \varphi_1 - \xi_2 \varphi_2, \\ U_{02} = -U_{134} = \quad \xi_1 \varphi_0, \quad U_{03} = U_{124} = \xi_3 \varphi_2, \\ U_{31} = \quad U_{024} = -\xi_0 \varphi_1, \quad U_{12} = U_{034} = \xi_2 \varphi_3, \\ \qquad U_{04} = -U_{123} = -\xi_1 \varphi_2 - \xi_3 \varphi_0 (= -u_0), \\ \qquad U_{14} = \quad U_{023} = \quad \xi_0 \varphi_3 + \xi_2 \varphi_1 (= -u_1), \\ \qquad U_{24} = -U_{013} = -\xi_1 \varphi_3 + \xi_2 \varphi_0 (= -u_2), \\ \qquad U_{34} = \quad U_{012} = \quad \xi_0 \varphi_2 - \xi_3 \varphi_1 (= -u_3). \end{array}} \tag{2}$$

Umgekehrt wird jede Tangentialebene U von M_3^2 auf zwei Arten durch diese Formeln geliefert, mit Ausnahme derer, die Geraden $X = Y$ auf M_3^2 polar zugeordnet sind und nur einmal erscheinen. Die entsprechenden Flächenelemente des Bildraumes (ξ, φ) und (ξ^*, φ^*) sind einander in bezug auf den Hauptkomplex (oder das zugehörige Nullsystem) korrelativ zugeordnet.

Wenn nämlich die Ebene U die Mannigfaltigkeit M_3^2 in zwei verschiedenen Geraden durchsetzt, so kann noch jede von diesen die Rolle der Geraden X übernehmen, die einem Punkt ξ zugeordnet wird, während dann die andere, als „Gerade Y" einer Ebene φ zugeordnet werden muß. In der Tat bleiben die Werte U_{ijk} sogar völlig ungeändert, wenn man die Parameter (ξ, φ) durch die ihnen im Nullsystem

$$\xi_0 \eta_1 - \xi_1 \eta_0 + \xi_2 \eta_3 - \xi_3 \eta_2 = 0$$

korrelativ entsprechenden Parameter

$$(3) \qquad \begin{aligned} (\xi_0^*, \ \xi_1^*, \ \xi_2^*, \ \xi_3^*) &= (\varphi_1, \ -\varphi_0, \ \varphi_3, \ -\varphi_2), \\ (\varphi_0^*, \ \varphi_1^*, \ \varphi_2^*, \ \varphi_3^*) &= (-\xi_1, \ \xi_0, \ -\xi_3, \ \xi_2) \end{aligned}$$

ersetzt[90]).

Wir haben also hier wieder Anlaß zu einem Orientierungsprozeß: Nach Entscheidung über die Werte gewisser Quadratwurzeln werden sich die zwei Schnittlinien einer Berührungsebene U von M_3^2, deren Koordinaten der aus (2) folgenden Gleichung

$$(4) \qquad U_{01}^2 + U_{23}^2 + 2\,U_{03}\,U_{12} - 2\,U_{02}\,U_{31} - U_{04}\,U_{14} + U_{24}\,U_{34} = 0$$

genügen müssen, reinlich trennen lassen. Allerdings werden wir hier nun statt einer Quadratwurzel deren fünf betrachten müssen; doch sind diese zu zweien voneinander abhängig und lassen also im ganzen *zwei* Wertesysteme zu. Nach Entscheidung über das System dieser Wurzelwerte (bei einem der Gleichung (4) genügenden Größensystem) werden wir 16 lineare Gleichungen für die Produkte $\xi_i \varphi_k$ vor uns haben, die widerspruchsfrei sind, und also diese Produkte und somit auch den Punkt ξ und die Ebene φ zu bestimmen erlauben.

---

[90]) Betrachtet man, wie zuvor, die M_3^2 in R_4 als Schnittfigur einer M_4^2 in R_5, so schneiden die $\infty^{2 \cdot 5}$ R_3, die die M_4^2 in Geraden berühren (und sie also in je zwei Ebenen durchsetzen), den R_4 in Ebenen, die M_3^2 in zwei *Geraden* treffen, also berühren. Diese $\infty^{2 \cdot 5}$ Flache sind offenbar den Elementen (ξ, φ) *eindeutig* zugeordnet. Einer Tangentialebene von M_3^2 aber entsprechen *zwei* Flächenelemente, da man jede Gerade auf M_3^2 auf zwei Arten durch eine auf M_4^2 verlaufende Ebene ausschneiden kann.

Wurzelgrößen, die diesem Zwecke dienen können, sind:

$$(5)\qquad \boxed{\begin{aligned} U_{05} &= \sqrt{U_{04}^2 - 4\,U_{02}\,U_{03}} = \xi_1\varphi_2 - \xi_3\varphi_0,\\ U_{15} &= \sqrt{U_{14}^2 + 4\,U_{31}\,U_{12}} = -\xi_0\varphi_3 + \xi_2\varphi_1,\\ U_{25} &= \sqrt{U_{24}^2 + 4\,U_{02}\,U_{12}} = \xi_1\varphi_3 + \xi_2\varphi_0,\\ U_{35} &= \sqrt{U_{34}^2 - 4\,U_{31}\,U_{03}} = -\xi_0\varphi_2 - \xi_3\varphi_1,\\ U_{45} &= 2\sqrt{U_{04}\,U_{14} - U_{24}\,U_{34}}\\ &= 2(\xi_0\varphi_0 + \xi_1\varphi_1) = -2(\xi_2\varphi_2 + \xi_3\varphi_3). \end{aligned}}$$

Durch sachgemäße Festlegung dieser Wurzelwerte, deren Abhängigkeit in den fünf Gleichungen

$$(6)\qquad \boxed{U_{kl}\,U_{i5} + U_{li}\,U_{k5} + U_{ik}\,U_{l5} = 0}$$

enthalten ist[91]), wird also die Tangentialebene U von M_3^2 *orientiert*, ihre Schnittlinien mit M_3^2 werden in eine bestimmte Folge (X, Y) gesetzt, und *bestimmte* Figuren ξ, φ werden ihnen zugeordnet. In der doppelten Überdeckung des Kontinuums der Tangentialebenen von M_3^2 durch die orientierten Tangentialebenen fungieren dann die Ebenen U, die M_3^2 in einer einzigen Geraden $X = Y$ treffen, als Verzweigungsfiguren.

Die orientierten Tangentialebenen von M_3^2 entsprechen also ***eindeutig*** *den Flächenelementen des Bildraumes.* Sie sind von zweierlei Beschaffenheit: die einen haben einen bestimmten Berührungspunkt x, der durch

---

[91]) Danach lassen sich die Produkte von je zweien der Größen U_{i5} rational darstellen; z. B. ist

$$U_{15}\cdot U_{25} - U_{14}\cdot U_{24} = 2\,U_{12}\,(U_{01} - U_{23}).$$

Die Größen U_{ik} sind zu deuten als R_4-Koordinaten in dem Raume $\{x_0 : \ldots : x_5\}$, von dem in der vorigen Anmerkung die Rede war. Die zugehörigen R_4 berühren dann die M_4^2, deren Punktgleichung

$$(x_0\,x_1 - x_2\,x_3) + x_4^2 - x_5^2 = 0$$

und deren R_4-Gleichung

$$4\,(u_0\,u_1 - u_2\,u_3) + u_4^2 - u_5^2 = 0$$

ist, in geraden Linien. (Vgl. § 14, Nr. 12, wo $x_5 = 0$ ist, und Nr. 16).

Zwischen den 15 Größen U_{ik} bestehen im ganzen 21 linear-unabhängige quadratische Relationen, von denen 15 die Plückerschen sind. Zwischen den zehn Größen X_{ik} bestehen 20 solche Relationen, darunter 5 Plückersche. Alle Abhängigkeiten höheren Grades zwischen diesen oder jenen Größen lassen sich aus quadratischen zusammensetzen.

Auch die $2\cdot\infty^{2\cdot 3}$ auf der M_4^2 verlaufenden Ebenen lassen sich sehr einfach durch die Parameter ξ_i oder φ_k darstellen.

die Formeln (5) in § 14 geliefert wird[92]), während für die übrigen, die wir *singulär* nennen wollen, der Berührungspunkt längs einer Geraden

$$(7) \qquad X = Y \; \{\varphi_0 : \varphi_1 : \varphi_2 : \varphi_3 = -\xi_1 : \xi_0 : -\xi_3 : \xi_2\}$$

unbestimmt wird. Bezeichnen x', x'', x''' irgend drei linear-unabhängige Punkte einer solchen Ebene U, und ist z ein ganz beliebiger Punkt, so ist der Ort der Punkte x völlig bestimmt durch die Gleichung von M_3^2 in Verbindung mit den fünf linearen Gleichungen, die sich ergeben, wenn man in der Entwickelung der Determinante

$$[x' x'' x''' x z]$$

U_{ikj} an Stelle der dreizeiligen Unterdeterminanten $|x_i' x_j'' x_k'''|$ schreibt und dann die Koeffizienten von $z_0 \ldots z_4$ einzeln gleich Null setzt. In beiden Fällen aber, mag nun der Berührungspunkt x bestimmt sein oder nicht, besteht — selbstverständlicherweise — die Gleichung

$$(8) \qquad [x' x'' x''' x z] = 0$$

für alle z.

Lassen wir jetzt die Punkte x', x'', x''' und x variieren, doch so, daß sie ihre gegenseitige Beziehung behalten, so sehen wir, daß die Gleichung (oder vielmehr das Gleichungssystem)

$$[dx' x'' x''' x z] + [x' dx'' x''' x z] + [x' x'' dx''' x z] = 0$$

oder also die Gleichung

$$(9) \qquad dU_{012} \cdot (x_3 z_4 - x_4 z_3) \pm \ldots - dU_{234} \cdot (x_0 z_1 - x_1 z_0) = 0$$

die Gleichung (das Gleichungssystem)

$$(10) \qquad [x' x'' x''' dx \, z] = 0$$

nach sich zieht, und umgekehrt.

Den Inhalt der Gleichung (9) kann man in bekannter Weise so in Worte fassen, daß man sagt, „daß die zu U benachbarte Ebene $U + dU$ ebenfalls noch durch den Punkt x geht" und ebenso läßt sich der Inhalt der Gleichung (8) dadurch beschreiben, daß man auch noch „den zu x benachbarten Punkt $x + dx$" „auf U liegen" läßt. Wir werden auch sagen, daß im Falle des Bestehens der Gleichungen (9) und (10) — immer unter Voraussetzung des Bestehens von (8) — „konsekutive" Tangentialebenen von M_3^2 *vereinigt liegen*. Von einer analytischen Mannigfaltigkeit solcher Ebenen aber, die durchweg die Gleichungen (9) und (10) erfüllt, werden wir sagen, daß sie einen *Verein* bilde. Endlich wollen wir, um schleppende Rede-

---

[92]) Es ist

$$U_{05} = x_1, \quad U_{15} = x_0, \quad U_{25} = -x_3, \quad U_{35} = -x_2, \quad U_{45} = 2x_4.$$

wendungen zu vermeiden, eine *orientierte* Tangentialebene von M_3^2 von nun an kurzweg ein ***Blatt*** nennen.

Dann können wir nunmehr den Satz aussprechen:

XXVII. *Mit der Zuordnung* $\xi \to X$, $\varphi \to Y$ *ist eine ebenfalls vollkommen stetige und eindeutig-umkehrbare Zuordnung der Flächenelemente* (ξ, φ) *des Bildraumes zu Blättern* U *verbunden, die Vereinen von Elementen Vereine von Blättern zuordnet, und umgekehrt.*

Setzen wir nämlich zur Abkürzung

$$F(x, z) = x_2 z_3 + x_3 z_2 - x_0 z_1 - x_1 z_0 - 2 x_4 z_4$$

(so daß $F(z, z) = 0$ die Gleichung von M_3^2 wird), so ist — *für alle* z —

$$(11) \qquad \boxed{[x' x'' x''' \, dx \, z] = F(x, z) \cdot (\varphi \, d\xi).}$$

Da z immer so gewählt werden kann, daß $F(x, z) \neq 0$ ausfällt, so ist hiermit die Behauptung des Satzes XXVII schon erwiesen: $(\varphi \, d\xi) = 0$ oder $(\xi \, d\varphi) = 0$ ist ja die Bedingung der vereinigten Lage konsekutiver Flächenelemente (ξ, φ) und $(\xi + d\xi, \varphi + d\varphi)$.

Wenn zwei Vereine von Blättern ein Blatt miteinander gemein haben, so ist als der „allgemeine Fall" der zu betrachten, daß zu diesem Blatt ein bestimmter Punkt x gehört. Man wird dann ohne weiteres geneigt sein zu sagen, daß die beiden Vereine einander (im Punkte x) berühren. Es sind aber auch ganz abweichende Vorkommnisse möglich. Wenn ein singuläres Blatt (ein solches mit unendlich vielen Berührungspunkten) einem analytischen Verein von ∞^1 Blättern angehört, die nicht alle singulär sind — und zwar einem bestimmten Zweig dieses Vereins angehört —, so erhält man bei Übergang zu diesem besonderen Blatt natürlich nicht alle seine Berührungspunkte als Grenzlagen von Berührungspunkten benachbarter Blätter (sondern nur *einen* unter diesen Punkten). Ebenso brauchen bei Vereinen von ∞^2 Blättern nicht alle Punkte der Berührungslinie eines singulären Blattes sich als Grenzlagen von Berührungspunkten nicht-singulärer Blätter einzustellen. *Zwei analytische Vereine können also ein Blatt gemein haben, ohne einen zugehörigen Berührungspunkt gemein zu haben*[93]). Soll man auch dann noch von einer *Berührung* der beiden Vereine reden? Jedenfalls kann man streng genommen *nur* dann die Zuordnung $(\xi, \varphi) \to U$ und ihre Umkehrung als *Berührungstransformationen* bezeichnen — *nur* dann sind sie Transformationen, die eine Berührung von Vereinen immer wieder in eine „Berührung", wenn auch unter

---

[93]) Ein Beispiel liefert schon der Verein aller Blätter, die einen gegebenen Punkt x enthalten (siehe Seite 113).

Umständen in eine Berührung von anderer Art, überführen. Und *nur* dann kann man die folgende Formulierung als einwandfrei betrachten:

XXVIII. *Im Kontinuum der Blätter existiert eine Gruppe* (G_{15}, H_{15}) *von* $2\cdot\infty^{2\cdot 15}$ *eindeutigen analytischen Berührungstransformationen, genauer von birationalen Zuordnungen der Blätter, die jeden Verein in einen Verein überführen, und Vereine, die einander berühren, in Vereine übergehen lassen, die einander ebenfalls berühren.*

Diese Gruppe hat zum Bilde die Gruppe aller Kollineationen und Korrelationen im Raume R_3.

Unsere Formeln liefern ohne weiteres eine erschöpfende Parameterdarstellung der Transformationen der Gruppe (G_{15}, H_{15}).

Wohl zu beachten ist hierbei, daß eine Transformation der Gruppe (G_{15}, H_{15}), die aus singulären Blättern immer wieder solche hervorgehen läßt, einer *Untergruppe* (G_{10}^*, H_{10}^*) von (G_{15}, H_{15}) angehört, die aus den automorphen Kollineationen von M_3^2 besteht. *Jede solche Kollineation erscheint hier zweimal,* da die beiden Schichten von Geraden X, Y auf M_3^2 einzeln in Ruhe bleiben oder vertauscht werden können: Die beiden Scharen G_{10}^*, H_{10}^* von Transformationen haben zu Bildern, die eine die Gruppe Γ_{10}^* aller *Kollineationen*, die den Hauptkomplex in Ruhe lassen, die andere, zu der die Vertauschung übereinander liegender Blätter gehört, die Schar H_{10}^* der automorphen *Korrelationen* dieses Komplexes.

Die betrachteten Transformationen sind also nicht Berührungstransformationen im gewöhnlichen Sinne des Wortes, oder sie sind es doch nicht in dem ganzen Gebiet, in dem sie erklärt sind. Hiermit ist schon angedeutet, daß sich Bereiche abgrenzen lassen, für deren Elemente und Blätter diese Transformationen auch im gewöhnlichen Wortsinn Berührungstransformationen sind. Wir führen dies aus in bezug auf den Lehrsatz XXVII, und gelangen dahin, indem wir die Ebenen U so wählen, daß ein wechselseitig-eindeutiges Entsprechen zwischen den *dreierlei* Figuren

$$(X, Y), \quad (x, u), \quad (\xi, \varphi)$$

zustande kommt. Dann nämlich wird das Blatt U mit seinem Punkte x in ein bestimmtes orientiertes Flächenelement (x, u) des Flachs $x_4 = 0$ projiziert, und es müssen Blättern U, $U + dU$ in vereinigter Lage orientierte Flächenelemente (x, u), $(x + dx,\ u + du)$ in vereinigter Lage zugeordnet werden, die nun mit den entsprechenden Elementen (ξ, φ), $(\xi + d\xi,\ \varphi + d\varphi)$ durch eine gewöhnliche Berührungstransformation verbunden sein müssen. Die hier zu stellenden Forderungen werden auf die einfachste Weise dadurch erfüllt, daß man

$$\boxed{\Omega \neq 0} \tag{12}$$

annimmt. Dem Element (ξ, φ) entspricht dann ein orientiertes Element (x, u), so daß $x_4 \neq 0$, $u_4 \neq 0$ wird, und folglich entspricht ihm ein Paar von verschiedenen Geraden X, Y, die nicht dem Flach $x_4 = 0$ angehören, und auch ihren Schnittpunkt nicht in diesem Flach haben. Zweitens kann man diese Figur auch von dem Element (x, u) aus konstruieren, da man dann zunächst $x_4 = u_4$ machen und dann aus den Gleichungen (9) in § 14 die Verhältnisgrößen ξ_i und φ_k *immer* bestimmen kann. Daß man schließlich auch von X, Y aus die ganze Figur konstruieren kann, ist evident.

Daß die Zuordnung $(\xi, \varphi) \leftrightarrow (x, u)$ und mit ihr die Zuordnung $(\xi, \varphi) \leftrightarrow U$ im *ganzen* Bereich $\Omega \neq 0$ die Eigenschaften einer gewöhnlichen Berührungstransformation und ihrer Umkehrung hat, wird ausgedrückt durch die Formel

$$\boxed{(u\,dx) = -(x\,du) = -2\,\Omega\cdot(\varphi\,d\xi) = 2\,\Omega\cdot(\xi\,d\varphi),} \tag{13}$$

derzufolge nicht nur Elementvereinen des Bildraumes Vereine orientierter Elemente (x, u) entsprechen, sondern auch, nach (12), diesen wieder jene.

Übrigens ist es nicht unwichtig, zu beachten, daß die Formel (13) bereits in unserer Nr. (11) enthalten ist. Wenn man nämlich in dieser letzten beiderseits die Koeffizienten von z_4 vergleicht, so erhält man, mit Hilfe der Formel (2):

$$\begin{aligned} &-U_{123}\,dx_0 + U_{230}\,dx_1 - U_{301}\,dx_2 + U_{012}\,dx_3 \\ &= \mathfrak{U}_{04}\,dx_0 + \mathfrak{U}_{14}\,dx_1 + U_{24}\,dx_2 + U_{34}\,dx_3 \\ &= -(u_0\,dx_0 + u_1\,dx_1 + u_2\,dx_2 + u_3\,dx_3) \\ &= -(u\,dx) = 2\,\Omega\cdot(\varphi\,d\xi). \end{aligned}$$

Die Ungleichung $\Omega \neq 0$ haben wir schon gedeutet. Sie sagt aus, daß das Element (ξ, φ) keinem Komplex des Büschels

$$\lambda\,\Xi_{01} + \mu\,\Xi_{13} = 0$$

angehört, oder also, daß dieses Element nicht der absoluten Kongruenz angehört. So gelangen wir zu einer nicht unwichtigen Ergänzung des Satzes XXVII:

XXIX. *Soweit die Zuordnung der Elementkontinua $\{\xi, \varphi\}$ und $\{x, u\}$ umkehrbar-eindeutig (und dann auch stetig) ist, soweit ist diese Zuordnung auch im gewöhnlichen Sinne des Wortes eine Berührungstransformation.*

Die auf diese Art einander zugeordneten Bereiche der zwei Elementkontinua ($\Omega \neq 0$ und $x_4 \neq 0$, $u_4 \neq 0$) hatten wir schon in unserem Satz XXII beschrieben.

Will man eine gleichmäßig-stetige Zuordnung haben, so muß man auch noch je eine Umgebung der durch die Annahmen $\Omega \neq 0$ und $x_4, u_4 \neq 0$ ausgeschlossenen Figuren ausschließen.

Die Bedeutung des Satzes XXIX liegt darin, daß die Koordinaten eines orientierten Elementes viel leichter zu handhaben sind, als die Koordinaten eines Blattes, und daß man die orientierten Flächenelemente ja ohnehin vielfach braucht. Es kann z. B. sehr leicht festgestellt werden, ob einer Fläche des Bildraumes eine orientierte Fläche — Ort *orientierter* Elemente — entspricht, während die entsprechende Rechnung mit Graßmannschen Ebenenkoordinaten recht umständlich ausfallen muß.

Die ausgeführte doppelte Überdeckung der Mannigfaltigkeit aller Tangentialebenen von M_3^2 ist analog der früher besprochenen doppelten Überdeckung des Tangentenkomplexes einer M_2^2, einer nicht-singulären Fläche 2. Grades. Und wie wir dort bei Betrachtung orientierter Tangenten die Fläche 2. Grades nicht zu verlassen brauchten, so können wir auch hier verfahren. Aber wir kennen *zwei* einfache Figuren auf M_3^2, deren Mannigfaltigkeit umkehrbar-eindeutig der Mannigfaltigkeit der orientierten Ebenen U oder also unserer Blätter entspricht. Die eine ist das Analogon zu der früher benutzten Schar orientierter Kegelschnitte: Es ist eine Schar orientierter ebener Schnitte von M_3^2 (von denen bereits in unserem Lehrsatz XXIII die Rede war). Die andere und einfachere Figur ist das Paar der vereinigten Geraden X, Y. Es muß sich also in Lagenbeziehungen zwischen den Geraden X, Y und $X+dX$, $Y+dY$ ausdrücken lassen, ob zwei Blätter U und $U+dU$ vereinigt liegen oder nicht. Die naheliegende Antwort auf die hiermit aufgeworfene Frage kann, in der Sprache des Rechnens mit Differentialen, kurz gefaßt werden:

XXX. *Konsekutive Blätter U und $U+dU$ liegen dann und nur dann vereinigt, wenn die zu dem Blatt U gehörige Gerade X — die nach Voraussetzung mit der Geraden Y vereinigt liegt — auch noch mit der Geraden $Y+dY$ vereinigt liegt; oder auch, was dasselbe ausdrückt, wenn die Gerade Y mit der Geraden $X+dX$ vereinigt liegt.*

Zunächst ersieht man aus den Formeln (14) in § 14, daß diese beiden Kriterien miteinander äquivalent sind. Jene Formeln sagen nämlich aus, daß für zwei verschiedene Punkte x', x'' auf X und zwei verschiedene Punkte y', y'' auf Y die Gleichung

$$[x'x''y'y''z] = 0$$

dann (und nur dann) für alle z besteht, wenn $(\varphi\xi) = 0$ ist. Daher ist jede der Bedingungen

$$[dx'\,x''y'y''z] + [x'\,dx''\,y'y''z] = 0,$$
$$[x'x''\,dy'\,y''z] + [x'x''y'\,dy'\,z] = 0$$

äquivalent mit der anderen. Und weiter lehren dieselben Formeln (14),

daß tatsächlich jede dieser Bedingungen, oder also, wie man etwa kürzer schreiben mag, jede der Bedingungen

$$[dXYz] = 0, \qquad [XdYz] = 0$$

äquivalent ist mit

$$(\varphi d\xi) = 0 \quad \text{oder} \quad (\xi d\varphi) = 0.$$

Ihre wichtigste Anwendung und Erläuterung finden die beschriebenen Tatbestände, wenn wir jetzt Punkte, Gerade und Ebenen des Bildraumes als *Vereine von Flächenelementen* auffassen, und ihnen die auf M_3^2 gelegenen *Vereine von Blättern* gegenüberstellen.

So kommen wir ohne weiteres zu dem folgenden Lehrsatz:

XXXI. *Im Bildraume und auf M_3^2 sind die folgenden Vereine (Vereine von je zwei komplexen Dimensionen) einander birational, und zwar vollkommen-eindeutig-umkehrbar und stetig zugeordnet:*

Die $\infty^{2\cdot 3}$ Punkte ξ.	*Die $\infty^{2\cdot 3}$ Geraden X.*
Die $\infty^{2\cdot 4}$ geraden Linien Ξ.	*Die $\infty^{2\cdot 4}$ orientierten ebenen Schnitte von M_3^2.*
Die $\infty^{2\cdot 3}$ Ebenen φ.	*Die $\infty^{2\cdot 3}$ Geraden Y.*

Ferner entsprechen einander die Figuren:

Punkt und Ebene vereinigt miteinander und mit einer Geraden.	*Gerade X und Gerade Y gelegen auf einem orientierten ebenen Schnitt von M_3^2.*
Gerade Linien, die einander schneiden.	*Orientierte Schnitte (Flächen 2. Grades), die einander berühren.*
Die genannten Beziehungen sind invariant (nur) gegenüber der Gruppe $(\Gamma_{15}, \mathsf{H}_{15})$[94].	*Die genannten Beziehungen sind invariant (nur) gegenüber der Gruppe* (G_{15}, H_{15})[94].

Der hiermit beschriebene Tatbestand ist so vielfach mißverstanden worden, daß einige Erläuterungen dazu wohl am Platze sein werden.

Bei den Figuren *links* handelt es sich, wie gesagt, um *Vereine von Flächenelementen, deren Begriff so gestaltet ist, wie es die projektive Geometrie verlangt.* Diese, nicht aber die Lieschen Elemente ($x, y, z, u:v:w$ oder gar x, y, z, p, q) bilden ein im Raume der projektiven Geometrie gelegenes, besser noch ihm übergeordnetes *abgeschlossenes algebraisches* (*und zwar rationales*) *Kontinuum* (ξ, φ), und in diesem (aber auch *nur* in diesem) sind die betrachteten Transformationen (Kolli-

[94]) Man beachte, daß hier überall nur von *analytischen* Transformationen die Rede ist. Nimmt man beiderseits noch das Konjugium hinzu, so entstehen erweiterte Gruppen, die ebenfalls noch die zuletzt genannte Eigenschaft haben.

neationen und Korrelationen) ***überall definiert***, ***eindeutig und stetig***. Entsprechend steht es mit den Figuren der Aussage rechts.

Im Elementkontinuum des Bildraumes (links) ist ein Punkt ξ^* zu betrachten als der Verein aller $\infty^{2\cdot 2}$ Flächenelemente (ξ^*, φ); ebenso ist eine Ebene φ^* der Verein aller $\infty^{2\cdot 2}$ Flächenelemente (ξ, φ^*), eine Gerade der Verein aller Flächenelemente, die ihren Punkt auf ihr haben und ihre Ebene durch sie schicken. Das Schneiden von zwei Geraden ist invariant gegenüber der Gruppe $(\Gamma_{15}, \mathsf{H}_{15})$, die eben dadurch definiert werden kann, und ist ***Spezialfall der Berührung zweier Vereine***. Ein Punkt und eine Gerade in vereinigter Lage ***berühren sich***, als ***Vereine*** betrachtet, unendlichvielfach, in allen ihren gemeinsamen Elementen, und auch diese Beziehung ist invariant gegenüber $(\Gamma_{15}, \mathsf{H}_{15})$, wobei aber die Transformationen von H_{15} — die Korrelationen — aus dem Punkt eine Ebene hervorgehen lassen.

Punkte, Geraden (und implizite Ebenen) kommen nun auch unter den Figuren rechts vor, hier aber, wo es sich um Invarianz gegenüber der Gruppe (G_{15}, H_{15}) handelt, nehmen sie eine ganz andere Stellung ein. Die nicht ausdrücklich genannten ***Punkte sind*** (***als Vereine***) ***Spezialfälle orientierter Schnitte***; sie bilden eine gegenüber (G_{15}, H_{15}) ***nicht***-invariante Mannigfaltigkeit. Jeder Punkt ist, wie jeder andere orientierte Schnitt, Ort von $\infty^{2\cdot 2}$ ***orientierten*** Ebenen oder Blättern; als Ort von Ebenen schlechthin aber ist er eine der vorliegenden Theorie völlig fremde Figur. Die Mannigfaltigkeit der Geraden auf M_3^2 erscheint zweimal, sie ist mit zwei ***Schichten*** $\{X\}, \{Y\}$ überdeckt. ***Eine Gerade X ist etwas völlig Verschiedenes von einer Geraden Y***; beide sind ebenso verschieden voneinander wie ihre Bilder, die Punkte und Ebenen der projektiven Geometrie, die ja niemand verwechseln wird, wiewohl auch sie (durch Korrelationen) miteinander vertauscht werden können. Führt man eine Transformation von G_{15} aus, so werden die Geraden Y anders vertauscht als die Geraden X — man kann sagen, beide Schichten werden durch ***kontragrediente*** Transformationen vertauscht, wie ihre Bilder. ***Das Schneiden von zwei Geraden X und Y ist eine gegenüber*** (G_{15}, H_{15}) ***invariante Eigenschaft, nicht aber auch ihr Übereinanderliegen. Das Schneiden von zwei Geraden X, X' oder Y, Y' ist ebenfalls nicht invariant gegenüber*** (G_{15}, H_{15}). Invariant sind diese Beziehungen nur gegenüber der Untergruppe (G_{10}^*, H_{10}^*).

Ferner sind alle Figuren rechts ***nicht*** als Örter von „Flächenelementen" aufzufassen, die man ja, in der Form (x, U) auch in der Geometrie auf M_3^2 herstellen kann, und nicht einmal als Örter solcher Flächenelemente mit orientierter Ebene U, und noch weniger als Örter der zuvor betrachteten „orientierten Flächenelemente" (x, u). Alle Figuren in der Aussage rechts sind vielmehr als geometrische Örter, und zwar als Vereine, orientierter Ebenen, mithin als ***Vereine von Blättern*** zu betrachten — und ***diese***

Blätter können bestimmte Berührungspunkte haben oder auch nicht. Das Haben eines bestimmten Berührungspunktes ist für ein Blatt wieder *nicht* eine gegenüber (G_{15}, H_{15}), sondern nur eine gegenüber (G_{10}^*, H_{10}^*) invariante Eigenschaft. *Daher ist der Begriff der Berührung von Vereinen von Blättern scharf zu unterscheiden vom Begriff der Berührung von Punktmannigfaltigkeiten.* Zwei orientierte ebene Schnitte von M_3^2, d. h. zwei auf M_3^2 gelegene orientierte Flächen 2. Ordnung *berühren* einander, wenn sie ein Blatt, oder, was dasselbe sagt, ein Paar von Geraden X, Y gemein haben ($X = X'$, $Y = Y'$, *nicht* $X = Y'$, $Y = X'$). Sie berühren dann einander *in der Regel* auch im gewöhnlichen Sinne, in einem bestimmten Punkte, dem Schnittpunkt von X und Y. Wenn aber die Schnittfigur in einen Kegel übergeht, so ist zu bedenken, daß dieser Kegel auf *zwei* Arten einen Verein von Blättern bestimmt. Der eine ist der Verein der $\infty^{2\cdot 1}$ Blätter, deren jedes die M_3^2 in einer Erzeugenden des Kegels berührt, der andere Verein umfaßt alle $\infty^{2\cdot 2}$ Blätter, die durch den Scheitel des Kegels gehen. Natürlich sind *nur* die Vereine der zweiten Art Spezialfälle orientierter ebener Schnitte. *Zwei solche spezielle Vereine von $\infty^{2\cdot 2}$ Blättern aber berühren einander* i m m e r *dann, wenn die Verbindungslinie der zugehörigen zwei Punkte x', x'' auf M_3^2 liegt — wenn folglich diese Punkte als Vereine gewöhnlicher Elemente (x', U) (x'', U) einander überhaupt nicht berühren, und wenn zugleich die zugehörigen Kegel, als Punktörter betrachtet, einander in unendlich vielen Punkten berühren.* Die Verbindungslinie der zwei Punkte ist hier immer *sowohl eine Gerade X als auch eine Gerade Y*, die sich überlagern: Führt man eine geeignete Transformation von G_{15} aus, so wird diese Besonderheit zerstört, und man erhält zwei orientierte ebene Schnitte, die sich auf gewöhnliche Art in einem bestimmten Punkte berühren und zwei verschiedene gerade Linien X^*, Y^* miteinander gemein haben; oder man erhält einen nicht-singulären ebenen Schnitt, und einen auf ihm gelegenen, als Verein zu betrachtenden und den ebenen Schnitt *berührenden* Punkt. Es bilden eben die Ebenen, die M_3^2 in allen Punkten je einer Geraden berühren, zusammen mit ihren Berührungspunkten *nicht* Vereine („Streifen“). Vielmehr sind sie Blätter (analog, aber auch nur analog, den Lieschen Elementen). Entsprechend ist die Tangentenfläche einer dreifach gekrümmten Kurve auf M_3^2 dann, wenn sie ganz auf der M_3^2 verläuft, *nicht* als Verein von $\infty^{2\cdot 2}$, sondern nur als Verein von $\infty^{2\cdot 1}$ Blättern (als Streifen) aufzufassen.

Freilich braucht man nicht so weitgehende Korrekturen vorzunehmen wie hier geschehen, um das Überlieferte allenfalls „zu retten“. Man kann, wie Lie, zur Not auf alle „Orientierung“ verzichten und von mehrdeutigen Transformationen reden, man kann z. B. Elemente (x, u) benutzen, und muß dann singuläre Stellen der untersuchten Transformationen konstatieren

(vgl. Satz XXIX). Es will mir aber scheinen, daß so eine wesentliche Seite der Sache verloren gehen muß. Es ist dann nicht einmal klar, was es heißt, daß die Transformationen von G_{15}, H_{15} eine Gruppe bilden. Und überdies werden dann alle weiteren Folgerungen der Theorie bei wirklich korrekter Abfassung derart mit *Einschränkungen* zu umgeben sein, daß nicht nur ihre Schönheit größtenteils verloren geht, sondern auch ihre Handhabung sehr erschwert wird. Es entspricht nicht dem Geiste der Mathematik, nur die Hilfsmittel benutzen zu wollen, die man zufällig gerade zur Hand hat. Wie die Objekte der Naturwissenschaften, so *existieren* auch die der Mathematik unabhängig von unserem Willen und unabhängig davon, ob wir sie erkennen oder nicht. Wir sollten also überall versuchen, unsere Gedanken, und *folglich auch unsere Sprache, die Wortsprache wie die Formelsprache*, den Tatsachen anzupassen; nur zum Schaden der Wissenschaft und dann immer auch zu eigenem Schaden können wir es unternehmen, alles, was da ist, in überlieferte und vermeintlich fertige Denk- und Sprachformen hineinzuzwängen.

Natürlich läßt sich das Vorgetragene auch so darstellen, daß auf die Geometrie in einem R_4 nicht Bezug genommen wird. Ich sehe aber nicht, warum man einer doch natürlichen und sehr einfachen Deutung von Formeln aus dem Wege gehen sollte, auf die selbst man nicht wohl verzichten kann. Im Gegenteil, wir gelangen gerade auf diesem scheinbaren Umwege, d. h. wenn wir nunmehr die Mannigfaltigkeit M_3^2 wieder in den Raum unserer „absoluten Fläche" projizieren, verhältnismäßig leicht zur Einsicht in den gar nicht sonderlich einfachen Sachverhalt, mit dem es die Kugelgeometrie zu tun hat. Wir erkennen dann auch das Wesen einer gewiß nicht abzuleugnenden Schwierigkeit dieser Disziplin, die dadurch hervorgerufen wird, *daß die zu betrachtenden Figuren einander sowohl als auch der Theorie selbst ganz fremde Figuren in mannigfacher Weise überlagern*, so daß bei ungenügender Ausbildung der Begriffe und des Formelapparats an Fehlerquellen allerdings kein Mangel sein konnte. *Gruppenfremde Figuren sind nicht nur die Lieschen Elemente, sondern auch noch die orientierten Elemente* (x, u), *und überdies die schlechthin Kugeln genannten Figuren der Nicht-Euklidischen* (*oder Euklidischen*) *Geometrie.*

Wie in dem Vorgetragenen schon enthalten ist, sind, in der Projektion, *die einfachsten Raumelemente der Gruppe* (G_{15}, H_{15}) die folgenden:

1. und 2. *Die* $2 \cdot \infty^{2 \cdot 3}$ *orientierten Tangenten* $X(\xi)$ *und* $Y(\varphi)$ *der absoluten Fläche.* Der Komplex der *orientierten* Tangenten überlagert den Tangentenkomplex der absoluten Fläche doppelt, jedoch so, daß die Erzeugenden dieser Fläche als Verzweigungsfiguren dienen und also nicht doppelt zu zählen sind. Jede einzelne orientierte Tangente, mit Einschluß der eben genannten, tritt dann noch einmal auf, da sie X oder Y genannt, d. h. einem Punkte ξ oder einer Ebene φ des Bildraumes zugeordnet werden kann. *Eine Tangente* (*Tangente schlechthin*) *wird also im allgemeinen von vier der hier zu untersuchenden Figuren überlagert, und eine Erzeugende der absoluten Fläche noch von zweien.*

Die Bilder der so zusammengestellten Figuren sind Punkte und Ebenen. Sie werden untereinander vertauscht durch eine *Gruppe* γ, die besteht aus der identischen Transformation, aus den korrelativen Spiegelungen an den Komplexen $\Xi_{01} + \Xi_{23} = 0$, $\Xi_{01} - \Xi_{23} = 0$, und aus deren Produkt, der kollinearen Spiegelung an den Leitlinien der absoluten Kongruenz. *Alle folgenden Figuren werden ebenfalls durch diese Gruppe γ oder vielmehr durch die ihr entsprechende Gruppe g zusammengefaßt.* Die Überdeckungsmultiplizitäten sind immer vier, zwei oder eins.

3. *Die* $\infty^{2\cdot5}$ *Blätter* (X, Y). Eine Sonderstellung nehmen unter ihnen ein $\infty^{2\cdot4}$ Blätter, die „im allgemeinen" noch mit bestimmten Punkten x und Ebenen u (*singulären* orientierten Elementen) der absoluten Fläche verbunden sind. Dem Bilde (ξ, φ) eines solchen Blattes gehört im allgemeinen eine bestimmte Gerade der absoluten Kongruenz an. Das Blatt selbst ist, wieder im allgemeinen, Projektion eines geordneten Paares (X, Y) auf M_3^2, dessen Schnittpunkt bestimmt ist und im Flach $x_4 = 0$ der absoluten Fläche liegt. Aber hiervon gibt es *Ausnahmen*, und diese entsprechen dem Umstand, daß das Element (ξ, φ) bei der Gruppe γ auch weniger als vier Lagen einnehmen kann.

(a) $2\cdot\infty^{2\cdot3}$ Figuren. X *oder* Y überdeckt eine Erzeugende der absoluten Fläche. ξ *oder* φ liegt auf einer Leitlinie der absoluten Kongruenz. Zwei Lagen der Figur (ξ, φ): (ξ, φ), $(\varphi' \xi')$.

(a_1) $2\cdot\infty^{2\cdot2}$ speziellere Figuren. X und Y sind *verschiedene* Erzeugende der absoluten Fläche. ξ und φ liegen auf *derselben* Leitlinie der absoluten Kongruenz. Zwei Lagen (ξ, φ) und (φ', ξ').

(b) $\infty^{2\cdot3}$ Figuren. *X und Y überdecken einander, und sind gleichorientiert*, aber nicht Erzeugende der absoluten Fläche. Der orientierte Punkt x ist unbestimmt (auf einer Geraden), die orientierte Ebene u ist bestimmt. Projektionen bestimmter singulärer Blätter U. Das Element (ξ, φ) bleibt in Ruhe bei der Spiegelung aus Hauptkomplex. Den orientierten Punkten x entsprechen die Geraden dieses Elementes. Zwei Lagen.

(c) $\infty^{2\cdot3}$ Figuren. *X und Y überdecken einander und sind entgegengesetzt-orientiert*, aber nicht Erzeugende der absoluten Fläche. Der orientierte Punkt x ist bestimmt, die orientierte Ebene u unbestimmt. Projektionen *nicht singulärer Blätter* U, deren Ebenen das Projektionszentrum enthalten. Das Element (ξ, φ) bleibt in Ruhe bei der Spiegelung am Nebenkomplex. Den orientierten Ebenen u entsprechen die Geraden dieses Elementes. Zwei Lagen.

(a, b, c) $2\cdot\infty^{2\cdot1}$ Figuren, die Grenzlagen sind der unter (a), (b) und (c) genannten Figuren. X und Y überdecken *dieselbe* Erzeugende der absoluten Fläche. ξ und φ liegen auf *verschiedenen* Leitlinien der abso-

luten Kongruenz. Jede dieser Figuren nimmt bei γ nur eine einzige Lage (ξ, φ) an.

4. *Die* $\infty^{2\cdot 4}$ *„orientierten Kugeln“*. Im allgemeinen überdecken diese *zu vieren* eine und dieselbe nicht-singuläre „Kugel“, nämlich eine Fläche zweiter Ordnung und Klasse, die die absolute Fläche in einem Kegelschnitt berührt. Je zwei solche Flächen haben also eine doppelte Berührung. Aber diese Art des Sich-Berührens ist hier *gruppenfremd*, bei Ausführung einer Transformation von G_{15} oder H_{15} werden in der Regel nicht auch die Berührungspunkte einander zugeordnet. Bilder von je vier zusammengehörigen Kugeln sind vier gerade Linien, deren Inbegriff bei den Transformationen von γ in Ruhe bleibt. Aber in Grenzfällen verringert sich diese Zahl. Diese Grenzfälle sind:

(α) $\infty^{2\cdot 3}$ orientierte irreduzibele **Nullkugeln**[95]); diese liegen, *nur zu zweien*, über je einem Kegel, der der absoluten Fläche umschrieben ist. Projektionen von orientierten Kegeln auf M_3^2, die ihren Scheitel nicht im Flache der absoluten Fläche haben. Jedes zugehörige Blatt verbindet zwei Erzeugende des Kegels, deren eine X und deren andere Y heißt. Vertauscht man X und Y, so erhält man nochmals dieselbe Nullkugel, wenn man aber (in der Projektion) X und Y umkehrt, die andere. *Als Ort von Blättern (Verein) ist also eine solche orientierte Nullkugel nichts anderes als ein orientierter Punkt.* Ihr Bild ist eine Gerade (Verein von Elementen ξ, φ), die im Hauptkomplex, aber nicht in der absoluten Kongruenz liegt.

(β) $\infty^{2\cdot 3}$ „abgeplattete orientierte Kugeln“, oder **Platten**, die man so erhält, daß man einen irreduzibelen Kugelschnitt auf der orientierten Fläche auf beide möglichen Arten orientiert, und seine damit ebenfalls orientierten Tangenten einmal X und einmal Y nennt. Da das auf zwei Arten ausgeführt werden kann, so liegen immer *zwei* voneinander zu unterscheidende Platten übereinander. Jede dieser Platten ist Projektion einer *nicht-singulären* orientierten Fläche 2. Ordnung auf M_3^2, die ausgeschnitten wird durch ein das Projektionszentrum enthaltendes Flach. *Als Ort von Blättern ist eine solche Platte dasselbe wie eine orientierte Ebene.* Ihr Bild ist eine Gerade, die im Nebenkomplex $(\Xi_{01} - \Xi_{23} = 0)$ liegt, aber nicht in der absoluten Kongruenz enthalten ist.

(α, β). $\infty^{2\cdot 2}$ Grenzfälle der unter (α) und (β) genannten Figuren, also Ausartungen von orientierten Nullkugeln und Platten. Diese spezielleren Figuren treten jede nur *einmal* auf. Jede kann *als Ort von Blättern (Verein)* sowohl mit einem (singulären) orientierten Punkt als auch mit

---

[95]) Nullkugeln hat man solche Kugeln der Euklidischen Geometrie genannt, die den Radius Null haben.

einer (singulären) orientierten Ebene identifiziert werden. Punkt und Ebene gehören (als Pol und Polare) der absoluten Fläche an. Zwei Tangenten des entsprechenden ebenen Büschels können beliebig geordnet und beliebig orientiert werden. Sie gehören dann immer derselben Grenzfigur vom Typus (α, β) an. Die in dem Büschel enthaltenen Erzeugenden der absoluten Fläche fungieren als Verzweigungsfiguren. Bild einer solchen Grenzfigur ist irgendeine Gerade der absoluten Kongruenz.

(γ) Zwei einzelne „orientierte Kugeln", die beide die absolute Fläche, also nun wieder eine nicht-singuläre Fläche 2. Grades, überdecken. Ihre Bilder sind die beiden Leitlinien der absoluten Kongruenz.

Zur weiteren Aufhellung des beschriebenen Sachverhalts mag noch die Feststellung dienen:

Während zwei Kugeln (Kugeln schlechthin) einander immer mindestens zweifach berühren, einander sogar in unendlich vielen Punkten berühren können, ohne darum ganz zusammenzufallen, können zwei verschiedene orientierte Kugeln (mit Einschluß aller Grenzfälle, auch der absoluten Fläche) einander höchstens an einer Stelle (in einem einzigen Blatt) berühren.

Wird die *orientierte* absolute Fläche von einer anderen *orientierten* Kugel „berührt", so überdeckt diese letzte ein Lobetschewskijsche Grenzkugel (die hier natürlich nicht reell zu sein braucht).

Ein Teil vom Inhalte des zuletzt Vorgebrachten läßt sich, wie man ohne weiteres sieht, auf eine unbestimmte Dimensionenzahl übertragen. Außerdem ergibt sich eine unbegrenzte Menge neuer Probleme, über deren Lösung noch fast nichts bekannt ist. Durch den Lehrsatz XXXI ist nämlich folgende Frage beantwortet, die als Vorbild unbegrenzt vieler Probleme ähnlichen Wortlauts dienen kann. „*Welche sind die Transformationen gerader Linien X auf M_3^2, die aus der Sekantenkongruenz einer Geraden* (Y) auf M_3^2 *immer wieder eine solche hervorgehen lassen?*" Stellt man die Frage so, so erkennt man ihre Verwandtschaft mit einem vom Verfasser früher bearbeiteten Problem[96]). Um nur noch ein besonders einfaches Beispiel zu nennen, mag folgende Aufgabe angeführt werden: „Welche sind die Transformationen gerader Linien auf einer nicht-singulären M_n^2 $(n > 3)$, die ebene Büschel solcher Geraden immer wieder in ebene Büschel überführen?" Man erhält nur die automorphen Kollineationen der M_n^2, *ausgenommen in den Fällen* $n = 5$ *und* $n = 6$. Im Falle der M_5^2 ergibt sich eine Gruppe von $2 \cdot \infty^{2 \cdot 28}$ Transformationen, die holomorph ist zur Gruppe der automorphen Kollineationen einer M_6^2. Größeres Interesse noch hat wohl der andere Ausnahmefall, $n = 6$. Man kommt dann zu einer Gruppe von $6 \cdot \infty^{2 \cdot 28}$ Transformationen, deren Theorie auf eine merkwürdige Art mit der Figur der acht Schnittpunkte von drei Flächen 2. Ordnung zusammenhängt, und zugleich eine einfache Beziehung hat zur *Kinematik* in einem Euklidischen oder Nicht-Euklidischen R_3[97]).

[96]) Geometrie der Dynamen (Leipzig 1893), S. 232 ff. Es ergibt sich dort eine Gruppe von ganz anderer Struktur (eine nicht von „Berührungstransformationen" gebildete Gruppe mit 17 Parametern).

[97]) Grundlagen und Ziele der analytischen Kinematik. Sitzungsberichte der Berliner Mathematischen Gesellschaft 12 (1912), S. 36.

Kehren wir nach dieser Abschweifung zurück zu unserer Gruppe G_{15}, H_{15}, so sehen wir, daß der Lehrsatz XXXI uns auch noch zu der Einsicht verhilft, *wie die Liesche Kugelgeometrie in die Euklidische Geometrie eingebaut werden kann*. Man hat dazu das Projektionszentrum auf die Mannigfaltigkeit M_3^2 selbst rücken zu lassen. („Stereographische" Projektion statt einer zentralen.) An Stelle der $2\cdot\infty^{2\cdot 1}$ Geraden $X(\xi)$ und $Y(\varphi)$ durch das Projektionszentrum erscheinen dann zunächst nur *Punkte*, nämlich die Punkte eines irreduzibelen Kegelschnittes — des „absoluten Kegelschnittes" der Euklidischen Geometrie. Indessen lassen sich die Definitionen, denen zufolge die offene Punktmenge $\{x, y, z\}$ durch „uneigentliche Punkte" einer Ebene ergänzt wird, so ändern, daß an Stelle des projektiven Kontinuums *das natürliche Kontinuum der Gruppe der konformen Transformationen* tritt. Dieses Kontinuum aber ist eben unsere M_3^2 — die genannte Singularität tritt dann gar nicht erst auf.

Ich beabsichtige auf diesen Gegenstand, der inzwischen, aber nicht ganz in meinem Sinne, schon von Herrn H. Beck bearbeitet worden ist, anderswo näher einzugehen.

(Schluß folgt.)

(Eingegangen am 10. 7. 1921. Zusätze am 25. 9. und 15. 11. 1923.)

Sopra un teorema di R. Sturm.

Von

Filippo Sibirani in Triest.

1. „Gerade eines bedeutenden Mannes Versehen dürfen nicht stehen bleiben" scrisse R. Sturm[1]) rilevando alcuni errori di L. Cremona. Ispirandomi a queste parole dell' illustre geometra, mi permetto qui di far vedere come un teorema enunciato da lui non sussista. Lo Sturm[2]) asserisce che, data una superficie F ed un suo punto P, se p è la lunghezza dell' intersezione di una sfera di centro P con la superficie F, p' la lunghezza dell' immagine sferica (secondo Gauß) di detta intersezione, il limite di $\frac{p'}{p}$, al tendere a zero del raggio della sfera, è

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right),$$

ove $\frac{1}{R_1}$, $\frac{1}{R_2}$ sono le curvature principali della F in P.

Sfortunatamente la dimostrazione dello Sturm è errata, come proverò; con un esempio mostrerò poi che il teorema non sussiste e come esso debba essere modificato.

2. Sturm comincia col considerare una superficie poliedrica Π, di cui A è l' area, ed una superficie $\overline{\Pi}$, ottenuta nel modo seguente. Fissata una direzione positiva per la normale a Π, la $\overline{\Pi}$ si compone, innanzi tutto, dei pezzi di piano paralleli ed eguali alle faccie di Π alla distanza h; poi per ogni spigolo sul quale si tagliano due faccie ω, ω' di Π si considera la porzione di superficie cilindrica circolare di raggio h e di asse lo spigolo, compresa fra i pezzi di piano di $\overline{\Pi}$ paralleli ad ω, ω'; infine per ogni vertice (che non appartenga al contorno se la superficie è aperta) si considera la sfera di centro il vertice e raggio h e di essa quella por-

[1]) *Bemerkung zu Cremonas Abhandlung über die Flächen dritter Ordnung*, Journal für reine und angewandte Mathematik **134**, S. 288. — Luigi Cremona: Archiv der Mathematik und Physik (3) **8**.

[2]) *Ein Analogon zu Gauß' Satz von der Krümmung der Flächen*, Mathem. Annalen **21**, S. 379–384.

zione che è compresa fra i pezzi di piano paralleli alle faccie di Π che formano il vertice e le superficie cilindriche già considerate relative agli spigoli che concorrono nel vertice.

L'area della $\overline{\Pi}$ è

$$(1)\qquad A+hk+h^2e$$

ove $k=\Sigma\gamma\tau$, rappresentando γ la lunghezza di uno spigolo, τ l'angolo delle normali alle due faccie concorrenti nello spigolo e la somma essendo estesa a tutti gli spigoli; $e=\Sigma(2\pi-\Sigma\varphi)$, in cui $\Sigma\varphi$ è la somma degli angoli delle faccie concorrenti in un vertice e la prima somma è estesa a tutti i vertici della superficie poliedrica.

Ora Sturm dice che se f è una porzione infinitesima di una superficie curva, $\bar{f}$ la corrispondente porzione sulla superficie parallela alla distanza h, sarà

$$(2)\qquad \bar{f}=f+hk+h^2e.$$

Logicamente si dovrà intendere che k ed e rappresentino in (2) ciò che diventano k ed e della (1) quando si passi al limite sia per il rimpiccolire indefinito delle faccie della superficie poliedrica, sia al rimpiccolire indefinito della porzione di superficie curva a cui, col primo passaggio al limite, tende la superficie poliedrica.

V'ha subito da osservare che non si può asserire, senza opportune restrizioni sul modo con cui le faccie della superficie poliedrica tendono a zero, che il limite dell'area A sia l'area della porzione di superficie in cui è inscritta la superficie poliedrica. Ciò, come è noto, è stato rilevato dal Peano[3]) e dallo Schwarz[4]) quasi contemporaneamente a questo lavoro dello Sturm.

Ammesso poi che l'impiccolimento indefinito delle faccie della superficie poliedrica inscritta in una porzione σ della superficie F avvenga in modo che il limite dell'area della superficie poliedrica Π sia σ, sarebbe opportuno dimostrare che la corrispondente area di $\overline{\Pi}$ tende all'area della porzione corrispondente a σ sulla superficie parallela, perchè $\overline{\Pi}$ non è una superficie poliedrica inscritta che si comporti come la Π.[5]) Dimostrato questo, si potrà concludere che

$$\bar{\sigma}=\sigma+hk_1+h^2e_1,$$

ove

$$k_1=\lim\Sigma\gamma\tau,\qquad e_1=\lim\Sigma(2\pi-\Sigma\varphi),$$

---

[3]) *Lezioni* (litografato) *di Calcolo* dell'anno 1882.

[4]) *Sur une définition erronée de l'aire d'une surface courbe.* Gesammelte Abhandlungen, Berlin 1891.

[5]) È facile fare esempi in cui i pezzi di piano di $\overline{\Pi}$ non hanno alcun punto in comune con la superficie $\overline{F}$ parallela a F, ma $\overline{\Pi}$ ha con $\overline{F}$ punti di contatto sulle superficie cilindriche o sferiche.

i limiti essendo presi per il rimpiccolimento indefinito delle faccie della superficie poliedrica inscritta in σ. Se poi

$$k_2 = \lim_{\sigma=0} \frac{k_1}{\sigma}, \qquad e_2 = \lim_{\sigma=0} \frac{e_1}{\sigma}$$

al restringersi indefinito della σ intorno ad un punto P della F, denotando con $d\sigma$ l'elemento infinitesimo di F contenente P e con $d\bar{\sigma}$ l'elemento corrispondente sulla superficie parallela, sarà:

$$d\bar{\sigma} = d\sigma(1 + k_2 h + e_2 h^2),$$

e poichè d'altra parte

$$d\bar{\sigma} = d\sigma\left(1 + \frac{h}{R_1}\right)\left(1 + \frac{h}{R_2}\right),$$

essendo R_1, R_2 i due raggi di curvatura principali in P, si trarrà

$$k_2 = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}, \qquad e_2 = \frac{1}{R_1 R_2}.$$

3. Lo Sturm considera poi una porzione infinitesima della superficie F intorno a P limitata da una curva p e considera la porzione infinitesima di superficie conica che si ottiene proiettando p da P. Osserviamo incidentalmente che se questa porzione è infinitesima, non si dovrebbe parlare di ulteriore passaggio al limite, come fa lo Sturm. Il quale, indicando con γ la lunghezza di una generatrice del cono, con τ l'angolo di contingenza del piano tangente lungo quella generatrice, con f l'area della porzione di superficie conica, scrive

$$(3) \qquad \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = \frac{\Sigma\gamma\tau}{f}$$

intendendo, con notazione più precisa,

$$(4) \qquad \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = \lim_{f=0} \frac{\int_p \gamma\, d\tau}{f}.$$

Ora questa asserzione è arbitraria, perchè il limite del secondo membro non è il k_2 dinanzi introdotto.

Possiamo convincerci dell'erroneità della (4) con un esempio semplicissimo. Si consideri una sfera di raggio r, su di essa un cerchio c di cui P sia sulla sfera il polo e proiettiamo c da P; il cono abbia l'apertura 2ω. Il raggio di c è $2r\cos\omega\,\mathrm{sen}\,\omega$, l'apotema del cono è $2r\cos\omega$ onde l'area della superficie conica è $4\pi r^2\cos^2\omega\,\mathrm{sen}\,\omega$. In quanto poi a $\int_p \gamma\, d\tau$ è qui il prodotto dell'apotema $2r\cos\omega$ per $\int_c d\tau$ e l'integrale è la lunghezza del cerchio tagliato sulla sfera di raggio 1 dal cono formato

dalle parallele alle normali al cono in c condotte per il centro di detta sfera, cioè $2\pi\cos\omega$; ne segue

$$\lim_{f=0}\frac{\int\gamma\, d\tau}{f}=\lim_{\omega=\frac{\pi}{2}}\frac{4\pi r\cos^2\omega}{4\pi r^2\cos^2\omega\,\mathrm{sen}\,\omega}=\frac{1}{r}$$

e non $\frac{2}{r}$ come indicherebbe la (4).

Rileviamo un ultimo errore nelle considerazioni dello Sturm. Supposto γ costante (in altre parole, supposto che p sia una curva sferica di centro P), essendo $f=\frac{1}{2}\gamma^2\Sigma\varphi$, dalla (3) Sturm passa alla

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right)=\frac{\Sigma\tau}{p},$$

giacchè $\gamma\Sigma\varphi$ è la lunghezza p della linea p; il numeratore del secondo membro è la lunghezza della curva che su una sfera di raggio 1 generano le parallele condotte per il centro della sfera alle normali al cono nei punti di p. Ora Sturm conclude che indicando con p' l'immagine sferica di p, è

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right)=\lim\frac{p'}{p}.$$

Perchè questa conclusione sussistesse occorrerebbe che fosse sempre

$$\lim\frac{\int_p d\tau}{p'}=1$$

al tendere di γ a zero, mentre ciò non è. Basta tornare all'esempio fatto sopra. L'immagine sferica di c è lunga $4\pi\,\mathrm{sen}\,\omega\cos\omega$, l'integrale a numeratore è, come abbiamo visto, $2\pi\cos\omega$, onde

$$\lim_{\gamma=0}\frac{\int_p d\tau}{p'}=\lim_{\omega=\frac{\pi}{2}}\frac{2\pi\cos\omega}{4\pi\cos\omega\,\mathrm{sen}\,\omega}=\frac{1}{2}.$$

4. Mentre nei paragrafi precedenti abbiamo dimostrata erronea la dimostrazione dello Sturm, facciamo ora vedere, con un esempio, che il teorema enunciato dall'eminente geometra non sussiste.

Si consideri il paraboloide con il vertice nell'origine O delle coordinate

$$z=ax^2+by^2 \tag{5}$$

e la sfera di centro O e raggio ε

$$x=\varepsilon\cos\varphi\,\mathrm{sen}\,\vartheta,\qquad y=\varepsilon\,\mathrm{sen}\,\varphi\,\mathrm{sen}\,\vartheta,\qquad z=\varepsilon\cos\vartheta. \tag{6}$$

Sostituendo le (6) in (5), dopo aver posto

$$a\cos^2\varphi+b\,\mathrm{sen}^2\varphi=A,$$

si trova

$$\varepsilon A\cos^2\vartheta+\cos\vartheta-\varepsilon A=0,$$

da cui

$$\cos\vartheta = \frac{-1+\sqrt{1+4\varepsilon^2 A^2}}{2\varepsilon A},$$

ed allora le equazioni dell'intersezione del paraboloide (5) con la sfera (6) sono

$$x = \frac{\sqrt{2}\cos\varphi\sqrt{\sqrt{1+4\varepsilon^2A^2}-1}}{2A}$$

$$y = \frac{\sqrt{2}\,\mathrm{sen}\,\varphi\sqrt{\sqrt{1+4\varepsilon^2A^2}-1}}{2A}$$

$$z = \frac{-1+\sqrt{1+4\varepsilon^2A^2}}{2A}.$$

Sviluppando per le potenze di ε si ha

$$x = \varepsilon\cos\varphi\left[1-\frac{\varepsilon^2}{2}A^2+\ldots\right]$$

$$y = \varepsilon\,\mathrm{sen}\,\varphi\left[1-\frac{\varepsilon^2}{2}A^2+\ldots\right]$$

$$z = \varepsilon^2 A\left[1-\varepsilon^2A^2+\ldots\right]$$

e derivando rispetto a φ

$$x' = \varepsilon\left[-\,\mathrm{sen}\,\varphi - A\frac{\varepsilon^2}{2}\{5(a-b)\,\mathrm{sen}^3\varphi+(4b-5a)\,\mathrm{sen}\,\varphi\}+\ldots\right]$$

$$y' = \varepsilon\left[\cos\varphi - A\frac{\varepsilon^2}{2}\{5(a-b)\cos^3\varphi+(5b-4a)\cos\varphi\}+\ldots\right]$$

$$z' = 2\varepsilon^2(b-a)\cos\varphi\,\mathrm{sen}\,\varphi+\ldots.$$

Ne segue

$$\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2} = \varepsilon\sqrt{1+\varepsilon^2Q_1}.$$

Se, con la notazione di Sturm, indichiamo con p la lunghezza della detta intersezione fra sfera e paraboloide,

$$\lim_{\varepsilon=0}\frac{p}{\varepsilon} = \lim_{\varepsilon=0}\int_0^{2\pi}\sqrt{1+\varepsilon^2Q_1}\,d\varphi = 2\pi.$$

I coseni direttori della normale in un punto del paraboloide sono

$$\frac{2ax}{\sqrt{1+4(a^2x^2+b^2y^2)}},\qquad \frac{2by}{\sqrt{1+4(a^2x^2+b^2y^2)}},\qquad \frac{-1}{\sqrt{1+4(a^2x^2+b^2y^2)}}$$

epperò le coordinate di un punto della rappresentazione sferica dell'intersezione precedente (supposto il centro della sfera unitaria nell'origine O) sono

$$\xi = \frac{2a\varepsilon\cos\varphi\left[1-\frac{\varepsilon^2}{2}A^2+\ldots\right]}{\sqrt{1+4\varepsilon^2(a^2\cos^2\varphi+b^2\,\mathrm{sen}^2\varphi)\left[1-\frac{\varepsilon^2}{2}A^2+\ldots\right]^2}} = 2a\varepsilon\cos\varphi+\ldots$$

$$\eta = \frac{2\,b\,\varepsilon\,\mathrm{sen}\,\varphi\left[1-\frac{\varepsilon^2}{2}A^2+\ldots\right]}{\sqrt{1+4\varepsilon^2(a^2\cos^2\varphi+b^2\,\mathrm{sen}^2\varphi)\left[1-\frac{\varepsilon^2}{2}A^2+\ldots\right]^2}} = 2\,b\,\varepsilon\,\mathrm{sen}\,\varphi+\ldots$$

$$\zeta = -1+2\varepsilon^2(a^2\cos^2\varphi+b^2\,\mathrm{sen}^2\varphi)+\ldots$$

Derivando rapporto a φ si ha

$$\xi' = -2\,a\,\varepsilon\,\mathrm{sen}\,\varphi+\ldots$$
$$\eta' = 2\,b\,\varepsilon\cos\varphi+\ldots$$
$$\zeta' = 4\,\varepsilon^2(b-a)\,\mathrm{sen}\,\varphi\cos\varphi+\ldots$$

donde

$$\sqrt{\xi'^2+\eta'^2+\zeta'^2} = 2\,\varepsilon\sqrt{a^2\,\mathrm{sen}^2\varphi+b^2\cos^2\varphi+\varepsilon Q_2}\,.$$

Se indichiamo con p' la lunghezza dell' immagine sferica dell' intersezione fra sfera e paraboloide

$$\underset{0}{\mathrm{n}}\frac{p'}{p} = 2\lim_{\varepsilon=0}\int_0^{2\pi}\sqrt{a^2\,\mathrm{sen}^2\varphi+b^2\cos^2\varphi+\varepsilon Q_2}\,d\varphi = 2\int_0^{2\pi}\sqrt{a^2\,\mathrm{sen}^2\varphi+b^2\cos^2\varphi}\,d$$

e quindi

$$(7)\quad \lim_{\varepsilon=0}\frac{p'}{\varepsilon} = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\sqrt{a^2\,\mathrm{sen}^2\varphi+b^2\cos^2\varphi}\,d\varphi = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\sqrt{\frac{\mathrm{sen}^2\varphi}{R_1^2}+\frac{\cos^2\varphi}{R_1^2}}\cdot d\varphi$$

essendo $\frac{1}{R_1}$, $\frac{1}{R_2}$ le curvature principali, curvature delle sezioni del paraboloide coi piani $y=0$, $x=0$ rispettivamente.

Se si considera una superficie qualunque F, si potrà considerare il paraboloide avente un contatto di secondo ordine con essa nel suo punto P; poichè il limite del rapporto delle due lunghezze p', p considerato dallo Sturm dipende solo dall' intorno di secondo ordine del punto P, il risultato contenuto nella formula (7) valido per il paraboloide, vale per la superficie F se P è un suo punto non singolare.

Il risultato, così rettificato, coincide con quello di Sturm solo se P è un ombelico della superficie F.

Si può, infine, osservare che in luogo della sfera di centro P si può considerare un cilindro circolare di asse la normale in P, ed il risultato (7) permane.

Trieste, 19 marzo 1923.

(Eingegangen am 23. 3. 1923.)

Über die Torsionszahlen von Produktmannigfaltigkeiten.

Von

Hermann Künneth in Berlin.

---

1. Bei den von Steinitz[1]) zuerst untersuchten, durch eine Art Multiplikation aus Mannigfaltigkeiten p-ter und q-ter Dimension entstandenen $(p+q)$-dimensionalen Mannigfaltigkeiten, die Steinitz deshalb Produktmannigfaltigkeiten nennt, liegt die Vermutung nahe, daß ihre topologischen Invarianten vollständig durch die topologischen Invarianten ihrer Faktoren bestimmt sind. Für die Bettischen Zahlen hatte ich dies schon in einem früheren Beitrag nachgewiesen[2]), auf den auch wegen der hier verwandten Bezeichnungen verwiesen sei. Hier soll nun auch der Nachweis für die Torsionszahlen[3]) erbracht werden. Während es sich dort vor allem um die algebraische Aufgabe handelte, den Rang einer aus zwei Matrizensystemen in bestimmter Weise zusammengesetzten Matrix zu berechnen, sollen hier die Elementarteiler dieser Matrix bestimmt werden. Der Rang wird sich auch hier zugleich mit ergeben.

2. Gegeben seien von einer p-dimensionalen Mannigfaltigkeit A und einer q-dimensionalen Mannigfaltigkeit B die Anzahl der Zellen, nämlich α_n Zellen n-ter Dimension $a^n_{r_n}$ $(r_n = 1, \ldots, \alpha_n;\ n = 0, 1, \ldots, p)$ in A und β_m Zellen m-ter Dimension $b^m_{s_m}$ $(s_m = 1, \ldots, \beta_m;\ m = 0, 1, \ldots, q)$ in B und außerdem die Poincaréschen Berandungsrelationen (Kongruenzen)[4]):

$$(1) \qquad a^n_{r_n} \equiv\!> \sum_{r_{n-1}=1}^{\alpha_{n-1}} \varepsilon^n_{r_n r_{n-1}} a^{n-1}_{r_{n-1}} \qquad [r_n = 1, 2, \ldots, \alpha_n;\ n = 1, 2, \ldots, p]$$

---

[1]) „Beiträge zur Analysis situs." Sitzungsberichte d. Berl. Math. Gesellsch., 7, S. 42 ff.

[2]) „Über die Bettischen Zahlen von Produktmannigfaltigkeiten." Math. Ann. 90, S. 65–85.

[3]) Poincaré: „Second complément à l'analysis situs." Proceed. Lond. Math. Soc. 32, S. 301; Tietze: „Über die topologischen Invarianten mehrdimensionaler Mannigfaltigkeiten". Monatshefte f. Math. u. Phys., 19, S. 53 ff.

[4]) Poincaré: „Compl. à l'analysis situs". Rend. d. circ. mat. di Palermo 13, S. 291.

bzw.

$$(2) \qquad b^m_{s_m} \Rightarrow \sum_{s_{m-1}=1}^{\beta_{m-1}} \eta^m_{s_m s_{m-1}} b^{m-1}_{s_{m-1}} \qquad [s_m = 1, 2, \ldots, \beta_m;\ m = 1, 2, \ldots, q].$$

Die zu Zellen n-ter Dimension von A, bzw. m-ter Dimension von B gehörigen Relationen (1), bzw. (2), sollen fernerhin mit $(1, n)$, bzw. $(2, m)$, bezeichnet werden.

Die Matrix $\mathsf{E}_n = \| \varepsilon^n_{r_n r_{n-1}} \|$ $(r_n = 1, \ldots, \alpha_n;\ r_{n-1} = 1, \ldots, \alpha_{n-1})$ habe den Rang $\bar{\alpha}_n$, die Matrix $\mathsf{H}_m = \| \eta^m_{s_m s_{m-1}} \|$ $(s_m = 1, \ldots, \beta_m;\ s_{m-1} = 1, \ldots, \beta_{m-1})$ habe den Rang $\bar{\beta}_m$.

Zwischen den Elementen der Matrizen E_{n+1} und E_n, bzw. H_{m+1} und H_m bestehen dabei die Beziehungen[5]):

$$\sum_{r_n=1}^{\alpha_n} \varepsilon^{n+1}_{r_{n+1} r_n} \varepsilon^n_{r_n r_{n-1}} = 0$$

$$[r_{n+1} = 1, \ldots, \alpha_{n+1};\ r_{n-1} = 1, \ldots, \alpha_{n-1};\ n = 1, \ldots, (p-1)]$$

$$\sum_{s_m=1}^{\beta_m} \eta^{m+1}_{s_{m+1} s_m} \eta^m_{s_m s_{m-1}}$$

$$[s_{m+1} = 1, \ldots, \beta_{m+1};\ s_{m-1} = 1, \ldots, \beta_{m-1};\ m = 1, \ldots, (q-1)].$$

Diese lassen sich auch schreiben in der Form:

$$(3) \quad \mathsf{E}_{n+1} \cdot \mathsf{E}_n = 0\,[n = 1, \ldots, (p-1)];\ \mathsf{H}_{m+1} \cdot \mathsf{H}_m = 0\ [m = 1, \ldots, (q-1)].$$

0 bedeutet dabei eine Matrix, deren sämtliche Elemente Null sind. Ist d_i der größte gemeinsame Teiler aller i-reihigen Unterdeterminanten von E_n, so sind $\frac{d_i}{d_{i-1}}$ $(i = 1, \ldots, \bar{\alpha}_n)$, wobei $d_0 = 1$ zu setzen ist, die Elementarteiler von E_n. Sie seien $\omega^n_{r_{n-1}}$ $[r_{n-1} = 1, 2, \ldots, \bar{\alpha}_n]$; analog erhält man die Elementarteiler von H_m; sie seien $\psi^m_{s_{m-1}}$ $[s_{m-1} = 1, 2, \ldots, \bar{\beta}_m]$.

E_n, bzw. H_m kann man immer unimodular transformieren in $\Omega_n = \| \omega^n_{r_n r_{n-1}} \|$, bzw. $\Psi_m = \| \psi^m_{s_m s_{m-1}} \|$, wobei[6])

$$\begin{aligned}
&\text{für } r_n \leqq \alpha_n - \bar{\alpha}_n : \omega^n_{r_n r_{n-1}} = 0,\\
, n) \quad & r_n > \alpha_n - \bar{\alpha}_n \text{ und } r_n \neq \alpha_n - \bar{\alpha}_n + r_{n-1} : \omega^n_{r_n r_{n-1}} = 0,\\
& r_n > \alpha_n - \bar{\alpha}_n \text{ und } r_n = \alpha_n - \bar{\alpha}_n + r_{n-1} : \omega^n_{\alpha_n - \bar{\alpha}_n + r_{n-1}, r_{n-1}} = \omega^n_{r_{n-1}},\\
&\text{bzw. für } s_m \leqq \beta_m - \bar{\beta}_m : \psi^m_{s_m s_{m-1}} = 0,\\
, m) \quad & s_m > \beta_m - \bar{\beta}_m \text{ und } s_m \neq \beta_m - \bar{\beta}_m + s_{m-1} : \psi^m_{s_m s_{m-1}} = 0,\\
& s_m > \beta_m - \bar{\beta}_m \text{ und } s_m = \beta_m - \bar{\beta}_m + s_{m-1} : \psi_{\beta_m - \bar{\beta}_m + s_{m-1}, s_{m-1}} = \psi^m_{s_{m-}}
\end{aligned}$$

[5]) Poincaré: „Compl. à l'anal. sit.", S. 292.

[6]) Für die Durchführung des folgenden Beweises muß diese Anordnung der Elementarteiler in den Matrizen Ω_n und Ψ_m der sonst üblichen in der Diagonale vorgezogen werden.

Es ist also $\Omega_n = P_n \cdot \mathsf{E}_n \cdot Q_n$ und $\Psi_m = R_m \cdot \mathsf{H}_m \cdot S_m$, wobei P_n, Q_n, R_m und S_m quadratische Matrizen sind von beziehungsweise α_n, α_{n-1}, β_m, β_{m-1} Reihen, deren Determinanten den Wert $+1$ haben.

Die von ± 1 verschiedenen Zahlen $\omega^n_{r_{n-1}}$ und $\psi^m_{s_{m-1}}$ sind die Torsionszahlen $(n-1)$-ter bzw. $(m-1)$-ter Ordnung von A bzw. B.[7])

Den transformierten Matrizen Ω_n bzw. Ψ_m entsprechen die Relationen

$$(1', n) \qquad a'^n_{r_n} \Rrightarrow 0 \qquad [r_n = 1, \ldots, (\alpha_n - \bar\alpha_n);\ n = 1, \ldots, p),$$

$$a'^n_{\alpha_n - \bar\alpha_n + r_{n-1}} \Rrightarrow \omega^n_{r_{n-1}} a''^{n-1}_{r_{n-1}} \qquad [r_{n-1} = 1, \ldots, \bar\alpha_n;\ n = 1, \ldots, p],$$

$$(2', m) \qquad b'^m_{s_m} \Rrightarrow 0 \qquad [s_m = 1, \ldots, (\beta_m - \bar\beta_m);\ m = 1, \ldots, q],$$

$$b'_{\beta_m - \bar\beta_m + \beta_{m-1}} \Rrightarrow \psi^m_{s_{m-1}} b''^{m-1}_{s_{m-1}} \qquad [s_{m-1} = 1, \ldots, \bar\beta_m;\ m = 1, \ldots, q].$$

Die $a'^n_{r_n}$, $a''^{r-1}_{r_{n-1}}$, $b^m_{s_m}$, $b''^{m-1}_{s_{m-1}}$ sind aus den Zellen von A bzw. B zusammengesetzte Gebilde, und zwar ist, wenn man die einspaltige Matrix $\|a^n_{r_n}\|$ $(r_n = 1, \ldots, \alpha_n)$ mit A_n bezeichnet, $\|b^m_{s_m}\|$ $(s_m = 1, \ldots, \beta_m)$ mit B_m usf.:

$$(6) \qquad A'_n = P_n \cdot A_n;\quad A''_{n-1} = Q_n^{-1} \cdot A_{n-1};\quad B'_m = R_m \cdot B_m;\quad B'_{m-1} = S_m^{-1} B_{m-1}.$$

3. Bildet man nun nach der von Steinitz[8]) angegebenen Weise die Produktmannigfaltigkeit $C = A \cdot B$, so entsprechen den l-dimensionalen Zellen von C eineindeutig alle Kombinationen von n-dimensionalen Zellen von A mit $(l-n)$-dimensionalen Zellen von B. Man erhält $\gamma_l = \sum\limits_{n=0}^{p} \alpha_n \beta_{l-n}$ l-dimensionale Zellen; sie sollen bezeichnet werden mit $a^n_{r_n} b^m_{s_m}$ $[r_n = 1, \ldots, \alpha_n;$ $s_m = 1, \ldots, \beta_m;$ $n = 0, \ldots, p;$ $m = l - n]$.

Die Berandungsrelationen der l-dimensionalen Zellen von C sind[9]):

$$(7, n, m) \qquad a^n_{r_n} b^m_{s_m} \Rrightarrow \sum_{r_{n-1}=1}^{\alpha_{n-1}} \varepsilon^n_{r_n r_{n-1}} a^{n-1}_{r_{n-1}} b^m_{s_m} + (-1)^n \sum_{s_{m-1}=1}^{\beta_{m-1}} \eta^m_{s_m s_{m-1}} a^n_{r_n} b^{m-1}_{s_{m-1}}$$

$$\begin{bmatrix} r_n = 1, \ldots, \alpha_n;\ s_m = 1, \ldots, \beta_m \\ n = 0, \ldots, p;\ m = l - n \end{bmatrix}.$$

Alle $\varepsilon^0_{r_0 r_{-1}}$ und $\eta^0_{s_0 s_{-1}}$ sind dabei gleich 0 zu setzen.

Die Koeffizientenmatrix dieser Relationen werde bezeichnet mit M_l. Ihre Elementarteiler, welche von ± 1 verschieden sind, sind die Torsionszahlen $(l-1)$-ter Ordnung von C. Um diese zu bestimmen, soll M_l unimodular so transformiert werden, daß nur noch in der Diagonale von Null verschiedene Elemente auftreten.

---

[7]) Poincaré: Sec. compl. à l'anal. sit., a. a. O. S. 301 ff. u. S. 281 ff.; Tietze: a. a. O. S. 53 ff. u. S. 37.

[8]) A. a. O. S. 44.

[9]) „Über die Bettischen Zahlen von Produktmannigfaltigkeiten", a. a. O. S. 69.

4. Zur Vereinfachung der Darstellung soll von folgenden Bezeichnungen Gebrauch gemacht werden:

a) Ist $P = \| p_{ik} \|$ $(i = 1, \ldots, \pi;\ k = 1, \ldots, \pi')$ und $Q = \| q_{lm} \|$ $(l = 1, \ldots, \varrho;\ m = 1, \ldots, \varrho')$, so wird nach Hurwitz[10]) unter $P \times Q$ eine Matrix verstanden von $\pi\varrho$ Reihen und $\pi'\varrho'$ Spalten von folgendem Aussehen: Werden die Reihen in π Abteilungen zu je ϱ Reihen und die Spalten in π' Abteilungen zu je ϱ' Spalten eingeteilt, so ist die von den Reihen der i-ten Abteilung und den Spalten der k-ten Abteilung gebildete Untermatrix gleich der Matrix Q, bei der jedes Element noch mit p_{ik} multipliziert ist. Sind R und S zwei weitere Matrizen, so gilt die Regel

$$(P \times Q) \cdot (R \times S) = (P \cdot R) \times (Q \cdot S).$$

b) Wird die quadratische Matrix P von π Reihen geändert durch Hinzufügen von μ Reihen oben und ν Reihen unten, von μ Spalten links und ν Spalten rechts, wobei alle hinzugefügten Elemente mit Ausnahme der in der Hauptdiagonale stehenden gleich Null und diese gleich 1 sind, so soll die so geänderte Matrix mit ${}_{(\mu)}P_{(\nu)}$ bezeichnet werden.

Wird eine Matrix G von $(\mu + \pi + \nu)$ Reihen transformiert in ${}_{(\mu)}P_{(\nu)} \cdot G$, so ändern sich nur die Elemente der Reihen $\mu + 1$ bis $\mu + \pi$, und zwar wird jede aus diesen Reihen und beliebigen Spalten gebildete Untermatrix U von G transformiert in $P \cdot U$. Entsprechend unterscheidet sich $H \cdot {}_{(\mu)}P_{(\nu)}$, wobei H eine Matrix von $(\mu + \pi + \nu)$ Spalten ist, von H nur in den Elementen der Spalten $\mu + 1$ bis $\mu + \pi$, und zwar ist jede aus diesen Spalten und beliebigen Reihen gebildete Untermatrix V gleich $V \cdot P$.

Daraus folgt auch $({}_{(\mu)}P_{(\nu)})^{-1} = {}_{(\mu)}P^{-1}_{(\nu)}$.

5. Die l-dimensionalen Zellen von C und damit die Reihen und Spalten von M_l sollen so geordnet sein, daß alle Zellen, deren Faktor aus A von der gleichen Dimension ist, zur gleichen Stufe gehören. Es gibt demnach $(p+1)$ Stufen. Es können auch leere Stufen auftreten, d. h. solche, welche keine Zellen enthalten, nämlich, wenn $l < p$ und $n > l$, oder, falls man $p \leqq q$ annimmt, wenn $l > q$ und $n < l - q$. Jede Stufe sei wieder in Abteilungen eingeteilt, wobei zu der gleichen Abteilung die Zellen gehören, die den gleichen Faktor aus A haben. Die Zelle $a^n_{r_n} b^{l-n}_{s_{l-n}}$ ist also die s_{l-n}-te Zelle der r_n-ten Abteilung der n-ten Stufe. Die n-te Stufe enthält α_n Abteilungen und jede ihrer Abteilungen β_{l-n} Zellen. Ebenso wie die Zellen werden die dazu gehörigen Relationen $(7, n, l-n)$ und die Reihen von M_l in Stufen und Abteilungen eingeteilt, desgleichen die Spalten, die ge-

---

[10]) „Zur Invariantentheorie", Math. Annalen **45**, S. 389. Betreffend die Transformationen ganzzahliger Matrizen sei auch verwiesen auf Veblen u. Franklin: On matrices, whose elements are integers, Annals of mathematics (2) **23**, 1, S. 1.

ordnet werden nach den Zellen, bei welchen ihre Elemente in $(7, n, l-n)$ als Koeffizienten stehen.

Aus $(7, n, l-n)$ ist dann ersichtlich, daß in den Reihen n-ter Stufe nur die Elemente der Spalten $(n-1)$-ter und n-ter Stufe von Null verschieden sind. Bezeichnet man die von den Reihen n-ter und den Spalten n'-ter Stufe gebildete Untermatrix von M_l mit $[n, n']$ und mit J die Einheitsmatrix, so ist:

$$\left.\begin{aligned}[n, n'] &= 0 \quad \text{für} \quad n' \neq n-1, n \\ [n, n-1] &= \mathsf{E}_n \times J \\ [n, n] &= J \times \mathsf{H}_{l-n}\end{aligned}\right\} \begin{matrix} l-q \\ 0 \end{matrix} \leqq n \leqq \begin{matrix} l \\ p \end{matrix}. \text{[11])}$$

6. M_l soll jetzt unimodular so transformiert werden, daß an die Stelle der $\varepsilon^n_{r_n r_{n-1}}$ und $\eta^m_{s_m s_{m-1}}$ beziehungsweise die $\omega^n_{r_n r_{n-1}}$ und $\psi^m_{s_m s_{m-1}}$ treten. Die so transformierte Matrix hätte man auch erhalten, wenn man die Relationensysteme (1′) und (2′) an Stelle von (1) und (2) der Produktbildung zugrunde gelegt hätte. Man wird dabei vor folgende Frage gestellt: Wenn durch Zellteilungen und Zellvereinigungen A und B in die homöomorphen Mannigfaltigkeiten A' und B' verwandelt werden und $A' \cdot B' = C'$ ist, kann man dann immer durch Zellteilungen und Zellvereinigungen C in C' verwandeln? Aus der später angewandten Beweisführung folgt, daß diese Frage zu bejahen ist, wie ja wohl auch zu erwarten ist, wenn der Produktbildung überhaupt eine topologische Bedeutung zukommen soll. Man kann also bei der Bildung von C von beliebigen zu A bzw. B homöomorphen Mannigfaltigkeiten ausgehen. Die Relationen (1′) und (2′) stellen aber keine Beziehungen zwischen Zellen und deren Berandung dar; denn die $a'^n_{r_n}$, $a''^{n-1}_{r_{n-1}}$, $b'^m_{s_m}$, $b''^{m-1}_{s_{m-1}}$ sind aus Zellen zusammengesetzte Gebilde, die Eigenschaften haben können, die dem Zellencharakter widersprechen. Sie brauchen z. B. nicht zusammenhängend zu sein, von den $a'^n_{r_n}$ $(r_n = 1, \ldots, \alpha_n)$ können die einen echte Teile der anderen sein, sie können $(n-1)$ dimensionale Zellen enthalten, die mit mehr als 2 in $a'^n_{r_n}$ enthaltenen n-dimensionalen Zellen $a^n_{r_n}$ von A inzident sind usf. Außerdem sind die $a'^n_{r_n}$ bzw. $b'^m_{s_m}$ nicht notwendig mit den $a''^n_{r_n}$ bzw. $b''^m_{s_m}$ identisch, was für die Produktbildung erforderlich wäre. Im Laufe des Beweises wird aber gezeigt werden, daß man die $a'^n_{r_n}$ bzw. $b'^m_{r_m}$ immer so wählen kann, daß dies der Fall ist.

7. Die Transformation von M_l soll stückweise vorgenommen werden. Zunächst transformieren wir M_l unimodular für einen beliebigen festen

[11]) Dabei ist, je nach dem Werte von l, von den beiden Werten $l-q$ und 0 der größere und von l und p der kleinere Wert zu nehmen.

Wert $n = \bar{n}$ so, daß $[\bar{n}, \bar{n}] = J \times \Psi_{l-\bar{n}}$ wird. Es sei $l - \bar{n} = m$. Wir bilden dazu

$$_{(\mu)}(J \times R_m)_{(\nu)} \cdot \mathsf{M}_l \cdot {}_{(\varrho)}(J \times S_m)_{(\sigma)} = \mathsf{M}_l'.$$

Dabei ist zu setzen

$$\mu = \sum_{n=0}^{\bar{n}-1} \alpha_n \beta_{l-n}; \quad \nu = \sum_{n=\bar{n}+1}^{p} \alpha_n \beta_{l-n}; \quad \varrho = \sum_{n=0}^{\bar{n}-1} \alpha_n \beta_{l-n-1}; \quad \sigma = \sum_{n=\bar{n}+1}^{p} \alpha_n \beta_{l-n-1}.$$

M_l' unterscheidet sich von M_l nur in den Elementen der Reihen $\bar{n}$-ter Stufe und in den Elementen der Spalten $\bar{n}$-ter Stufe, und zwar wird:

$$[\bar{n}, \bar{n}-1] = (J \times R_m) \cdot (\mathsf{E}_{\bar{n}} \times J) = \mathsf{E}_{\bar{n}} \times R_m,$$

$$[\bar{n}, \bar{n}] = (J \times R_m) \cdot (J \times \mathsf{H}_m) \cdot (J \times S_m) = J \times R_m \cdot \mathsf{H}_m \cdot S_m = J \times \Psi_m,$$

$$[\bar{n}+1, \bar{n}] = (\mathsf{E}_{\bar{n}+1} \times J) \cdot (J \times S_m) = \mathsf{E}_{\bar{n}+1} \times S_m.$$

$[\bar{n}, \bar{n}]$ hat also die gewünschte Form, während die in $[\bar{n}, \bar{n}-1]$ und $[\bar{n}+1, \bar{n}]$ auftretenden Matrizen R_m und S_m wieder zum Verschwinden gebracht werden müssen. Dies geschieht durch:

$$_{(\mu')}(J \times S_m^{-1})_{(\nu')} \cdot \mathsf{M}_l' \cdot {}_{(\varrho')}(J \times R_m^{-1})_{(\sigma')} = \mathsf{M}_l''.$$

Dabei ist

$$\mu' = \sum_{n=0}^{\bar{n}} \alpha_n \beta_{l-n}; \quad \nu' = \sum_{n=\bar{n}+2}^{p} \alpha_n \beta_{l-n}; \quad \varrho' = \sum_{n=0}^{\bar{n}-2} \alpha_n \beta_{l-n-1}; \quad \sigma' = \sum_{n=\bar{n}}^{p} \alpha_n \beta_{l-n-1}.$$

Es ändern sich dann folgende Untermatrizen:

$$[\bar{n}-1, \bar{n}-1] = (J \times \mathsf{H}_{m+1}) \cdot (J \times R_m^{-1}) = J \times \mathsf{H}_{m+1} \cdot R_m^{-1} = J \times \mathsf{H}_{m+1}',$$

$$[\bar{n}, \bar{n}-1] = (\mathsf{E}_{\bar{n}} \times R_m) \cdot (J \times R_m^{-1}) = \mathsf{E}_{\bar{n}} \times J,$$

$$[\bar{n}+1, \bar{n}] = (J \times S_m^{-1}) \cdot (\mathsf{E}_{\bar{n}+1} \times S_m) = \mathsf{E}_{\bar{n}+1} \times J,$$

$$[\bar{n}+1, \bar{n}+1] = (J \times S_m^{-1}) \cdot (J \times \mathsf{H}_{m-1}) = J \times S_m^{-1} \cdot \mathsf{H}_{m-1} = J \times \mathsf{H}_{m-1}'.$$

$[\bar{n}, \bar{n}-1]$ und $[\bar{n}+1, \bar{n}]$ haben also die ursprüngliche Form wieder angenommen.

Wegen (3) ist nun

$$\mathsf{H}_{m+1}' \cdot \Psi_m = \mathsf{H}_{m+1} \cdot R_m^{-1} \cdot R_m \cdot \mathsf{H}_m \cdot S_m = 0,$$

$$\Psi_m \cdot \mathsf{H}_{m-1}' = R_m \cdot \mathsf{H}_m \cdot S_m \cdot S_m^{-1} \cdot \mathsf{H}_{m-1} = 0.$$

Ist also $\mathsf{H}_{m+1}' = \| \eta'^{m+1}_{s_{m+1} s_m} \|$; $\mathsf{H}_{m-1}' = \| \eta'^{m-1}_{s_{m-1} s_{m-2}} \|$, so bestehen die Beziehungen:

$$\sum_{s_m=1}^{\beta_m} \eta'^{m+1}_{s_{m+1} s_m} \psi^{m}_{s_m s_{m-1}} = 0 \quad (s_{m+1} = 1, \ldots, \beta_{m+1};\ s_{m-1} = 1, \ldots, \beta_{m-1}),$$

$$\sum_{s_{m-1}=1}^{\beta_{m-1}} \psi^{m}_{s_m s_{m-1}} \eta'^{m-1}_{s_{m-1} s_{m-2}} = 0 \quad (s_m = 1, \ldots, \beta_m;\ s_{m-2} = 1, \ldots, \beta_{m-2}).$$

Daraus folgt wegen (5, m):

(8) $\quad \eta'^{m+1}_{s_{m+1} s_m} = 0 \quad (s_{m+1} = 1, \ldots, \beta_{m+1};\ s_m = \beta_m - \bar{\beta}_m + 1, \ldots, \beta_m).$

(9) $\quad \eta'^{m-1}_{s_{m-1} s_{m-2}} = 0 \quad (s_{m-1} = 1, \ldots, \bar{\beta}_m;\ s_{m-2} = 1, \ldots, \beta_{m-2}).$

Es enthalten also in H'_{m+1} die letzten $\bar{\beta}_m$ Spalten und in H'_{m-1} die ersten $\bar{\beta}_m$ Reihen nur 0 als Element.

8. Die geometrische Bedeutung dieses Resultates ist folgende:

Der transformierten Matrix $\mathsf{H}'_{m+1} = \mathsf{H}_{m+1} \cdot R_m^{-1}$, bzw. $\mathsf{H}'_{m-1} = S_m^{-1} \cdot \mathsf{H}_{m-1}$ entspricht wegen (6) das transformierte Relationensystem $(2, m+1)$ bzw. $(2, m-1)$:

(10) $$b^{m+1}_{s_{m+1}} \equiv\!\!> \sum_{s_m = 1}^{\beta_m} \eta'^{m+1}_{s_{m+1} s_m}\, b'^m_{s_m} \qquad (s_{m+1} = 1, \ldots, \beta_{m+1})$$

bzw.

(11) $$b''^{m-1}_{s_{m-1}} \equiv\!\!> \sum_{s_{m-2} = 1}^{\beta_{m-2}} \eta'^{m-1}_{s_{m-1} s_{m-2}}\, b^{m-2}_{s_{m-2}} \qquad (s_{m-1} = 1, \ldots, \beta_{m-1}).$$

Die rechten Seiten von (10) müssen als vollständige Berandungen kongruent Null sein. Da die $b'^m_{s_m}$ $(s_m = 1, \ldots, (\beta_m - \bar{\beta}_m))$, jedes für sich, kongruent Null sind nach $(2', m)$, so muß auch

(12) $$\sum_{s_m = \beta_m - \bar{\beta}_m + 1}^{\beta_m} \eta'^{m+1}_{s_{m+1} s_m}\, b'^m_{s_m} \equiv\!\!> 0 \quad (s_{m+1} = 1, \ldots, \beta_{m+1})$$

sein. Da aber die $b'^m_{s_m}$ $(s_m = \beta_m - \bar{\beta}_m + 1, \ldots, \beta_m)$ voneinander unabhängig sind, ist (12) nur erfüllbar, wenn alle Koeffizienten verschwinden. Dies gibt (8).

Nach $(2', m)$ sind andererseits die $b''^{m-1}_{s_{m-1}}$ $(s_{m-1} = 1, \ldots, \bar{\beta}_m)$ geschlossene, zweiseitige Gebilde, also kongruent Null. Die rechten Seiten von (11) für $s_{m-1} = 1, \ldots, \bar{\beta}_m$ müssen daher identisch Null sein. Dies gibt (9).

Da die von Null verschiedenen Elemente von Ψ_{m+1} nur in den ersten $\bar{\beta}_{m+1}$ Spalten auftreten und $(\beta_m - \bar{\beta}_m) - \bar{\beta}_{m+1} = \mathsf{P}^\beta_m - 1 \geq 0$,[12]) kann man immer H'_{m+1} unimodular transformieren in Ψ_{m+1} durch $R_{m+1} \cdot \mathsf{H}'_{m+1} \cdot S'_{m+1(\bar{\beta}_m)}$, wobei $S'_{m+1(\bar{\beta}_m)}$ durch Ränderung in der oben beschriebenen Art aus einer quadratischen, $(\beta_m - \bar{\beta}_m)$ reihigen Matrix S'_{m+1} entstanden ist.

Dann ist:

$$\begin{aligned} \Psi_{m+1} &= R_{m+1} \cdot \mathsf{H}_{m+1} \cdot S_{m+1} = R_{m+1} \cdot \mathsf{H}'_{m+1} \cdot S'_{m+1(\bar{\beta}_m)} \\ &= R_{m+1} \cdot \mathsf{H}_{m+1} \cdot R_m^{-1} \cdot S'_{m+1(\bar{\beta}_m)}. \end{aligned}$$

[12]) P^β_m bedeutet die Bettische Zahl m-ter Dimension von *B.* Poincaré, Compl. à l'anal. sit., a. a. O. S. 299. Tietze, a. a. O. S. 35.

Also:

$$S_{m+1} = R_m^{-1} \cdot S'_{m+1\,(\bar{\beta}_m)}.$$

Daraus und aus (6) folgt weiter:

$$B''_m = S_{m+1}^{-1} \cdot B_m = S'^{-1}_{m+1\,(\bar{\beta}_m)} \cdot R_m \cdot B_m = S'^{-1}_{m+1\,(\bar{\beta}_m)} \cdot B'_m.$$

Setzt man demnach bei der Transformation der Relationen $(2, m)$ $S'^{-1}_{m+1\,(\bar{\beta}_m)} R_m$ an Stelle von R_m, *so werden die b'_m mit den b''_m identisch*, während sich Ψ_m nicht ändert, da die ersten $(\beta_m - \bar{\beta}_m)$ Reihen von Ψ_m nur Null als Element enthalten.

H'_{m-1} möge unimodular in Ψ_{m-1} transformiert werden durch ${}_{(\bar{\beta}_m)}R'_{m-1} \cdot \mathsf{H}'_{m-1} \cdot S_{m-1}$, wobei R'_{m-1} eine quadratische, $(\beta_{m-1} - \bar{\beta}_m)$ reihige Matrix ist.

9. Die Matrix M''_l soll nun wieder unimodular transformiert werden, und zwar sollen die Untermatrizen $[\bar{n} - 1, \bar{n} - 1]$ und $[\bar{n} + 1, \bar{n} + 1]$ transformiert werden in $J \times \Psi_{m-1}$, bzw. $J \times \Psi_{m+1}$. Dies geschieht in der für $[\bar{n}, \bar{n}]$ in Abschnitt 7 beschriebenen Weise, nur daß an Stelle von $\bar{n}$, R_m und S_m zu setzen ist: $\bar{n} - 1$, R_{m+1}, $S'_{m+1\,(\bar{\beta}_m)}$, bzw. $\bar{n}+1$, ${}_{(\bar{\beta}_m)}R'_{m-1}$, S_{m-1}. Zu beachten ist nur, wie sich durch diese Transformationen $[\bar{n}, \bar{n}]$ ändert. Man erhält:

$$(J \times S'^{-1}_{m+1\,(\bar{\beta}_m)}) \cdot (J \times \Psi_m) \cdot (J \times {}_{(\bar{\beta}_m)}R'^{-1}_{m-1}) = J \times \Psi_m;$$

denn in Ψ_m ändern sich durch $S'^{-1}_{m+1\,(\bar{\beta}_m)} \cdot \Psi_m \cdot {}_{(\bar{\beta}_m)}R'^{-1}_{m-1}$ nur die Elemente der ersten $(\beta_m - \bar{\beta}_m)$ Reihen und der letzten $(\beta_{m-1} - \bar{\beta}_m)$ Spalten; diese sind aber alle Null. $[\bar{n}, \bar{n}]$ wird also durch die weiteren Transformationen der Gesamtmatrix nicht mehr geändert.

Man kann also stufenweise fortfahrend alle in M_l auftretenden H_m $(m = 1, \ldots, q)$ transformieren in Ψ_m, während die E_n $(n = 1, \ldots, p)$ ungeändert bleiben. Diese können dann in ganz entsprechender Weise in die Ω_n unimodular transformiert werden ohne Änderung der Ψ_m; denn M_l war in den $\varepsilon^n_{r_n r_{n-1}}$ und $\eta^m_{s_m s_{m-1}}$ ganz symmetrisch gebildet, wie man erkennt, wenn man innerhalb der Stufen die Einteilung der Zellen in Abteilungen statt nach den Faktoren aus A nach den Faktoren aus B trifft. $[n, n]$ erhält dann die Form $\mathsf{H}_{l-n} \times J$ und $[n, n-1]$ die Form $J \times \mathsf{E}_n$.

10. In unserer Matrix — sie sei bezeichnet mit $\bar{\bar{\mathsf{M}}}_l$ — treten also jetzt nur noch die $\omega^n_{r_{n-1}}$ und $\psi^m_{s_{m-1}}$ als von Null verschiedene Elemente auf. Wenn in jeder Reihe und in jeder Spalte sich nur noch ein von Null verschiedenes Element befindet, ist unser Ziel erreicht, da sich dann diese Elemente immer noch in der Diagonale anordnen lassen. Diese Matrix, die man schließlich so erhält, sei $\bar{\mathsf{M}}_l$ genannt.

Betrachten wir daraufhin die Matrix $\overline{\overline{\mathsf{M}}}_l$.

Jede Reihe enthält kein, ein oder zwei von Null verschiedene Elemente, in letzterem Falle sind dies ein $\omega^n_{r_{n-1}}$ und ein $\psi^{l-n}_{s_{l-n-1}}$, und diese sind die einzigen von Null verschiedenen in ihren Spalten.

Jede Spalte enthält kein, ein oder zwei von Null verschiedene Elemente, in letzterem Falle sind dies ein $\omega^n_{r_{n-1}}$ und ein $\psi^{l-n+1}_{s_{l-n}}$, und diese sind die einzigen von Null verschiedenen in ihren Reihen.

Jedes Wertepaar der einen oder anderen Art liefert seinen größten gemeinsamen Teiler für die Diagonale von $\overline{\mathsf{M}}_l$.

Im einzelnen ergeben sich folgende Werte, wobei immer $\genfrac{}{}{0pt}{}{l-q}{0} \leq n \leq \genfrac{}{}{0pt}{}{l}{p}$[13]) zu nehmen ist:

I. Nur ein von Null verschiedenes Element, das zugleich das einzige von Null verschiedene seiner Spalte ist, enthalten von den Reihen n-ter Stufe

a) die letzten $\bar{\beta}_{l-n}$ Reihen der Abteilungen $(\bar{\alpha}_{n+1}+1)$ bis $(\alpha_n-\bar{\alpha}_n)$, und zwar treten hier die Elemente $\psi^{l-n}_{s_{l-n-1}}$ $(s_{l-n-1}=1,\ldots,\bar{\beta}_{l-n})$ je $(\alpha_n-\bar{\alpha}_n-\bar{\alpha}_{n+1})$-mal auf,

b) die Reihen $(\bar{\beta}_{l-n+1}+1)$ bis $(\beta_{l-n}-\bar{\beta}_{l-n})$ der letzten $\bar{\alpha}_n$ Abteilungen, und zwar treten hier die Elemente $\omega^n_{r_{n-1}}$ $(r_{n-1},\ldots,\bar{\alpha}_n)$ je $(\beta_{l-n}-\bar{\beta}_{l-n}-\bar{\beta}_{l-n+1})$-mal auf.

II. Zwei von Null verschiedene Elemente enthalten von den Reihen n-ter Stufe: die letzten $\bar{\beta}_{l-n}$ Reihen der letzten $\bar{\alpha}_n$ Abteilungen, und zwar treten alle Kombinationen auf von $\omega^n_{r_{n-1}}$ $(r_{n-1}=1,\ldots,\alpha_n)$ mit $\psi^{l-n}_{s_{l-n-1}}$ $(s_{l-n-1}=1,\ldots,\bar{\beta}_{l-n})$.

III. Von den zwei von Null verschiedenen Elementen einer Spalte n-ter Stufe befindet sich das eine in den letzten $\bar{\beta}_{l-n}$ Reihen der ersten $\bar{\alpha}_{n+1}$ Abteilungen der Reihen n-ter Stufe, das andere in den ersten $\bar{\beta}_{l-n}$ Reihen der letzten $\bar{\alpha}_{n+1}$ Abteilungen der Reihen $(n+1)$-ter Stufe. Es sind alle Kombinationen von $\psi^{l-n}_{s_{l-n-1}}$ $(s_{l-n-1}=1,\ldots,\bar{\beta}_{l-n})$ mit $\omega^{n+1}_{r_n}$ $(r_n=1,\ldots,\bar{\alpha}_{n+1})$.

11. Die Zahl der von Null verschiedenen Diagonalelemente in $\overline{\mathsf{M}}_l$ und damit *der Rang* von $\overline{\mathsf{M}}_l$ und M_l ist also[14]):

---

[13]) S. Anm. [11]).

[14]) Es ist dabei, um für jeden Wert von l geltende Formeln zu erhalten, zu setzen:

$\alpha_n=0$ für $n<0$; $n>p$; $\beta_m=0$ für $m<0$; $m>q$

$\bar{\alpha}_n=0$ für $n\leq 0$; $n>p$; $\bar{\beta}_m=0$ für $m\leq 0$; $m>q$; siehe auch „Über die Bettischen Zahlen einer Produktmannigfaltigkeit." a. a. O. S. 68.

$$\bar{\gamma}_l = \sum_{n=0}^{p}[(\alpha_n - \bar{\alpha}_n - \bar{\alpha}_{n+1})\cdot\bar{\beta}_{l-n} + (\beta_{l-n} - \bar{\beta}_{l-n} - \bar{\beta}_{l-n+1})\cdot\bar{\alpha}_n + \bar{\alpha}_n\bar{\beta}_{l-n}$$
$$+ \bar{\alpha}_{n+1}\cdot\bar{\beta}_{l-n}]$$
$$= \sum_{n=0}^{p}(\bar{\alpha}_n\beta_{l-n} + \alpha_n\bar{\beta}_{l-n} - \bar{\alpha}_n\bar{\beta}_{l-n} - \bar{\alpha}_n\bar{\beta}_{l-n+1}).$$

12. *Die Torsionszahlen k-ter Ordnung von C sind die von ± 1 verschiedenen Elementarteiler von $\overline{\mathsf{M}}_{k+1}$ oder, wenn man Elemente vom Werte ± 1 außer acht läßt, von einer Matrix K, die nur in der Diagonale von Null verschiedene Elemente hat, und zwar,* da $(\alpha_n - \bar{\alpha}_n - \bar{\alpha}_{n+1}) = \mathsf{P}_n^\alpha - 1$:[15])

$(\mathsf{P}_n^\alpha - 1)$*-mal die Torsionszahlen $(k-n)$-ter Ordnung von B* $(n = 0, \ldots, p)$,

$(\mathsf{P}_{k-n}^\beta - 1)$*-mal die Torsionszahlen n-ter Ordnung von A* $(n = 0, \ldots, p)$,

die größten gemeinsamen Teiler aller Kombinationen der Torsionszahlen n-ter Ordnung von A mit den Torsionszahlen $(k-n-1)$-ter Ordnung von B $(n = 0, \ldots, p)$, die größten gemeinsamen Teiler aller Kombinationen der Torsionszahlen n-ter Ordnung von A mit den Torsionszahlen $(k-n)$-ter Ordnung von B $(n = 0, \ldots, p)$.

Damit ist gezeigt, daß die Torsionszahlen einer Produktmannigfaltigkeit sich berechnen lassen aus den Bettischen Zahlen und Torsionszahlen der Faktoren und zugleich ein einfaches Verfahren angegeben zu ihrer Bestimmung.

13. Um ein *Beispiel* anzuführen, seien die Torsionszahlen berechnet von der *Mannigfaltigkeit der reellen Flächenelemente im projektiven dreidimensionalen Raum R_3*, wobei unter einem Flächenelement die Kombination einer Ebene mit einem in ihr liegenden Punkt zu verstehen ist.

Wie Steinitz in seinen anfangs zitierten „Beiträgen zur Analysis situs“ gezeigt hat, ist diese Mannigfaltigkeit äquivalent dem Produkt aus dem projektiven Raume R_3 und der projektiven Ebene E_2. Wir haben also $A = E_2$ und $B = R_3$ zu setzen und erhalten, da[16]) $\mathsf{P}_0^\alpha = \mathsf{P}_0^\beta = \mathsf{P}_3^\beta = 2$; $\mathsf{P}_1^\alpha = \mathsf{P}_2^\alpha = \mathsf{P}_1^\beta = \mathsf{P}_2^\beta = 1$ und die auftretenden Torsionszahlen $\omega_1^2 = \psi_1^2 = 2$ sind, für $C = E_2 R_3$:

Torsionszahlen	erster	Ordnung:	2,2,
„	zweiter	„	2,
„	dritter	„	2,
„	vierter	„	2.

[15]) S. Anm. [12]).

[16]) Unter Berücksichtigung der Festsetzungen in Anm. [14]).

(Eingegangen am 25. 2. 1923.)

Reguläre Kurvenscharen auf den Ringflächen.

Von

Hellmuth Kneser in Göttingen.

Einleitung.

Poincaré[1]) hat die durch rationale Differentialgleichungen erster Ordnung bestimmten Kurvenscharen mit topologischen Methoden untersucht. Seine Ergebnisse hat Dyck[2]) in verschiedenen Richtungen weiter ausgedehnt. Als einfachster Fall der Kurvenscharen auf Flächen sollen im folgenden die regulären Kurvenscharen auf geschlossenen Flächen unter ziemlich umfassenden Voraussetzungen eingehender untersucht werden. Die Ansätze sind der kombinatorischen Richtung der Analysis situs mehr angepaßt als die bisherigen; deshalb wird auch schon mehr oder weniger Bekanntes nochmals einheitlich abgeleitet. Es ist dies im wesentlichen der Satz des § 1, daß reguläre Kurvenscharen nur auf Ringflächen bestehen können, der ein Sonderfall der allgemeinen Singularitätenbeziehung[3]) von Dyck ist.

Mit diesem Satz, oder, bei Kurvenscharen mit Singularitäten, mit der Dyckschen Beziehung, ist nicht das letzte Wort gesagt. Wir fragen also nach den genaueren Eigenschaften der Kurvenscharen, die sich besonders in dem Auftreten oder Fehlen geschlossener Scharkurven kundgeben, und erhalten in den Ergebnissen des § 5 eine befriedigende Übersicht über die möglichen topologisch verschiedenen Fälle regulärer Scharen auf Ringflächen. Dort zeigt sich, daß auf der einseitigen Ringfläche allemal eine geschlossene Scharkurve vorhanden ist, und daß die Kurvenscharen ohne geschlossene Kurven mit dem nächstliegenden Beispiel in enger Beziehung stehen. Sind aber geschlossene Kurven vorhanden, so wird die Fläche durch sie in Teile zerlegt, die nur vier verschiedenen Typen angehören. Die wichtigste Hilfe leisten dabei die Sätze des § 4, die aus der Unmöglichkeit bestimmter Ope-

---

[1]) Journ. de math. (3) 7 (1881), S. 375 f., (3) 8 (1882), S. 251 f., (4) 1 (1885), S. 167 f.

[2]) Math. Ann. 32 (1888), S. 451 f.

[3]) A. a. O. [2]) S. 501.

rationen, dem Versagen gewisser Reduktionsprozesse folgern, daß geschlossene Scharkurven in bestimmter Lage vorhanden sind. Man kann sich diese Sätze durch die folgende Bemerkung klarmachen. Wenn sich die Scharkurven einer geschlossenen $\mathfrak{S}$ (cycle limite nach Poincaré) in einer bestimmten Richtung asymptotisch annähern und man sie in der entgegengesetzten Richtung verfolgt, so kann man in beliebiger Richtung von $\mathfrak{S}$ beginnen: man entfernt sich stets um einen endlichen Betrag von $\mathfrak{S}$. Die genannten Sätze stellen eine gewisse Umkehrung dieses Tatbestandes in genauer Fassung dar.

Als bekannt vorausgesetzt werden die Ergebnisse über geschlossene und berandete Flächen, wie sie z. B. in dem Enzyklopädieartikel von Dehn und Heegaard[4]) abgeleitet werden, und der mit dem Jordanschen Kurvensatze verwandte Satz, daß eine auf einem Elementarflächenstück gelegene geschlossene Kurve ohne Doppelpunkt ein Elementarflächenstück begrenzt, der übrigens nur im kombinatorischen Sinne, d. h. unter allen wünschbaren Regularitätsvoraussetzungen benutzt wird.

§ 1.

Vorbereitungen.

Mit Strecke bezeichnen wir das topologische, d. h. eineindeutige stetige Bild der Einheitsstrecke mit Endpunkten: $0 \leqq x \leqq 1$, als geschlossene Kurve das der Kreislinie, als Kurve eines von beiden oder das Bild der Einheitsstrecke mit einem Endpunkt oder ohne Endpunkte. Eine Strecke und eine geschlossene Kurve sind als Bilder abgeschlossener Mengen selbst abgeschlossen.

Unter einer regulären Kurvenschar auf einer Fläche $\mathfrak{F}$ werde das folgende verstanden: Durch jeden Punkt von $\mathfrak{F}$ gehe eine Kurve derart, daß es zu jedem Punkte P von $\mathfrak{F}$ eine Umgebung $\mathfrak{U}$ gibt, die sich so auf ein Gebiet $\overline{\mathfrak{U}}$ der x-y-Ebene abbilden läßt, daß die Kurven — sie sollen *Scharkurven* heißen — in die Geraden $x = \text{konst.}$ übergehen. Ersetzen wir $\overline{\mathfrak{U}}$ durch ein im Inneren gelegenes, das Bild von P im Inneren enthaltendes, parallel den Achsen gestelltes Rechteck und $\mathfrak{U}$ durch das entsprechende Gebiet, so hat auch dieses die geforderte Eigenschaft. Durch passende Koordinatenwahl verwandeln wir $\overline{\mathfrak{U}}$ in das Einheitsquadrat $0 \leqq x \leqq 1$, $0 \leqq y \leqq 1$.

Eine Kurve $\mathfrak{Q}$ heißt *Querkurve*, wenn sie die folgende Eigenschaft hat: ist P einer ihrer Punkte, so läßt sich ein P enthaltendes Stück von $\mathfrak{Q}$ in $\overline{\mathfrak{U}}$ in der Form $y = fx$ mit einer stetigen Funktion fx darstellen. Diese

[4]) III A. B. 3, S. 189—205.

Definition ist unabhängig davon, auf welche Umgebung sie bezogen wird. Ist nämlich ein Punkt in zwei Umgebungen $\mathfrak{U}$ und $\mathfrak{V}$ enthalten, so besteht zwischen den Bildern $\overline{\mathfrak{U}}$ und $\overline{\mathfrak{V}}$ in der x-y- und $\bar{x}$-$\bar{y}$-Ebene eine eineindeutige Beziehung, die die Kurven $x =$ konst. in Kurven $\bar{x} =$ konst. überführt: es ist

$$x = \varphi\bar{x}, \qquad \bar{y} = \psi(x, y).$$

Ist nun die Kurve in $\overline{\mathfrak{U}}$ durch $y = fx$ dargestellt, so ist in $\overline{\mathfrak{V}}$

$$\bar{y} = \psi(\varphi\bar{x}, f\varphi\bar{x})$$

eine stetige Funktion von $\bar{x}$; die Kurve ist auch in $\mathfrak{V}$ Querkurve.

Nach dem Überdeckungssatze von Heine und Borel, der hier zur Definition der geschlossenen Fläche dienen möge[5]), lassen sich unter den Umgebungen $\mathfrak{U}$ endlich viele, $\mathfrak{U}_1, \ldots, \mathfrak{U}_n$, derart auswählen, daß jeder Punkt von $\mathfrak{F}$ im Inneren mindestens einer von ihnen liegt. Sie werden von $2n$ Scharstrecken $\mathfrak{S}$ und $2n$ Querstrecken $\mathfrak{Q}$ begrenzt. Diese können sich noch unendlich oft schneiden; deshalb ändern wir sie in der folgenden Weise ab. Betrachten wir zunächst die Strecken, die im Inneren von $\mathfrak{U}_1$ verlaufen. Jede Scharstrecke unter ihnen wird in $\overline{\mathfrak{U}}_1$ dargestellt durch

$$x = c \ (0 < c < 1), \quad \alpha \leqq y \leqq \beta \quad (0 \leqq \alpha < \beta \leqq 1).$$

Wären es unendlich viele, so müßte eine der unendlich vielen Scharstrecken $\mathfrak{S}$ — sie heiße $\mathfrak{S}_k$ — $\overline{\mathfrak{U}}_1$ in unendlich vielen Strecken durchlaufen. Die zugehörigen Abszissen c hätten einen Häufungswert c'; und da höchstens an den beiden Endstrecken $\alpha > 0$ oder $\beta < 1$ sein kann, wäre der Punkt $x = c'$, $y = \frac{1}{2}$ auch noch Häufungspunkt von $\mathfrak{S}_k$, wenn man eine ihn enthaltende Strecke $x = c'$, $\frac{1}{2} - \delta < y < \frac{1}{2} + \delta$ aus $\mathfrak{S}_k$ ausschneidet, während doch auch der Rest von $\mathfrak{S}_k$ noch abgeschlossen ist. In den Fällen $\alpha > 0$ und $\beta < 1$ fügen wir die ergänzende Strecke $0 \leqq y \leqq \alpha$ bzw. $\beta \leqq y \leqq 1$ zu $\mathfrak{S}_k$ hinzu. Jetzt wird $\overline{\mathfrak{U}}_1$ durch die darin verlaufenden Strecken $\mathfrak{S}$ in eine endliche Anzahl Rechtecke zerlegt. In jedem dieser Rechtecke $\mathfrak{R}$ verlaufen nur noch Querstrecken, die einen Randpunkt mit einem anderen verbinden. Endigt ein solcher Teil der Querstrecke $\mathfrak{Q}_k$, die das Gebiet $\mathfrak{U}_k$ begrenzt, beiderseits auf derselben Querseite ($y = 0$ oder $y = 1$) von $\mathfrak{R}$, und betritt die Grenze von $\mathfrak{U}_k$ nicht das dazwischenliegende Gebiet mit Einschluß des Randes, so

[5]) Es ist sachgemäß, eine geschlossene Mannigfaltigkeit von n Dimensionen als eine Menge zu definieren, in der ein Stetigkeitsbegriff derart gegeben ist, daß sich eine Umgebung jedes Elementes topologisch auf ein Gebiet des n-dimensionalen Zahlenraumes abbilden läßt und sich die ganze Menge durch eine endliche Anzahl solcher Umgebungen erschöpfen läßt. Will man dann die kombinatorischen Methoden der Topologie anwenden, so entsteht die Aufgabe, die Mannigfaltigkeit zu „triangulieren“, d. h. in Zellen einzuteilen. Im folgenden wird diese Aufgabe gelöst für den Fall $n = 2$ mit Benutzung der Vorteile, die die Existenz der Kurvenschar gewährt.

schieben wir die Querstrecke ganz auf die Seite (Fig. 1). Dadurch wird das dazwischenliegende Gebiet $\mathfrak{G}$ zu $\mathfrak{U}_k$ hinzugefügt oder von ihm abgeschnitten. Das neu entstehende Gebiet $\mathfrak{U}_k^*$ hat dieselben Eigenschaften wie $\mathfrak{U}_k$, und auch jetzt liegt jeder Punkt von $\mathfrak{F}$ — zwar nicht mehr notwendig im Inneren, aber — im Inneren oder auf dem Rande mindestens eines der Gebiete $\mathfrak{U}$; denn es wurde zu $\mathfrak{U}_k$ ein Gebiet $\mathfrak{G}$ hinzugefügt, das außer dem gemeinsamen Randstück keinen Punkt von $\mathfrak{U}_k$ enthält, oder ein solches von $\mathfrak{U}_k$ abgetrennt, das in $\mathfrak{U}_1$ enthalten ist, und man sieht leicht, daß man auch $\mathfrak{U}_k^*$ auf ein Rechteck abbilden kann. Wären jetzt in $\mathfrak{R}$ noch unendlich viele Querstrecken vorhanden, so müßten mindestens einer der endlich vielen Querstrecken $\mathfrak{Q}$ deren unendlich viele angehören. Es gäbe also eine Querstrecke $\mathfrak{S}_l$, die unendlich viele Strecken in $\mathfrak{R}$ hätte, die zwei Punkte der einen Querstrecke (etwa $y = 0$) verbinden:

Fig. 1.

$$\alpha \leqq x \leqq \beta, \quad y = fx, \quad f\alpha = f\beta = 0, \quad 0 < fx < 1 \quad \text{für} \quad \alpha < x < \beta,$$

und bei denen in dem Zwischengebiet $0 \leqq y \leqq fx$ ein weiterer Punkt von $\mathfrak{S}_l$ läge. Die unendlich vielen Strecken $\alpha \leqq x \leqq \beta$ häufen sich an einer Stelle c. Die Querstrecke $\mathfrak{S}_l$ geht als abgeschlossene Menge durch den Punkt $(c, 0)$. Um diesen herum kann man eine rechteckige Umgebung abgrenzen, die außer einer Strecke $|x - c| \leqq \delta$, $y = fx$ keinen Punkt von $\mathfrak{Q}_l$ enthält. Das steht im Widerspruch damit, daß in beliebiger Nähe von $(c, 0)$ gerade Linien $x =$ konst. die Strecke $\mathfrak{Q}_l$ in mindestens zwei Punkten schnitten. Also wird $\mathfrak{R}$ nur noch von endlich vielen Querstrecken durchlaufen. Sie seien gegeben durch

$$y = f_1 x, \ldots, y = f_m x,$$

wo jede der Funktionen f an den Enden ihres Definitionsbereiches den Wert 0 oder 1 hat, wenn das Ende nicht mit einer der Grenzen von $\mathfrak{R}$ zusammenfällt. Wir ändern sie noch weiter ab. Wenn überhaupt $f_i = f_k$ wird, so ersetzen wir auf der Strecke zwischen dem größten und kleinsten Wert x, für den dies vorkommt, die größere der beiden Funktionen durch die kleinere. Dies tun wir mit allen Paaren i, k in irgendeiner Reihenfolge. Dann werden zwei der Funktionen nur noch auf einer Strecke, in einem Punkte oder gar nicht einander gleich; d. h. in $\mathfrak{R}$ verlaufen endlich viele Querstrecken, die höchstens Endpunkte gemeinsam haben. Durch ihre Endpunkte ziehen wir Scharstrecken bis zur nächst darüber und darunter liegenden Querstrecke, jedoch nicht aus $\mathfrak{R}$ hinaus. Dadurch wird $\mathfrak{R}$ in eine endliche Anzahl Gebiete zerlegt, die sich darstellen durch

$$\alpha \leqq x \leqq \beta, \quad fx \leqq y \leqq gx,$$

wobei $f \leqq g$ ist und das Gleichheitszeichen höchstens an den Endpunkten

gilt (Fig. 2). Solche Gebiete, die sich auf Zwei-, Drei- oder Vierecke so abbilden lassen, daß die Scharkurven in senkrechte Gerade übergehen, sollen Normalgebiete heißen (Fig. 3).

Fig. 2.

Fig. 3.

Hiermit ist das folgende erreicht: $\mathfrak{U}_1$ ist in eine Anzahl Normalgebiete zerlegt worden und zugleich sind die in $\mathfrak{U}_1$ verlaufenden Querstrecken so abgeändert worden, daß die Gebiete $\mathfrak{U}$ in Gebiete $\mathfrak{U}'$ mit denselben Eigenschaften verwandelt sind (es werde nun auch $\mathfrak{U}_1$ mit $\mathfrak{U}_1'$ bezeichnet) und nach wie vor jeder Punkt von $\mathfrak{F}$ im Inneren oder auf dem Rande eines der Gebiete $\mathfrak{U}'$ liegt.

Dieselben Abänderungen nehmen wir nun vor, indem wir $\mathfrak{U}_2'$ anstatt $\mathfrak{U}_1$ zugrunde legen. Dabei sollen die Gebiete $\mathfrak{U}'$ in Gebiete $\mathfrak{U}''$ übergehen. Diese haben dieselben Eigenschaften wie vorher und $\mathfrak{U}_1''$ und $\mathfrak{U}_2''$ sind durch endlich viele Schar- und Querstrecken in Normalgebiete zerlegt. Nachdem so alle $\mathfrak{U}$ behandelt sind, wird $\mathfrak{F}$ durch eine endliche Anzahl Schar- und Querstrecken in Normalgebiete zerlegt.

Die Normaleinteilung kann noch vielfach geändert werden[6]). Wir wählen in jeder Zelle einen Punkt M derart, daß die Scharkurve durch ihn die Zelle nicht gerade an den Ecken verläßt, und verbinden M mit jeder Ecke der Zelle durch eine Querstrecke (Fig. 4). So haben wir nur Normalbereiche mit drei Ecken. Wo noch eine Scharstrecke $\mathfrak{S}$ eine Zelle begrenzt, fassen wir die beiden anstoßenden Zellen zusammen. Sie lassen sich auf ein Viereck topologisch abbilden, so daß $\mathfrak{S}$ dessen eine Diagonale und die parallelen Geraden die Scharstrecken sind. Ersetzen wir $\mathfrak{S}$ durch die andere Diagonale, so haben wir zwei neue Normalbereiche, die nur von Querstrecken begrenzt sind. Auf diese Weise werden alle Scharstrecken aus unserer Netzeinteilung beseitigt.

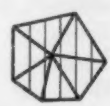

Fig. 4.

Auf die so gewonnene Einteilung wenden wir die Eulersche Formel an. Sie lautet

$$\alpha_0 - \alpha_1 + \alpha_2 = -K,$$

worin α_0 die Anzahl der Ecken, α_1 die der Strecken, α_2 die der Zellen ist und K die Charakteristik, eine von der Einteilung unabhängige, die Fläche $\mathfrak{F}$ kennzeichnende Zahl. Nun sind alle Zellen Dreiecke, d. h. es ist

$$3\alpha_2 = 2\alpha_1.$$

[6]) Vgl. die interne Transformation bei Dehn-Heegaard, a. a. O. S. 159.

Sodann ist an jeder Fläche die Ecke ausgezeichnet, durch die eine Scharkurve in die Fläche eintritt. Von jeder Ecke geht aber die Scharkurve nach zwei Richtungen; also ist $\alpha_1 = 2\alpha_0$. Daraus folgt

$$2\alpha_1 = 6\alpha_0, \qquad \alpha_0 - \alpha_1 + \alpha_2 = \alpha_0 - 3\alpha_0 + 2\alpha_0 = 0.$$

Die Fläche $\mathfrak{F}$, d. h. eine geschlossene Fläche, auf der eine reguläre Kurvenschar liegt, hat die Charakteristik Null, d. h. sie ist eine ein- oder zweiseitige Ringfläche.

§ 2.
Geschlossene Scharkurven.

Bei der weiteren Untersuchung der regulären Kurvenscharen drängt sich sofort die Frage nach dem Auftreten geschlossener Scharkurven und ihrer gegenseitigen Lage auf. Es mögen auf $\mathfrak{F}$ eine Anzahl geschlossener Scharkurven $\mathfrak{S}_1, \ldots, \mathfrak{S}_n$ liegen. Wir zerschneiden $\mathfrak{F}$ längs $\mathfrak{S}_1, \ldots, \mathfrak{S}_n$ und machen die so entstehende berandete Fläche oder, wenn $\mathfrak{F}$ zerfällt, eine der entstehenden Flächen dadurch wieder zu einer geschlossenen, daß wir auf jeder ihrer Randkurven gegenüberliegende Punkte vereinigen. So entsteht wieder eine geschlossene Fläche mit einer regulären Kurvenschar. Umläuft man eine der Kurven $\mathfrak{S}$, so vertauschen sich ihre Ränder; wir haben eine einseitige Fläche, also nach § 1 eine einseitige Ringfläche. Auf ihr liegen eine Anzahl einrandiger Kurven, die sich nicht schneiden und die Fläche nicht zerlegen. Solcher Kurven gibt es höchstens zwei; dann schneidet man die Fläche $\mathfrak{F}$ längs einer von ihnen auf, so entsteht eine Fläche der Charakteristik 0 mit einem Rand, d. h. ein Möbiussches Band. Schneidet man längs einer zweiten Kurve auf, so hat die entstehende Fläche die Charakteristik 0 und zwei Randkurven, d. h. sie ist ein gewöhnliches (zweirandiges) Band. Auf diesem gibt es aber keine einrandige Kurve mehr. Also gilt der Satz:

Zerschneidet man die Fläche $\mathfrak{F}$ längs geschlossener Scharkurven, so entsteht eine Anzahl ein- oder zweirandiger Bänder.

Diese können wieder zur Fläche $\mathfrak{F}$ zusammengefügt werden, indem man jede Randkurve mit sich selbst oder mit einer andern vereinigt.

Eine geschlossene Quer- oder Scharkurve auf $\mathfrak{F}$ kann kein Elementarflächenstück begrenzen. Denn ordnen wir gegenüberliegende Randpunkte einander zu, so würden wir eine geschlossene Fläche der Charakteristik -1 mit einer regulären Kurvenschar erhalten.

Es gibt kein Elementarflächenstück $\mathfrak{E}$ auf $\mathfrak{F}$, das von einer Quer- und einer Scharstrecke begrenzt wird, die in ihren Endpunkten so zusammenstoßen, daß $\mathfrak{E}$ in der Umgebung der Ecken ganz auf einer Seite der Scharstrecke liegt. Denn spiegelt man $\mathfrak{E}$ an der begrenzenden Schar-

strecke und fügt man das Spiegelbild zu $\mathfrak{E}$ hinzu, so erhält man ein Elementarflächenstück, das von einer geschlossenen Querkurve begrenzt wird, im Widerspruch zu dem eben Bewiesenen.

§ 3.

Abbildung von Strecken und geschlossenen Kurven auf sich.

In diesem Abschnitt handelt es sich um die Frage, wann zwei topologische Abbildungen f und g zweier Strecken oder geschlossener Kurven $\mathfrak{S}$ und $\mathfrak{T}$ auf sich ähnlich sind, d. h. wann es eine Abbildung φ von $\mathfrak{S}$ auf $\mathfrak{T}$ mit der Umkehrung φ^{-1} gibt, die die Abbildung f in die Abbildung g überführt, d. h. für die $f = \varphi^{-1} g \varphi$ oder $\varphi f = g \varphi$ ist. Durchweg wird die Umkehrfunktion von f mit f^{-1} bezeichnet und $f^{n+1} = f f^n$ und $f^{n-1} = f^{-1} f^n$ geschrieben.

Die Festpunkte der Abbildung f müssen vermöge φ in die von g übergehen; die Mengen der Festpunkte auf $\mathfrak{S}$ und $\mathfrak{T}$ müssen also homöomorph sein. Da sie abgeschlossen sind, lassen sie (wenn es überhaupt Festpunkte gibt, was bei *Strecken* $\mathfrak{S}$ und $\mathfrak{T}$ immer zutrifft) endlich oder abzählbar unendlich viele Strecken übrig, in deren Inneren keine Festpunkte mehr liegen. Von diesen gilt der Satz:

Haben die Abbildungen f und g der Strecken $\mathfrak{S}$ und $\mathfrak{T}$ auf sich keinen inneren Festpunkt, so sind sie ähnlich.

Jede der Abbildungen muß alle Punkte in Richtung des einen Endpunktes verschieben; denn die stetige Funktion $fs - s$, die nur in den Endpunkten verschwindet, ist im Inneren durchweg positiv oder durchweg ngativ. Sei $s = 1$ und $t = 1$ dieser Endpunkt. Wir wählen im Inneren von $\mathfrak{S}$ und $\mathfrak{T}$ je einen Punkt s_0 bzw. t_0 und teilen $\mathfrak{S}$ und $\mathfrak{T}$ durch die iterierten Bilder $f^n s_0$ und $g^n t_0$ in die Strecken $\mathfrak{S}_n (f^n s_0 \leqq s \leqq f^{n+1} s_0)$ und $\mathfrak{T}_n (g^n t_0 \leqq t \leqq g^{n+1} t_0)$ ein $(n = 0, \pm 1, \ldots)$. Dann bilden wir $\mathfrak{S}_0$ auf $\mathfrak{T}_0$ ab durch eine beliebige Funktion $t = \varphi_0 s$ und $\mathfrak{S}_n$ auf $\mathfrak{T}_n$ durch $t = g^n \varphi_0 f^{-n} s = \varphi s$. Diese Abbildung hat, wie man leicht sieht, die geforderte Eigenschaft $g \varphi = \varphi f$.

Ganz entsprechend beweist man:

Lassen die Abbildungen f und g der Strecken $\mathfrak{S}$ und $\mathfrak{T}$ auf echte Teilstrecken derselben je einen Endpunkt, aber keinen inneren Punkt fest, so sind sie ähnlich.

Wir kommen zu den Abbildungen geschlossener Kurven auf sich. Ist $\mathfrak{S}$ eine solche Kurve, und werden die Punkte von $\mathfrak{S}$ durch einen bis auf eine ganze Zahl bestimmten stetigen Parameter s festgelegt, so gibt eine stetige Funktion fs eine topologische Abbildung von $\mathfrak{S}$ auf sich, wenn sie monoton und auf keiner Strecke konstant ist und — je nachdem ob sie

steigt oder fällt — die Gleichung $f(s+1)=fs\pm 1$ erfüllt. Eine solche Funktion heiße Abbildungsfunktion. Jede Abbildung wird durch eine Abbildungsfunktion vermittelt. Die Umkehr- und wiederholten Funktionen einer Abbildungsfunktion sind wieder Abbildungsfunktionen. Ist $f^p s - s$ eine ganze Zahl für irgendein s und ein ganzes p, so hat die p-te Wiederholung unserer Abbildung einen Festpunkt. Ist fs eine fallende Funktion, so fällt $fs-s$ bei Vermehrung von s um 1 um 2, nimmt also auf der Strecke von der Länge 1 genau zwei ganzzahlige Werte an; d. h. eine Abbildung, die den Umlaufssinn umkehrt, hat genau zwei Festpunkte.

Es möge nun[7]) f den Umlaufssinn erhalten, d. h. es sei $f(s+1)=fs+1$. Durch Hinzufügen einer ganzen Zahl erreichen wir, daß $0 \leqq f0 < 1$ ist. Wir definieren die Konstante c durch die Ungleichheiten

$$m_n \leqq nc \leqq m_n + 1,$$

worin n alle positiven Zahlen durchläuft und m_n die oder eine der beiden durch

$$m_n \leqq f^n 0 \leqq m_n + 1$$

bestimmten ganzen Zahlen ist[8]). Diese Ungleichheiten sind alle miteinander verträglich; denn es gilt für ganzes positives k

$$k m_n \leqq f^{kn} 0 \leqq k(m_n + 1).$$

Dies beweisen wir durch vollständige Induktion. Ist

$$f^{(k-1)n} 0 \leqq (k-1)(m_n+1),$$

so folgt

$$\begin{aligned} f^{kn} 0 = f^n f^{(k-1)n} 0 &\leqq f^n((k-1)(m_n+1)) \\ &= (k-1)(m_n+1) + f^n 0 \leqq k(m_n+1) \end{aligned}$$

und ebenso die andere Ungleichheit. Es ist daher

$$k m_n \leqq m_{kn} \leqq k(m_n+1),$$

d. h. die n-te und kn-te Ungleichheit sind miteinander verträglich. Wären nun die n-te und die p-te Ungleichheit im Widerspruch, so läge zwischen den Strecken, in die c durch beide eingeschlossen wird, ein Abstand d. Wählen wir ein gemeinsames Vielfaches N von n und p so groß, daß $Nd > 1$ ist, so könnte die N-te Ungleichheit nicht zugleich mit der n-ten

---

[7]) Zu den folgenden Überlegungen vergleiche man Poincaré, a. a. O [1]), E. E. Levi, C. R. **153** (1911), S. 799 f. und P. Bohl, Acta math. **40** (1916), S. 233 f.

[8]) Die Konstante c läßt sich folgendermaßen kinematisch deuten. Denken wir uns die Abbildung $s \to fs$ durch eine während der Zeiteinheit vor sich gehende Bewegung vermittelt und wiederholen wir diese Bewegung periodisch, so besagt die Existenz des den obigen Ungleichheiten genügenden Wertes c, daß jeder Punkt eine mittlere Umlaufsgeschwindigkeit hat und diese für alle Punkte dieselbe ist.

und p-ten verträglich sein, was doch nach dem obigen stattfinden muß. Da der Wert c in beliebig enge Strecken eingeschlossen wird, ist er völlig bestimmt.

Wir definieren die Funktion χs zunächst für alle Werte $f^n 0 + l$ (n und l ganz) durch

$$\chi(f^n 0 + l) = nc + l.$$

Auch hier liegt kein Widerspruch vor; denn ist

$$f^n 0 + l = f^{n'} 0 + l' \qquad (n > n'),$$
$$f^n l = f^{n'} l',$$
$$f^{n-n'} l = l',$$
$$f^{n-n'} 0 = l' - l,$$

so ist für jedes k

$$f^{k(n-n')} 0 = k(l' - l),$$
$$k(l' - l) - 1 \leqq k(n - n')c \leqq k(l' - l) + 1,$$

d. h.

$$(n - n')c = l' - l,$$
$$\chi(f^n 0 + l) = nc + l = n'c + l' = \chi(f^{n'} 0 + l').$$

Die Funktion χ ist monoton. Ist nämlich

$$f^n 0 + l > f^{n'} 0 + l', \qquad f^n l > f^{n'} l',$$

so folgt

$$f^{n-n'} l > l',$$
$$f^{n-n'} 0 > l' - l,$$
$$m_{n-n'} \geqq l' - l,$$
$$(n - n')c \geqq l' - l,$$
$$\chi(f^n 0 + l) = nc + l \geqq n'c + l' = \chi(f^{n'} 0 + l').$$

Setzen wir nun χs gleich der oberen Grenze aller Werte, die $\chi s'$ für $s' \leqq s$ annimmt, so haben wir für alle Werte s die monotone Funktion χ definiert, die den Funktionalgleichungen

$$\chi(s + 1) = \chi s + 1, \qquad \chi f s = \chi s + c$$

genügt. Wüßten wir, daß die Funktion χ stetig und auf keiner Strecke konstant, d. h. daß sie eine Abbildungsfunktion ist, so hätten wir eine Abbildung von $\mathfrak{S}$ auf den Kreis, die die Abbildung f in eine Drehung um den Winkel $2\pi c$ verwandelt. Dies ist aber nicht allgemein der Fall.

Wir unterscheiden ob c rational ist oder nicht. Ist $c = p : q$ mit ganzen teilerfremden p und q, so kann höchstens die q-te Wiederholung von f einen Festpunkt haben. Denn damit der Punkt $f^n s$ mit s überein-

stimmt, muß $f^n s - s$ ganz sein, und dann ist auch $\chi f^n s - \chi s = nc$ ganz, und dies tritt nur für $n = kq$ ein. Die q-te Wiederholung aber. und daher jede kq-te hat auch wirklich den Festpunkt

$$s_0 = \underset{\chi\sigma < 0}{\text{obere Grenze}}\ \sigma;$$

denn es ist

$$f^q s_0 = \underset{\chi\sigma < qc}{\text{ob. Gr.}}\ \sigma = \underset{\chi\sigma < p}{\text{ob. Gr.}}\ \sigma = s_0 + p\,.$$

Da mit jedem Wert a auch die Werte $a \pm nc$ auf Strecken angenommen werden, gehen sie alle aus endlich oder abzählbar unendlich vielen durch Addition von $\pm nc$ eindeutig hervor. Da die Werte $a \pm nc$ mod 1 überall dicht liegen, so sind auch die entsprechenden Strecken überall dicht geordnet. Zusammenfassend können wir sagen:

Bei einer den Umlaufssinn erhaltenden Abbildung der geschlossenen Kurve $\mathfrak{S}$ auf sich läßt sich entweder $\mathfrak{S}$ in q Teilstrecken zerlegen, die durch die Abbildung permutiert werden, oder man kann, indem man nötigenfalls endlich oder abzählbar unendlich viele Intervalle (die Konstanzintervalle) als Punkte betrachtet, die Abbildung überführen in eine Drehung des Kreises um ein irrationales Vielfaches von π.

§ 4.

Sätze über die Existenz geschlossener Scharkurven.

In diesem Abschnitt soll eine Scharstrecke nicht notwendig das umkehrbar eindeutige, wohl aber das eindeutige stetige Bild der Einheitsstrecke sein.

Satz 1. *Es sei $\mathfrak{P}$ eine geschlossene zweirandige Querkurve, $\mathfrak{Q}$ eine Querstrecke mit den Endpunkten Q_1 und Q_2. Wird Q_1 mit einem Punkte P_1 auf $\mathfrak{P}$ durch eine Scharstrecke verbunden, die $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{Q}$ sonst nicht trifft, und kann eine Scharstrecke aus der Anfangslage $P_1 Q_1$ so verschoben werden, daß ihr einer Endpunkt S auf $\mathfrak{Q}$ beliebig nahe an Q_2 rückt, während der andere Endpunkt R die Kurve $\mathfrak{P}$ unendlich oft umläuft, und werden $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{Q}$ von keiner einrandigen geschlossenen Scharkurve geschnitten, so geht durch Q_2 eine geschlossene Scharkurve, die $\mathfrak{P}$ nicht trifft, und das von der Scharstrecke bestrichene Gebiet läßt sich mit Rand topologisch unter Erhaltung der Scharkurven auf eine bestimmte Kurvenschar auf einer bestimmten Fläche* (*Fig.* 5) *abbilden, nämlich auf die durch die Differentialgleichung*

Fig. 5.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x}{\alpha^2 - x^2}$$

definierte auf dem Rechteck $0 \leqq y \leqq 1$, $0 \leqq x \leqq \alpha$, *das durch Zuordnung der Punkte* $(x, 0)$ *und* $(x, 1)$ *zu einem Bande geschlossen wird.*

Zum Beweise dient der folgende

Hilfssatz. Rücken die Endpunkte U und V einer Scharkurve $\mathfrak{S}$ auf zwei Querstrecken $\mathfrak{U}$ und $\mathfrak{V}$ den Punkten U_0 und V_0 beliebig nahe, während die Zahl der Netzpunkte auf $\mathfrak{S}$ unter einer Schranke m bleibt, so nähert sich $\mathfrak{S}$ einer U_0 und V_0 verbindenden Scharkurve $\mathfrak{S}_0$ beliebig an.

Sei TU_0 die letzte, an U_0 anstoßende, Netzstrecke auf $\mathfrak{U}$. Nennen wir in einem Netzdreieck zwei Seiten gegenüberliegend, wenn sie durch eine Scharstrecke im Inneren des Dreieckes verbunden werden (AB und AC, AB und BC in Fig. 6), so liegen der Strecke TU_0 in dem Dreieck $\varDelta_1$, in das die Scharkurve $\mathfrak{S}$ hineinführt, eine Seite oder zwei Seiten gegenüber. Jedenfalls zerfällt die Strecke TU_0 mit Einschluß ihrer Endpunkte in höchstens fünf Teile, die abwechselnd Punkte und Strecken ohne Endpunkte sind, derart, daß die von den Punkten eines Teiles ausgehenden Scharkurven das Dreieck $\varDelta_1$ an derselben Seite bzw. Ecke verlassen und demgemäß in dasselbe Dreieck $\varDelta_2$ eintreten. In jedem dieser Dreiecke $\varDelta_2$ wiederholen wir dasselbe und kommen zu höchstens 5^2 Dreiecken $\varDelta_3$ usw. Nach m-maliger Wiederholung sehen wir, daß TU_0 in höchstens 5^{m-1} Teile zerfällt derart, daß die vom Inneren eines dieser Teile ausgehenden Scharkurven bis zu ihrem m-ten Netzpunkte keine Netzecke treffen. Wir nehmen die letzte, an U_0 anstoßende Teilstrecke und fragen: was wird aus der Scharstrecke $\mathfrak{S}$, wenn wir ihren Anfangspunkt an U_0 heranrücken lassen? Die Zahl der Teile, in die $\mathfrak{S}$ durch das Netz geteilt wird, bleibt unverändert. Jede der (höchstens m) Teilstrecken rückt gegen eine Scharstrecke $\mathfrak{S}_0^{(i)}$ oder schrumpft auf einen Punkt zusammen, und der Endpunkt V rückt gegen V_0. Die Scharstrecken $\mathfrak{S}_0^{(i)}$ schließen sich aneinander und verbinden U_0 und V_0.

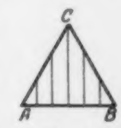

Fig. 6.

Um den Satz 1 zu beweisen, fragen wir, in welcher Lage die Scharstrecke $\mathfrak{S}$ zuerst außer ihren Endpunkten weitere Punkte von $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{Q}$ enthält. Der betreffende Punkt kann nur ein Endpunkt von $\mathfrak{Q}$ sein; denn wäre es ein innerer Punkt von $\mathfrak{P}$ oder $\mathfrak{Q}$, so würden alle benachbarten Scharstrecken auch $\mathfrak{P}$ oder $\mathfrak{Q}$ schneiden. Wäre es nun der Endpunkt Q_2, so müßte $\mathfrak{S}$ in den folgenden Lagen einen Schnittpunkt mit $\mathfrak{Q}$ haben, der von Q_2 gegen Q_1 rückt und daher dem Punkte S begegnet. Findet dies im Punkte T statt, so kehrt die Scharkurve durch T, nachdem sie $\mathfrak{P}$ geschnitten hat, wieder nach T zurück, sie ist geschlossen. Sie ist auch einrandig; denn die Seite, nach der $\mathfrak{S}$ vorrückt, ist in T einerseits die Richtung nach Q_2, andererseits die nach Q_1. Das Auftreten einer solchen Scharkurve war gerade ausgeschlossen.

Es sei also Q_1 der erste Schnitt mit $\mathfrak{Q}$. Die nächsten Schnitte der Scharkurve durch Q_1 mit $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{Q}$ können nur die Enden von $\mathfrak{S}$ in

dieser Lage sein. Denn wäre es ein anderer, träten mehrere Schnitte zugleich auf, so müßten sie alle in Q_1 liegen und der nächste Schnitt der Scharkurve durch Q_1 mit $\mathfrak{P}$ oder $\mathfrak{Q}$ wäre Q_1 selbst: die Kurve wäre geschlossen und schnitte $\mathfrak{P}$ nicht, während sie doch in Wirklichkeit Q_1 und P_1 verbindet. Nun wissen wir aber, daß die Scharkurve durch Q_1 in der einen Richtung P_1 erreicht. Also tritt auf $\mathfrak{S}$ genau dann ein neuer Schnitt mit $\mathfrak{P}$ oder $\mathfrak{Q}$ auf, wenn R einmal $\mathfrak{P}$ umlaufen hat, und zwar ist es immer Q_1. In den folgenden Lagen liegen also auf $\mathfrak{S}$ die Punkte R (auf $\mathfrak{P}$), S_1 (auf $\mathfrak{Q}$), S (auf $\mathfrak{Q}$) in dieser Reihenfolge, wobei S_1 ebenso wie S gegen Q_2 rückt. Wir betrachten die Strecke $S_1 S$ und fragen, ob auf ihr ein neuer Schnitt mit $\mathfrak{P}$ oder $\mathfrak{Q}$ auftreten kann. Es müßte ein Endpunkt und aus demselben Grunde wie vorher der Punkt Q_1 sein. Wir haben aber gesehen, daß Q_1 als neuer Schnitt auf $\mathfrak{S}$ nur auftritt, wenn R nach P_1 gelangt, und daß Q_1 immer zwischen einem Schnitt mit $\mathfrak{P}$ und einem mit $\mathfrak{Q}$ liegt. Also bleibt $S_1 S$ immer von $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{Q}$ frei. Der Punkt S_1 ist immer genau in der Lage, die S einnahm, als der Anfangspunkt R der Kurve $\mathfrak{P}$ einmal weniger umlaufen hatte. Er kann daher S nie einholen, nähert sich aber zugleich mit S dem Endpunkt Q_2 von $\mathfrak{Q}$ an. Wir bezeichnen mit U_n den Punkt, bis zu dem S gelangt, wenn R von P_1 aus n Umläufe macht, und betrachten die folgenden Gebiete. Das erste $\mathfrak{G}_0$ sei das von RS beim ersten Umlaufe von R überstrichene, $\mathfrak{G}_1$ das von $S_1 S$ beim ersten, allgemein $\mathfrak{G}_n$ das von $S_1 S$ beim n-ten Umlauf von R überstrichene Gebiet.

Dieselben Überlegungen stellen wir bei der besonderen Kurvenschar an, die durch die Differentialgleichung

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x}{\alpha^2 - x^2}$$

auf dem Rechteck $0 \leqq y \leqq 1$, $0 \leqq x \leqq \alpha$ bestimmt wird, das wir durch Zuordnung der Punkte $(x, 0)$ und $(x, 1)$ zu einem Bande schließen, das von der geschlossenen Scharkurve $x = \alpha$ und der geschlossenen Querkurve $x = 0$ begrenzt wird, indem $\mathfrak{P}'$ die Querkurve $x = 0$ und $\mathfrak{Q}'$ die Strecke $y = \frac{1}{2}$, $\beta \leqq x \leqq \alpha$ $(0 < \beta < \alpha)$ ist. Es treffen alle Voraussetzungen zu, keine einrandige Scharkurve stört den Frieden; und so kommen wir auch hier zu Gebieten, $\mathfrak{G}_0'$, $\mathfrak{G}_1'$, ..., die sich genau wie $\mathfrak{G}_0$, $\mathfrak{G}_1$, ... aneinanderschließen. Wir wollen $\mathfrak{G}_i$ auf $\mathfrak{G}_i'$ topologisch so abbilden, daß die gemeinsamen Randpunkte zweier $\mathfrak{G}_i$ beide Male in derselben Weise abgebildet werden, und daß Scharkurven in Scharkurven übergehen. Wir konstruieren zunächst die Abbildung von $\mathfrak{Q}$ auf $\mathfrak{Q}'$. Beide Strecken werden durch Übergang längs der Scharkurve bis zum nächsten Schnitt so auf die Teilstrecken $S_1 Q_2$ bzw. $S_1' Q_2'$ abgebildet, daß alle Punkte auf Q bzw. auf Q_2' zurücken. Nach § 3 Satz 2 sind die Abbildungen ähnlich. Die dort ge-

wonnene Abbildung von $\mathfrak{Q}$ auf $\mathfrak{Q}'$ benutzen wir. Die Kurven $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{P}'$ bilden wir so aufeinander ab, daß die Scharkurven durch entsprechende Punkte die Strecken $\mathfrak{Q}$ und $\mathfrak{Q}'$ in entsprechenden Punkten treffen. Diese Abbildung ist außer in P_1 stetig, da es die von $\mathfrak{Q}$ auf $\mathfrak{Q}'$ und die durch Scharkurven vermittelten sind, und schließlich auch in P_1 stetig. Jetzt führen wir auf den Scharkurven eine Längenmessung ein, etwa die Länge in irgendwelchen ebenen Bildern der dreieckigen Zellen. Um das Bild eines beliebigen Punktes P zu bestimmen, ziehen wir die Scharstrecke durch P beiderseits bis zum Schnitt mit $\mathfrak{P}$ oder $\mathfrak{Q}$, ziehen die Scharstrecke, die die Bilder der Schnitte verbindet, und teilen sie im selben Verhältnis, wie P die erste teilt. Diese Abbildung ist eineindeutig und stetig und führt Scharkurven in Scharkurven über. Daß sie sich auch auf den Rand erstreckt, sehen wir folgendermaßen. Die Strecke S_1S kann nicht unendlich viele Netzpunkte enthalten; sonst müßte sie einen zweimal enthalten, d. h. sich in verschiedenen Lagen teilweise überdecken und daher Punkte von $\mathfrak{P}$ oder $\mathfrak{Q}$ im Inneren enthalten. Nach dem Hilfssatz nähert sie sich einer Scharstrecke Q_2Q_2, d. h. einer geschlossenen Scharkurve durch Q_2 an. Jetzt bestimmen wir die Abbildung ohne die Gebiete $\mathfrak{G}_i$ zu benutzen so, daß sie sich auch auf diese geschlossene Scharkurve erstreckt, indem wir genau wie vorher verfahren. Damit ist Satz 1 bewiesen.

Satz 2. *Es seien $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{Q}$ Querstrecken mit den Endpunkten P_1, P_2, Q_1, Q_2. Werden P_1 und Q_1 durch eine Scharstrecke $\mathfrak{S}$ verbunden, die $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{Q}$ sonst nicht schneidet und die man so verschieben kann, daß ihre Endpunkte R und S auf $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{Q}$ beliebig nahe an P_2 und Q_2 rücken, während es nicht möglich ist, P_2 und Q_2 zu erreichen, und werden $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{Q}$ von keiner einrandigen geschlossenen Scharkurve geschnitten,*

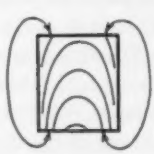

Fig. 7.

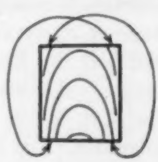

Fig. 8.

so liegen P_2 und Q_2 auf einer oder je einer geschlossenen Scharkurve, und das von $\mathfrak{S}$ überstrichene Gebiet läßt sich topologisch mit Einschluß des Randes und unter Erhaltung der Kurvenschar auf ein Band nach Fig. 7 oder Fig. 8 abbilden, daß z. B. aus dem Rechtecke $|x| \leqq \alpha$, $0 \leqq y \leqq 1$ mit der Differentialgleichung $dy : dx = x : \alpha^2 - x^2$ durch Zuordnung der Punkte $(x, 0)$ und $(-x, 1)$ bzw. $(x, 0)$ und $(x, 1)$ entsteht.

Wäre die Anzahl der Netzpunkte auf der Scharstrecke $\mathfrak{S}$ beschränkt, so würde aus dem Hilfssatz folgen, daß man $\mathfrak{S}$ in die Lage P_2Q_2 verschieben kann, entgegen der Voraussetzung. Die Anzahl muß sich also unendlich oft ändern, d. h. $\mathfrak{S}$ muß unendlich oft durch Netzecken gehen,

insbesondere unendlich oft durch dieselbe, da es nur endlich viele sind. In zwei dieser Lagen $\mathfrak{S}'$ und $\mathfrak{S}''$ muß $\mathfrak{S}$ sich teilweise überdecken; da die Endpunkte verschieden sind, muß es also unendlich oft vorkommen, daß $\mathfrak{S}$ eine der Strecken $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{Q}$ schneidet. Fragen wir nach der ersten Lage $R_1 S_1$, in der dies geschieht, so sehen wir genau wie bei Satz 1, daß $R_1 S_1$ entweder P_1 oder Q_1 enthalten muß. Da die Scharstrecke $P_1 Q_1$ weder $\mathfrak{P}$ noch $\mathfrak{Q}$ schneidet, liegt sie ganz auf $R_1 S_1$. Je nachdem dies in der Reihenfolge $R_1 P_1 Q_1 S_1$ oder $R_1 Q_1 P_1 S_1$ stattfindet, unterscheiden wir Fall 1 und 2.

Wie dem auch sei, jedenfalls können wir von einem Punkte T von $R_1 S_1$, der zwischen P_1 und Q_1 liegt, eine $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{Q}$ nicht schneidende Querkurve rückwärts führen bis zur Anfangslage $P_1 Q_1$ von $\mathfrak{S}$. Führen wir sie genau zu T zurück, so haben wir damit eine geschlossene Querkurve $\mathfrak{R}$ gewonnen. Im Falle 1 ist sie zweirandig und es sind die ersten beiden Voraussetzungen von Satz 1 erfüllt, wenn man an die Stelle von $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{Q}$ $\mathfrak{R}$ und $\mathfrak{P}$ bzw. $\mathfrak{R}$ und $\mathfrak{Q}$ setzt. Im Fall 2 ist $\mathfrak{R}$ einrandig. Wir ersetzen $\mathfrak{R}$ durch die zweimal umlaufende zweirandige Kurve $\mathfrak{R}'$ und haben noch einen Schritt weiter zu tun. Der Punkt T hat nämlich wohl $\mathfrak{R}$ umlaufen, $\mathfrak{R}'$ aber erst zur Hälfte. Wir führen daher $\mathfrak{S}$ noch weiter und fragen, wo zunächst ein neuer Schnitt mit $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{Q}$ auftritt. Ein solcher muß nämlich auftreten; sonst ginge $\mathfrak{S}$ durch jeden Punkt von $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{Q}$ nur endlich oft, während wir doch sahen, daß sie gewisse Punkte, also auch Punkte von $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{Q}$, unendlich oft überschreitet. Aus denselben Gründen wie vorher kann der neue Schnitt nur auftreten, wenn $\mathfrak{S}$ in der Lage $R_2 S_2$ durch P_1 und Q_1 geht, d. h. wenn T die Kurve $\mathfrak{R}$ ein zweites Mal und die Kurve $\mathfrak{R}'$ völlig umlaufen hat. Nun folgen auf dieser Scharkurve beiderseits als nächste Schnitte mit $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{Q}$ die Punkte R_1 und S_1. Da $R_2 S_2$ keine weiteren Schnitte enthält, sind R_2 und S_2 die nächstfolgenden. Die Richtung TP_1, die sich beim ersten Umlauf in TQ_1 verwandelt hatte, ist wieder in TP_1 übergegangen; daher liegen die Punkte in der Reihenfolge $R_2 S_1 P_1 Q_1 R_1 S_2$.

Wir zeigen noch, daß T im Laufe der Verschiebung $\mathfrak{R}$ unendlich oft umläuft. Die Strecke RS geht ja durch einen Punkt U_0 unendlich oft. Auf der Scharstrecke zwischen U_0 und der zugehörigen Lage T_0 von T liegen nur endlich viele Schnitte mit $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{Q}$. Daher muß die Scharstrecke RS unendlich oft über T_0 und U_0 hinausreichen, d. h. der Schnitt T von RS mit $\mathfrak{R}$ geht unendlich oft durch U_0. Nun rückt T immer in einer Richtung auf $\mathfrak{R}$ fort, muß also unendlich oft umlaufen.

Wir können daher Satz 1 anwenden im Fall 1 auf $\mathfrak{R}$ und $\mathfrak{P}$ und auf $\mathfrak{R}$ und $\mathfrak{Q}$, im Fall 2 auf $\mathfrak{R}'$ und $\mathfrak{P}$. Im Fall 1 erhalten wir ohne weiteres, daß das von $\mathfrak{S}$ überstrichene Gebiet durch $\mathfrak{R}$ in zwei Teile zer-

legt wird, deren jeder sich mit Rand topologisch unter Erhaltung der Kurvenschar auf ein Band nach Fig. 5 abbilden läßt. Die begrenzenden Querkurven sind durch eine topologische Abbildung $y' = \psi y$ aufeinander bezogen. Diese Abbildung läßt der Richtung nach oben in Fig. 5 wieder dieselbe entsprechen: es ist in beiden Bändern die des Fortschreitens von T auf $\mathfrak{R}$. Wir legen die beiden Bänder nebeneinander, so daß Fig. 7 entsteht, und wollen das eine Band so auf sich abbilden, daß die Abbildung ψ in die Identität übergeht. Dadurch ist die Abbildung des Randes $x = 0$ gegeben: $y' = \psi y$. Da Scharkurven in Scharkurven übergehen sollen, wissen wir schon, daß jedem Punkt auf der Scharkurve durch $(0, y)$ einer auf der durch $(0, \psi y)$ entsprechen muß. Wir ordnen Punkten mit gleicher Ordinate wieder solche zu, d. h. der n-te Schnitt einer Scharkurve mit der Geraden $y = c$ wird abgebildet auf den n-ten Schnitt der entsprechenden Scharkurve mit $y = \psi c$. Diese Abbildung ist bis an den Rand stetig, wenn man diesen durch $y' = \psi y$ auf sich abbildet. Im Falle 1 ist also das ganze von $\mathfrak{S}$ überstrichene Gebiet auf ein Band nach Fig. 7 abgebildet.

Im Falle 2 dagegen haben wir nur ein Band nach Fig. 5, dessen begrenzende Querkurve auf sich abgebildet und durch Zuordnung der Bildpunkte als Rand beseitigt ist. Es gibt zwei entsprechende Punkte, die in Fig. 5 den Abstand $\frac{1}{2}$ haben; denn läßt man eine von zwei Bildpunkten begrenzte Strecke halb umlaufen, so geht ihre Länge l stetig in $1 - l$ über, muß also den Wert $\frac{1}{2}$ annehmen. Durch diese Punkte legen wir die wagerechten Geraden und zerlegen dadurch das Band in zwei Rechtecke, die wir wie in Fig. 9 nebeneinanderstellen. Bei der Abbildung der Randkurve auf sich bleibt der Punkt $y = 0$ oder $y = 1$ fest; also bilden wir nach dem soeben angewandten Verfahren die eine Hälfte auf sich ab, so daß wir nunmehr die beiden Ränder geradezu vereinigen dürfen. Um nun das Band wieder herzustellen, machen wir die obige Zerlegung rückgängig, indem wir die Punkte $(x, 0)$ und $(-x, 1)$ vereinigen. Wir sehen: Im Falle 2 läßt sich das überstrichene Gebiet mit Rand auf ein Band nach Fig. 8 abbilden.

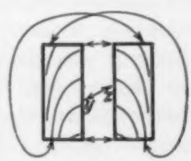

Fig. 9.

§ 5.

Die verschiedenen Typen von Kurvenscharen.

Wir haben in § 3 gesehen, daß eine geschlossene Fläche $\mathfrak{F}$, auf der eine reguläre Kurvenschar liegt, eine ein- oder zweiseitige Ringfläche ist, und daß sie durch eine Anzahl etwa vorhandener geschlossener Scharkurven in ein- oder zweirandige Bänder zerlegt wird. Nunmehr sollen mit Hilfe

der Ergebnisse der §§ 3 und 4 alle topologisch verschiedenen Typen von Kurvenscharen aufgezählt werden.

Wir betrachten ein von geschlossenen Scharkurven begrenztes Band oder eine Ringfläche ohne geschlossene Scharkurve; denn wäre eine solche vorhanden, so könnten wir längs ihr die Fläche aufschneiden. Insbesondere sollen die etwa vorhandenen einrandigen geschlossenen Scharkurven durch Aufschneiden zu Randkurven gemacht worden sein. Übrigens würde eine geschlossene Scharkurve durch die folgenden Konstruktionen von selbst aufgefunden werden.

Wir legen auf der geschlossenen Fläche $\mathfrak{F}$ eine nicht auf einen Punkt zusammenziehbare zweirandige Kurve $\mathfrak{C}$, auf dem Bande $\mathfrak{B}$ eine Kurve von Rand zu Rand, die es zu einem Elementarflächenstück macht. Die Kurven sollen auf Netzstrecken verlaufen und keine Doppelpunkte haben. Das ist, wenn nötig, nach einer Unterteilung des Netzes zu erreichen. In der Umgebung einer Ecke überschreitet die Kurve die durch die Ecke gehende Scharkurve, d. h. sie ist Querkurve, oder sie bleibt auf derselben Seite (Fig. 10). Nur die letzteren sollen im folgenden als Ecken gelten. Wir können die Ecke E durch eine Scharstrecke $\mathfrak{S}$ abschrägen (Fig. 11). Diese verschieben wir immer weiter, indem wir ihre Endpunkte auf $\mathfrak{C}$ wandern lassen. Hier greift Satz 2 des § 4 ein. Aus ihm folgt, daß man entweder mit einem Endpunkt bis zur nächsten Ecke auf $\mathfrak{C}$ gelangt, oder daß man ein Band $\mathfrak{B}'$ nach Fig. 7 oder 8 absondern kann, auf dem die Ecke von $\mathfrak{C}$ liegt, von der wir ausgingen (dies kann also bei einer Fläche $\mathfrak{F}$ ohne geschlossene Scharkurve nicht eintreten). Wir betrachten erst den zweiten Fall. Entweder ist $\mathfrak{B}'$ genau das Band $\mathfrak{B}$, oder es bleiben Bänder übrig, in die $\mathfrak{B}$ durch den Rand oder durch die beiden Ränder von $\mathfrak{B}'$ zerlegt wird. Ist $\mathfrak{B}'$ einrandig, so kann an der Randkurve nur ein zweirandiges Band $\mathfrak{B}''$ hängen; denn wäre es einrandig, so würde es mit $\mathfrak{B}'$ eine geschlossene Fläche bilden. Die Kurve $\mathfrak{C}$ geht von dem freien Rande von $\mathfrak{B}''$ aus und muß den $\mathfrak{B}''$ von $\mathfrak{B}'$ trennenden Rand überschreiten. Das Stück bis zum ersten Schnitt mit diesem verbindet beide Ränder von $\mathfrak{B}''$, zerschneidet also $\mathfrak{B}''$ zu einem Elementarflächenstück und tut also für $\mathfrak{B}''$ dieselben Dienste wie $\mathfrak{C}$ für $\mathfrak{B}$. Überdies enthält es wenigstens eine Ecke weniger als $\mathfrak{C}$. Ist $\mathfrak{B}'$ zweirandig und hängt an dem einen Rande ein zweirandiges Band $\mathfrak{B}''$, so verfolge man $\mathfrak{C}$ von dem freien Rande von $\mathfrak{B}''$ bis zum Eintritt in $\mathfrak{B}'$. Dieses Stück leistet für $\mathfrak{B}''$ das Gewünschte. Hängt an einem Rande von $\mathfrak{B}'$ ein einrandiges Band $\mathfrak{B}''$, so enthält es mindestens ein Stück von $\mathfrak{C}$, das es zu

Fig. 10.

Fig. 11.

einem Elementarflächenstück macht. Denn alle anderen Stücke kann man, ohne ihre Eigenschaften zu zerstören, über den Rand von $\mathfrak{B}''$ verschieben. Man hätte dann in diesem Rande eine geschlossene Scharkurve innerhalb des Elementarflächenstückes, in das $\mathfrak{B}$ durch $\mathfrak{C}$ zerlegt wird, die also ein Elementarflächenstück begrenzt, was nach § 2 nicht angeht. Wir haben also in jedem der übrigbleibenden Bänder eine Kurve mit mindestens einer Ecke weniger als vorher. Im ersten Falle können wir die abschrägende Scharstrecke verschieben, bis mindestens einer ihrer Endpunkte eine Ecke von $\mathfrak{C}$ erreicht. In dieser Lage können wir sie durch eine benachbarte Querstrecke ersetzen (Fig. 10), und haben so zwei Ecken von $\mathfrak{C}$ beseitigt. Durch diese Verschiebung könnte $\mathfrak{C}$ Doppelpunkte bekommen. Dieser Gefahr begegnen wir dadurch, daß wir zugleich die von $\mathfrak{G}$ überstrichenen Teile von $\mathfrak{C}$ vor $\mathfrak{G}$ herschieben und durch Scharstrecken ersetzen, die auf der noch nicht überstrichenen Seite neben $\mathfrak{G}$ herlaufen und mit den ersetzten Teilen Elementarflächenstücke begrenzen. Daß dies allgemein möglich ist und nicht zu Doppelpunkten führt, beweisen wir durch vollständige Induktion. Ist bei einer Lage von $\mathfrak{G}$ die Verschiebung geleistet, so liegen eine Anzahl Scharstrecken neben $\mathfrak{G}$ (Fig. 12). Von ihren Endpunkten geht demnach eine gerade Zahl Querstrecken in das noch nicht überstrichene Gebiet mindestens bis zu der nächsten Lage $\mathfrak{G}_1$ von $\mathfrak{G}$, in der $\mathfrak{G}$ wieder durch eine Ecke von $\mathfrak{C}$ geht. In dieser Ecke — oder, wenn es mehrere sind, in jeder von ihnen — stoßen entweder zwei aufeinanderfolgende der genannten Querstrecken zusammen, oder zwei neue, die in dem bis zu $\mathfrak{G}_1$ noch nicht überstrichenen Gebiet liegen. Im zweiten Falle schrägen wir die Ecke ab, so daß das ganze Gebiet zwischen $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{G}_1$ von diesem Teil von $\mathfrak{C}$ frei ist. Sonst bleiben uns Streckenzüge übrig, die nicht zwischen $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{G}_1$ endigen, und von denen keiner geschlossen ist — es sind ja ebenso wie $\mathfrak{G}$ Teile von $\mathfrak{C}$ — und die daher in unser Gebiet durch Überschreiten von $\mathfrak{G}_1$ ein- und austreten. Jeder von ihnen begrenzt daher mit seiner Sehne auf $\mathfrak{G}_1$ ein Elementarflächenstück. Liegen in diesem noch andere Streckenzüge, so ist mindestens einer ein innerster. Diesen ziehen wir auf seine Sehne zurück und noch etwas darüber hinaus, so daß er das Gebiet zwischen $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{G}_1$ nicht mehr betritt. Wiederholung dieses Vorgehens führt zum Ziele. Ersetzen wir zum Schluß die in $\mathfrak{C}$ eingeführten Scharstrecken durch Querstrecken (Fig. 10), so haben wir in jedem Fall die Zahl der Ecken von $\mathfrak{C}$ verringert. Da sie von vornherein endlich ist, erreichen wir in endlich vielen

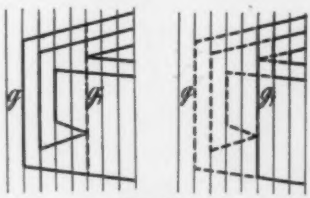

Fig. 12.

Schritten das Folgende: Aus $\mathfrak{B}$ werden eine Anzahl Bänder nach Fig. 7 und 8 ausgeschieden (höchstens so viele, wie $\mathfrak{C}$ Ecken hatte). Jedes der übrigbleibenden Bänder $\mathfrak{B}'$ wird durch eine Querstrecke $\mathfrak{C}$ in ein Elementarflächenstück zerschnitten. Auf einer geschlossenen Fläche $\mathfrak{F}$ ohne geschlossene Scharkurve erhalten wir eine geschlossene, nicht auf einen Punkt zusammenziehbare, zweirandige Querkurve $\mathfrak{C}$.

Wir zeichnen eine Seite von $\mathfrak{C}$ als Vorderseite aus und nennen jeden Punkt von $\mathfrak{F}$ bzw. $\mathfrak{B}'$ erreichbar, den eine von $\mathfrak{C}$ nach vorne verlaufende Scharkurve erreicht, ohne $\mathfrak{C}$ wieder zu treffen. Gibt es unerreichbare Punkte, so verbinden wir einen von ihnen mit einem erreichbaren P durch einen $\mathfrak{C}$ nicht treffenden Querstreckenzug. Gehen wir auf diesem von P aus, so sei R der erste Häufungspunkt unerreichbarer Punkte. R kann nicht erreichbar sein; denn jede Scharstrecke läßt sich mit einem Feld von Scharstrecken umgeben: die Menge der erreichbaren Punkte hat nur innere Punkte. Lassen wir daher einen Punkt Q vom erreichbaren Teile der Querstrecke gegen R rücken, so wird auf die Scharstrecke $Q_0 Q$, die in Q_0 von $\mathfrak{C}$ nach vorne ausgeht und $\mathfrak{C}$ und PR nicht trifft (sonst könnte man PR durch einen Teil ersetzen), im Falle des Bandes $\mathfrak{B}'$ der Satz 1, im Falle der Fläche $\mathfrak{F}$ der Satz 1 oder 2 des § 4 anwendbar. Der Ausgangspunkt Q_0 der Scharstrecke rückt nämlich immer in einer Richtung fort, nähert sich also einem Grenzpunkt, wenn er nicht im Falle $\mathfrak{F}$ die Kurve $\mathfrak{C}$ unendlich oft umläuft. In beiden Fällen erhalten wir eine geschlossene Scharkurve, die $\mathfrak{C}$ nicht trifft. Dies war auf $\mathfrak{F}$ von vornherein ausgeschlossen. Im Falle des Bandes $\mathfrak{B}'$ liegt die geschlossene Scharkurve im Inneren des Elementarflächenstückes, in das $\mathfrak{B}'$ durch $\mathfrak{C}$ zerlegt wird; sie würde ein Elementarflächenstück begrenzen, was nach § 2 nicht angeht. Es sind also alle Punkte von $\mathfrak{F}$ oder $\mathfrak{B}'$ erreichbar, insbesondere die an der Rückseite von $\mathfrak{C}$ gelegenen. Verfolgt man die Scharkurven rückwärts, längs deren diese erreicht werden, so sieht man: jede von $\mathfrak{C}$ nach rückwärts ausgehende Scharkurve trifft von der Vorderseite wieder auf $\mathfrak{C}$. Hierdurch haben wir eine eineindeutige stetige Abbildung von $\mathfrak{C}$ auf sich, auf die sofort die Sätze des § 3 anwendbar sind. Sie geben vollen Aufschluß über den Verlauf der Scharkurven. Läßt nämlich die q-te Wiederholung der Abbildung einen Punkt P in Ruhe, so kehrt die Scharkurve durch P nach q-maligem Schnitt mit $\mathfrak{C}$ nach P zurück, sie ist geschlossen. Nähern sich die Bildpunkte von P einem oder in periodischer Folge einer Zahl von Punkten, so nähert sich die Scharkurve der durch diese Punkte gehenden geschlossenen Scharkurve asymptotisch an.

Im Falle $\mathfrak{F}$ folgern wir zuerst, daß die Abbildung von $\mathfrak{C}$ auf sich den Umlaufssinn erhalten muß. Zerlegen wir $\mathfrak{F}$ durch $\mathfrak{C}$ und eine Anzahl von Scharstrecken, so sehen wir, daß die Fläche zweiseitig ist; es gilt

Satz 1. *Enthält eine reguläre Kurvenschar auf einer geschlossenen Fläche keine geschlossene Kurve, so ist die Fläche eine zweiseitige Ringfläche.* Oder: *Eine reguläre Kurvenschar auf einer einseitigen Ringfläche enthält mindestens eine geschlossene Kurve.*

Die Scharkurven auf $\mathfrak{F}$ zerfallen in drei Klassen. Die einen $\mathfrak{S}_1$, die durch Punkte im Inneren der Konstanzstrecken von χ gehen, haben die folgende Eigenschaft. Ist $\mathfrak{S}$ eine andere Scharkurve, so kann man um jeden Punkt von $\mathfrak{S}_1$ eine Umgebung bestimmen, in die $\mathfrak{S}$ nicht eintritt. Sie bilden endlich oder abzählbar unendlich viele Streifen, d. h. man kann endlich oder abzählbar unendlich viele Querstrecken angeben — z. B. die Strecken $\chi = \alpha$ auf $\mathfrak{C}$ — derart, daß jede Kurve $\mathfrak{S}$ genau einen Punkt im Inneren eines von ihnen hat. Die Scharkurven $\mathfrak{S}_2$ der zweiten Klasse haben diese Eigenschaft nur an einer Seite; von der anderen kommt ihnen jede Scharkurve beliebig nahe. Sie begrenzen jene Streifen und gehen durch die Endpunkte der Konstanzstrecken. Den Kurven der dritten Klasse, die den Werten von χ entsprechen, die nur einmal angenommen werden, kommt jede Scharkurve von beiden Seiten beliebig nahe. Sie sind immer in der Mächtigkeit des Kontinuums vorhanden und liegen nirgends dicht, falls überhaupt Kurven erster und zweiter Art vorhanden sind. Für eine Kurvenschar dieses Typus bilden wir ein Beispiel, indem wir auf dem durch Zuordnung gegenüberliegender Randpunkte zur Ringfläche geschlossenen Quadrat jeden Punkt (P) einer Seite mit seinem Bildpunkt (P') auf der Gegenseite geradlinig oder (Q mit Q') unter einmaliger Überschreitung des Randes verbinden (Fig. 13). Sind keine Kurven erster und zweiter Art vorhanden, so erhalten wir eine Schar paralleler Geraden mit irrationalem Richtungskoeffizienten, eine Figur, die z. B. aus der Mechanik der bedingt periodischen Systeme sehr bekannt ist.

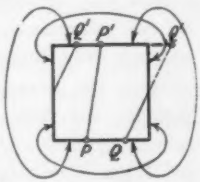

Fig. 13.

Im Falle des Bandes $\mathfrak{B}'$ lehren die Sätze des § 3, daß auf der Querstrecke $\mathfrak{C}$ endlich oder abzählbar unendlich viele Strecken derart liegen, daß man nach Durchlaufung der von einem inneren Punkte einer von ihnen ausgehenden Scharkurve zu einem anderen Punkte von $\mathfrak{C}$ gelangt, der in derselben Teilstrecke immer rechts oder immer links vom Ausgangspunkte liegt. Für die Scharkurven bedeutet das das Vorhandensein von endlich oder abzählbar unendlich vielen zweirandigen Bändern, innerhalb deren jede Scharkurve eine die Ränder verbindende Querkurve immer wieder in derselben Richtung überschreitet und sich nach der einen Richtung dem einen Rande, nach der anderen dem anderen asymptotisch annähert. Daß sich jedes solche Band auf irgendein anderes derselben Art,

etwa den Normaltypus der Fig. 14 abbilden läßt, sehen wir sofort. Nach § 3 läßt sich nämlich $\mathfrak{C}$ so auf die Seite $y = 0$ oder $y = 1$ abbilden, daß die Abbildung auf sich erhalten bleibt. Auf den Scharstrecken ordnen wir die Punkte nach dem Verhältnis der Längen in Fig. 14 und in den Dreiecken irgendeiner Netzteilung einander zu.

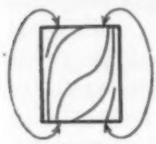

Fig. 14.

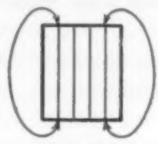

Fig. 15.

Von den Festpunkten auf $\mathfrak{C}$ gehen geschlossene Scharkurven aus, die entweder Bänder nach Fig. 15 bilden oder Ränder der soeben behandelten Bänder, d. h. Grenzzyklen nach Poincaré sind, oder in deren Umgebung unendlich viele solcher Bänder und daher unendlich viele Grenzzyklen verlaufen.

Zusammenfassend erhalten wir also:

Satz 2. *Jede Kurvenschar ohne geschlossene Kurve auf einer geschlossenen Fläche läßt sich auf die folgende Weise erzeugen. Man macht das von parallelen Geraden* $y = cx + d$ *(*c *fest irrational,* d *variabel) durchzogene Einheitsquadrat durch Zuordnung der Randpunkte* $(x, 0)$ *und* $(x, 1)$ *bzw.* $(0, y)$ *und* $(1, y)$ *zu einer Ringfläche und ersetzt auf ihr endlich oder abzählbar unendlich viele der Scharkurven durch Streifen, die von nebeneinander verlaufenden Kurven erfüllt sind.* Dies kann man metrisch etwa folgendermaßen ausführen. Jede Scharkurve setzt sich zusammen aus unendlich vielen Strecken, von denen jede in dem Punkt beginnt, der dem Endpunkt der vorhergehenden vermöge der Ränderzuordnung entspricht. Längs dieser Strecken zerschneiden wir das Quadrat und fügen Parallelogramme dazwischen, die von parallelen Geraden durchzogen werden, und deren Breiten wir so bemessen, daß ihre Summe konvergiert. So entsteht eine unregelmäßig begrenzte Figur, auf deren Rand wir die Punkte, die am Quadrat einander zugeordnet waren, wieder einander zuordnen, und die an Stelle zugeordneter Randpunkte des Quadrats eingefügten Parallelogrammseiten vermöge topologischer Abbildungen aufeinander beziehen, so daß wieder eine Ringfläche entsteht.

Satz 3. *Enthält die Kurvenschar geschlossene Kurven, so zerfällt die Fläche in endlich viele Bänder nach Figg.* 7 *und* 8 *und endlich oder abzählbar unendlich viele Bänder nach Figg.* 14 *und* 15.

(Eingegangen am 15. 3. 1923.)

Die adiabatische Invarianz des Phasenintegrals bei einem Freiheitsgrad.

Von

H. Kneser in Göttingen.

Die Adiabatenhypothese[1]) gibt zur Bestimmung der Quantenzustände eines gestörten Systems aus denen des ungestörten die folgende Regel: Läßt man die Störung zeitlich vom Werte Null bis zu dem gewünschten anwachsen, so gelangt man von Quantenzuständen des ungestörten Systems mit um so größerer Näherung zu denen des gestörten, je langsamer die Störung eintritt, wenn noch gewisse Bedingungen erfüllt sind, bei deren Bestehen man von adiabatischer Überführung spricht.

Um diese Regel zu rechtfertigen, hat man sich davon zu überzeugen, daß man die gewöhnliche Quantelungsregel wiedererhält, wenn auch das gestörte System ihr zugänglich, d. h. mehrfach periodisch ist; man muß nachweisen, daß die Phasenintegrale

$$J = \oint p\,dq$$

bei geeigneter Festlegung des Begriffes „adiabatisch" adiabatisch invariant sind.

P. Ehrenfest[1]) und J. M. Burgers[2]) haben gezeigt, daß in der Tat die *mittlere* Änderung der Phasenintegrale für alle Phasen der mehrfach periodischen Bewegung verschwindet, und folgern daraus die adiabatische Invarianz. A. Sommerfeld[3]) hebt bei der Behandlung dieses Gegenstandes die weitere Voraussetzung hervor, daß die zeitliche Änderung des die mechanischen Bedingungen des Systems bestimmenden Parameters „unsystematisch" vor sich geht, d. h. von der Art ist, daß man mit um

---

[1]) P. Ehrenfest, Ann. d. Phys. 51 (1916), S. 327f.

[2]) Ann. d. Phys. 52 (1917), S. 195f. Vgl. auch: Het atoommodel van Rutherford-Bohr (Haarlem 1918), S. 242f., wo die hierhergehörigen Fragestellungen vollständig zu finden sind.

[3]) Atombau und Spektrallinien (3. Aufl., Braunschweig 1922), S. 375f. u. S. 718f.

so größerer Genauigkeit das Zeitmittel durch das Phasenmittel ersetzen kann, je langsamer der Parameter sich ändert. Daß nicht jede genügend langsame Änderung diese Voraussetzung erfüllt, sieht man leicht an dem Beispiel des Fadenpendels von veränderlicher Länge. Dagegen haben neuerdings G. Krutkow und V. Fock[4]) durch eingehende Rechnung die adiabatische Invarianz des Phasenintegrals beim Fadenpendel für den Fall bewiesen, daß die Pendellänge eine lineare Funktion der Zeit ist. Im folgenden beweise ich die adiabatische Invarianz des Phasenintegrals J bei einem beliebigen System mit einem Freiheitsgrad in einer allgemeineren Fassung:

Ist eine zeitliche Änderung des Parameters gegeben durch $a = f(t)$ $(0 < t < T)$, und erstreckt man sie ähnlich über die Zeit lT, indem man $a = f(t/l)$ setzt, so nähert sich die gesamte Änderung des Phasenintegrals $J_{t=lT} - J_{t=0}$ mit unendlich anwachsendem l der Null.

Diese Formulierung dürfte allen Ansprüchen an Allgemeinheit genügen. Bei mehreren Freiheitsgraden wird man sie wahrscheinlich etwas enger fassen müssen[5]).

Dem Zusammenhang zuliebe leite ich auch die mittlere Invarianz noch einmal ab. Die Bewegungsgleichungen seien in der kanonischen Form gegeben:

$$(1) \qquad \dot{q} = H_p, \quad \dot{p} = -H_q,$$

worin die Gesamtenergie H außer von der Ortskoordinate q und dem Impuls p noch von dem veränderlichen Parameter a abhängt. Die Energiegleichung lautet

$$\dot{H} = H_a \cdot \dot{a}.$$

Bleibt a fest, so bewegt sich der Punkt (q, p) in der Phasenebene auf einer (geschlossenen) Linie $H =$ konst.; das Phasenintegral J ist die von dieser Kurve umfahrene Fläche, positiv gerechnet, wenn sie im Uhrzeigersinn umlaufen wird. In diesem Fall hat H im Inneren kleinere, außerhalb größere Werte als auf der Kurve; nach den Gleichungen (1) erhält man nämlich den Geschwindigkeitsvektor des Punktes (q, p) aus dem Gradienten von H durch Schwenken um einen rechten Winkel im Uhrzeigersinn.

---

[4]) Ztschr. f. Phys. **13** (1923), S. 195 f.

[5]) Es kommen hier zwei Schwierigkeiten hinzu. Erstens bedeckt die Bahnkurve das Gebiet der Winkelvariablen nur überall dicht, erreicht aber nicht jeden Punkt; zweitens muß man auch entartete Zustände passieren, wenn nicht die Verhältnisse der mittleren Bewegungen überhaupt fest bleiben.

Ändert sich a mit der Zeit, so ist in jedem Augenblick J der Flächeninhalt der durch die Gleichung

$$f(q,p,t) = H(q,p,a(t)) - H(\mathring{q},\mathring{p},a(t)) = 0 \qquad (\mathring{q} = q(t),\ \mathring{p} = p(t))$$

bestimmten Kurve. Seine Änderungsgeschwindigkeit ist gegeben durch*)

$$\frac{dJ}{dt} = -\oint \frac{f_t}{f_n}\,ds = -\frac{da}{dt}\oint [H_a(q,p,a) - H_a(\mathring{q},\mathring{p},a)]\frac{ds}{\sqrt{H_p^2+H_q^2}}.$$

Da der Punkt $(\mathring{p},\mathring{q})$ die Strecke ds in der Zeit $ds/\sqrt{\mathring{H}_q^2+\mathring{H}_p^2}$ durchläuft, so gilt für die mittlere Änderungsgeschwindigkeit:

$$\frac{\bar{J}}{t}\oint\frac{d\mathring{s}}{\sqrt{\mathring{H}_p^2+\mathring{H}_q^2}} = -\frac{da}{dt}\oint\oint[H_a(q,p,a) - H_a(\mathring{q},\mathring{p},a)]\frac{ds}{\sqrt{H_p^2+H_q^2}}\,\frac{d\mathring{s}}{\sqrt{\mathring{H}_p^2+\mathring{H}_q^2}} =$$

denn das Doppelintegral wechselt das Vorzeichen, wenn man die Bezeichnungen der beiden Integrationsvariablen vertauscht. Dies ist das Ergebnis von Ehrenfest.

Um, hierauf gestützt, die adiabatische Invarianz in dem oben präzisierten Sinne zu beweisen, führen wir für jeden Wert a die Winkelvariable w in bekannter Weise ein. Die Koordinaten q und p werden dann Funktionen von J, w und a, die in w die Periode 1 haben. Bei festem a ist

$$\dot{w} = H_J = \frac{\partial w}{\partial q}\dot{q} + \frac{\partial w}{\partial p}\dot{p}, \qquad \dot{J} = 0 = \frac{\partial J}{\partial q}\dot{q} + \frac{\partial J}{\partial p}\dot{p};$$

bei veränderlichem a dagegen

$$\dot{w} = \frac{\partial w}{\partial q}\dot{q} + \frac{\partial w}{\partial p}\dot{p} + \frac{\partial w}{\partial a}\dot{a} = H_J + w_a\cdot\dot{a}, \qquad \dot{J} = \frac{\partial J}{\partial q}\dot{q} + \frac{\partial J}{\partial p}\dot{p} + \frac{\partial J}{\partial a}\dot{a} = J_a\cdot\dot{a}.$$

Da J eindeutig, w bis auf ganzzahlige Perioden eindeutig von q, p und a abhängt, sind w_a und J_a eindeutige Funktionen von q, p und a, also eindeutige, in w periodische Funktionen von J, w und a. Setzen wir daher $\tau = t/l$, $a = f(t/l) = f(\tau)$, so wird

$$\frac{dw}{d\tau} = l\dot{w} = l\left(H_J + w_a\cdot\frac{1}{l}\frac{da}{d\tau}\right) = lH_J + w_a f'(\tau), \tag{2}$$

$$\frac{dJ}{d\tau} = l\dot{J} = lJ_a\cdot\frac{1}{l}\frac{da}{d\tau} = J_a\cdot f'(\tau). \tag{3}$$

---

*) Die Differenz der Flächeninhalte der Kurven $f(q,p,t) = 0$ und $f(q,p,t_0) = 0$ ist

$$J(t) - J(t_0) = \oint n\,ds + \frac{1}{2}\oint n^2 K\,ds,$$

worin n die nach außen positiv gemessene Normale der zweiten Kurve bis zum Schnitt mit der ersten und K die Krümmung ist. Differenziert man nach t und setzt man $t = t_0$, so fällt das zweite Glied weg, da n für $t = t_0$ verschwindet. Nun ist $f_n\frac{dn}{dt} + f_t = 0$; also wird

$$\frac{dJ}{dt} = \oint\frac{dn}{dt}\,ds = -\oint\frac{f_t}{f_n}\,ds.$$

Die mittlere Invarianz von J drückt sich aus durch

$$\int_{w}^{w+1} J_a\,dw = 0. \tag{4}$$

Wir beschränken jetzt die Veränderung des Parameters a auf eine solche Zeitstrecke $0 < t < T$, daß alle betrachteten Größen J, J_a, H_J, w_a für alle l unter einer endlichen Schranke M und die mittlere Bewegung H_J über einer positiven Schranke m bleiben[7]). Solche, von l unabhängige Werte werden wir ohne Unterschied mit M, M' oder m bezeichnen. Führen wir dann die Werte τ_r ein, indem wir

$$\tau_0 = 0, \qquad \tau_{r+1} = \tau_r + \frac{1}{l H_J(\tau_r) + w_a(\tau_r) f'(\tau_r)}$$

setzen, so liegt der Nenner zwischen $lm - M$ und $lM + M$. Ist daher $l > \frac{2M}{m}$, so können wir schreiben

$$\tau_{r+1} - \tau_r > \frac{M}{l}, \qquad \tau_{r+1} - \tau_r < \frac{M'}{l}.$$

Die Werte τ_r wachsen also ständig und über T hinaus. Den letzten von ihnen, der noch kleiner als T ist, nennen wir τ_R; dann ist $R < Ml$ und $T - \tau_r < \frac{M}{l}$. Von der rechten Seite der Gleichung

$$J(T) - J(0) = \int_0^T J_a(\tau) f'(\tau)\,d\tau,$$

die nichts anderes ist als (3) in integrierter Form, subtrahieren wir die nach (4) verschwindenden Glieder

$$f'(\tau_r)\int_{\tau_r}^{\tau_{r+1}} J_a[J(\tau_r),\, w(\tau_r) + (\tau - \tau_r)(l H_J(\tau_r) + w_a(\tau_r) f'(\tau_r))]\,d\tau$$

und erhalten für

$$J(T) - J(0) = \sum_{r=0}^{R-1} \int_{\tau_r}^{\tau_{r+1}} \{J_a(\tau) f'(\tau) - J_a[J(\tau_r),\, w(\tau_r) + (\tau - \tau_r)(l H_J(\tau_r)$$

$$+ w_a(\tau_r) f'(\tau_r))] f'(\tau_r)\}\,d\tau + \int_{\tau_r}^{T} J_a(\tau) f'(\tau)\,d\tau,$$

---

[7]) Ist nämlich M eine Schranke für $|f'(\tau)|$ und $|J_a|$, wenn $|J - J(0)| < c_1$, $|\tau| < c_2$ bleibt, w aber beliebige Werte annimmt, so beschränken wir τ weiter auf die Strecke $|\tau| < \frac{c_1}{M^2}$, auf der nach (3) sicher $|J - J(0)| < c_1$ bleibt. Beschränken wir noch τ so weit, daß die nur von J abhängige mittlere Bewegung positiv bleibt, so ist das Erforderte geleistet, da die stetigen, in w periodischen Funktionen in einem endlichen Gebiet der Variablen a und J beschränkt bleiben.

einen Ausdruck, von dem wir nachweisen können, daß er sich mit unendlich anwachsendem l der Null nähert. Von dem letzten Integral gilt

$$\left|\int_{\tau_R}^{T} J_a(\tau) f'(\tau)\, d\tau\right| < (T - \tau_r) M < \frac{M}{l}.$$

In den anderen ist der Integrand die Differenz zweier Produkte, deren Faktoren bezüglich wenig voneinander verschieden sind; es ist nämlich

$$|f'(\tau) - f'(\tau_r)| = \left|\int_{\tau_r}^{\tau} f''(\tau)\, d\tau\right| < (\tau - \tau_r) M < \frac{M}{l} \qquad (\tau_r < \tau < \tau_{r+1}),$$

$$|w(\tau) - [w(\tau_r) + (lH_J(\tau_r) + w_a(\tau_r) f'(\tau_r))(\tau - \tau_r)]|$$
$$= \left|\int_{\tau_r}^{\tau} [l(H_J(\tau) - H_J(\tau_r)) + w_a(\tau) f'(\tau) - w_a(\tau_r) f'(\tau_r)]\, d\tau\right|$$
$$< (\tau - \tau_r)\left(l\frac{M}{l} + M\right) < \frac{M}{l},$$

da H_J nicht von w abhängt und daher

$$|H_J(\tau) - H_J(\tau_r)| < \left|\int_{\tau_r}^{\tau} J_a(\tau) f'(\tau)\, d\tau\right| < (\tau - \tau_r) M < \frac{M}{l}$$

ist. Nun bleiben aber die Faktoren f' und J_a selbst (unabhängig von l) beschränkt; also ist

$$|J_a(\tau) f'(\tau) - J_a[J(\tau_r),\, w(\tau_r) + (lH_J(\tau_r) + w_a(\tau_r) f'(\tau_r))(\tau - \tau_r)]\, f'(\tau_r)| < \frac{M}{l},$$

$$\left|\int_{\tau_r}^{\tau_{r+1}} \{J_a(\tau) f'(\tau) - J_a[\ldots] f'(\tau_r)\}\, d\tau\right| < (\tau_{r+1} - \tau_r)\frac{M}{l} < \frac{M}{l^2},$$

und die Summe

$$\left|\sum_{r=0}^{R-1} \int_{\tau_r}^{\tau_{r+1}}\right| < R\frac{M}{l^2} < \frac{M}{l}.$$

Insgesamt ist also

$$|J(T) - J(0)| < \frac{M}{l},$$

wird also für große l beliebig klein.

Die vorher dem Intervall $(0, T)$ auferlegte Beschränkung wollen wir noch aufheben und nehmen zu diesem Zweck an, daß die Bahnkurve mit $J = J(0)$ im Laufe der Veränderung des Parameters a durch keine Gleichgewichtslage hindurchgeht. Beim Pendel soll z. B. der Zustand $J = J(0)$ nicht erst Schwingungs-, dann Rotationszustand sein. Diese Voraussetzung ist sachlich begründet; denn sonst würden immer auch asymptotische Bewegungen auftreten. Dann können wir um jeden Wert τ ein Intervall

abgrenzen, innerhalb dessen der obige Beweis gilt, falls $|J(\tau) - J(0)|$ einen festen positiven Betrag nicht überschreitet. Nach dem Heine-Borelschen Überdeckungssatz kann man dann die ganze Strecke in endlich viele — etwa n — Teile teilen, in deren jedem der Beweis unter derselben Bedingung gilt. Wählen wir nun l so groß, daß die Änderung von J auf der ersten Teilstrecke kleiner als $\frac{\varepsilon}{n}$ $(\varepsilon > 0)$ ist und J am Endpunkt dieser Teilstrecke in dem Gebiet bleibt, in dem das Obige gilt, dann so groß (also wenn nötig noch größer), daß dasselbe von der zweiten Teilstrecke gilt, usw., so erreichen wir, daß sich J im ganzen höchstens um ε, also beliebig wenig ändert.

(Eingegangen am 15. 4. 1923.)

Sur les équations du mouvement des systèmes matériels non holonomes.

Von

Ivan Tzénoff in Sofia (Bulgarien).

1. Imaginons un système assujetti d'abord à des liaisons *exprimables par des relations en termes finis entre les coordonnées des divers points.* Soit, en tenant compte de ces liaisons, $k+p$ le nombre des paramètres indépendants $q_1, q_2, \ldots, q_k, \ldots, q_{k+p}$ qui fixent la position du système. On aura, pour les coordonnées d'un point quelconque du système, en supposant les liaisons dépendantes du temps,

$$(1) \qquad x_0 = f(t, q_1, q_2, \ldots, q_k, \ldots, q_{k+p}), \; y_0 = \varphi(\ldots), \; z_0 = \omega(\ldots).$$

On obtient un déplacement virtuel compatible avec ces liaisons au moment t en faisant varier $q_1, q_2, \ldots, q_k, \ldots, q_{k+p}$ de $\delta q_1, \delta q_2, \ldots, \delta q_k, \ldots, \delta q_{k+p}$; on aura

$$(2) \qquad \delta x_0 = \sum_{\alpha=1}^{k} \frac{\partial x_0}{\partial q_\alpha} \delta q_\alpha + \sum_{i=1}^{p} \frac{\partial x_0}{\partial q_{k+i}} \delta q_{k+i}, \; \delta y_0 = \ldots, \delta z_0 = \ldots.$$

Mais supposons maintenant qu'on ajoute aux liaisons précédentes de nouvelles liaisons dépendantes du temps, exprimables par p *relations différentielles entre les paramètres* $q_1, q_2, \ldots, q_k, \ldots, q_{k+p}$ de la forme

$$(3) \qquad dq_{k+i} = \sum_{\alpha=1}^{k} a_{i\alpha} dq_\alpha + a_i dt \qquad (i = 1, 2, \ldots, p),$$

les coefficients $a_{i\alpha}, a_i$ pouvant dépendre du temps t et des parametres $q_1, q_2, \ldots, q_k, \ldots, q_{k+p}$.

Pour un déplacement virtuel compatible avec ces liaisons, on aura

$$(4) \qquad \delta q_{k+i} = \sum_{\alpha=1}^{k} a_{i\alpha} \delta q_\alpha \qquad (i = 1, 2, \ldots, p).$$

On obtient un déplacement virtuel compatible avec les liaisons des deux sortes au moment t en introduisant dans (2) les valeurs de $\delta q_{k+1}, \ldots, \delta q_{k+p}$; on aura

$$(5)\qquad \delta x = \sum_{\alpha=1}^{k}\left(\frac{\partial x_0}{\partial q_\alpha} + \sum_{i=1}^{p} a_{i\alpha}\frac{\partial x_0}{\partial q_{k+i}}\right)\delta q_\alpha,\ \delta y = \ldots,\ \delta z = \ldots.$$

Donc pour obtenir le déplacement virtuel le plus général compatible avec les liaisons qui existent à l'instant t, il suffit de faire subir aux k paramètres $q_1, q_2, \ldots, q_k$ des variations arbitraires $\delta q_1, \ldots, \delta q_k$. Alors le système considéré possède k degrés de liberté et ses coordonnées sont au nombre de $k+p$.

L'équation générale de la Dynamique est

$$\sum m(x''\delta x + y''\delta y + z''\delta z) = \sum(X\delta x + Y\delta y + Z\delta z),$$

où x'', y'', z'' sont les dérivées secondes des coordonnées (1) d'un point quelconque du système par rapport au temps, en tenant compte des équations (3), et X, Y, Z les projections d'une quelconque des forces.

Cette équation doit avoir lieu pour tous les déplacements (5) compatibles avec les liaisons: elle se décompose donc dans les k équations suivantes:

$$(6)\qquad \sum m\left[x''\left(\frac{\partial x_0}{\partial q_\alpha} + \sum_{i=1}^{p} a_{i\alpha}\frac{\partial x_0}{\partial q_{k+i}}\right) + y''(\ldots) + z''(\ldots)\right] = Q_\alpha$$
$$(\alpha = 1, 2, \ldots, k),$$

où Q_α est le coefficient de δq_α dans l'expression de la somme des travaux virtuels des forces appliquées.

Si nous désignons les premiers membres des équations (6) par P_α, on aura

$$P_\alpha = \frac{d}{dt}\sum m\left[x'\left(\frac{\partial x_0}{\partial q_\alpha} + \sum_{i=1}^{p} a_{i\alpha}\frac{\partial x_0}{\partial q_{k+i}}\right) + y'(\ldots) + z'(\ldots)\right]$$
$$-\sum m\left\{x'\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial x_0}{\partial q_\alpha}\right) + \frac{d}{dt}\left(\sum a_{i\alpha}\frac{\partial x_0}{\partial q_{k+i}}\right)\right] + y'[\ldots] + z'[\ldots]\right\}.$$

Des équations (1) et (3) on tire

$$(7)\qquad x_0' = \frac{\partial x_0}{\partial t} + \sum_{\alpha=1}^{k}\frac{\partial x_0}{\partial q_\alpha}q_\alpha' + \sum_{i=1}^{p}\frac{\partial x_0}{\partial q_{k+i}}q_{k+i}',\ y_0' = \ldots,\ z_0' = \ldots,$$

$$(8)\qquad q_{k+i}' = \sum_{\alpha=1}^{k} a_{i\alpha}q_\alpha' + a_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, p).$$

Alors

$$\frac{\partial x'}{\partial q_\alpha'} = \frac{\partial x_0}{\partial q_\alpha} + \sum_{i=1}^{p} a_{i\alpha}\frac{\partial x_0}{\partial q_{k+i}},\quad \frac{\partial y'}{\partial q_\alpha'} = \ldots,\quad \frac{\partial z'}{\partial q_\alpha'} = \ldots$$

et l'expression de P_α prend la forme

$$P_\alpha = \frac{d}{dt}\sum m\left(x'\frac{\partial x'}{\partial q'_\alpha} + y'\frac{\partial y'}{\partial q'_\alpha} + z'\frac{\partial z'}{\partial q'_\alpha}\right)$$
$$-\sum m\left[x'\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial x_0}{\partial q_\alpha}\right) + y'\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial y_0}{\partial q_\alpha}\right) + z'\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial z_0}{\partial q_\alpha}\right)\right]$$
$$-\sum m\left[x'\frac{d}{dt}\left(\sum a_{i\alpha}\frac{\partial x_0}{\partial q_{k+i}}\right) + y'\frac{d}{dt}\left(\sum a_{i\alpha}\frac{\partial y_0}{\partial q_{k+i}}\right) + z'\left(\sum a_{i\alpha}\frac{\partial z_0}{\partial q_{k+i}}\right)\right].$$

Des équations (1), (7) et (8) il est facile de voir qu'on a

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial x_0}{\partial q_\alpha}\right) = \frac{\partial x'}{\partial q_\alpha} - \sum_{i=1}^{p}\frac{\partial x_0}{\partial q_{k+i}}\frac{\partial q'_{k+i}}{\partial q_\alpha}, \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial y_0}{\partial q_\alpha}\right) = \ldots, \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial z_0}{\partial q_\alpha}\right) = \ldots,$$

$$\frac{\partial x'_0}{\partial q'_{k+i}} = \frac{\partial x_0}{\partial q_{k+i}}, \quad \frac{\partial y'_0}{\partial q'_{k+i}} = \frac{\partial y_0}{\partial q_{k+i}}, \quad \frac{\partial z'_0}{\partial q'_{k+i}} = \frac{\partial z_0}{\partial q_{k+i}} \qquad (i = 1, 2, \ldots, p),$$

$$\frac{\partial q_{k+i}}{\partial q'_\alpha} = a_{i\alpha} \qquad (i = 1, 2, \ldots, p),$$

et la fonction P_α prend la forme suivante

$$P_\alpha = \frac{d}{dt}\sum m\left(x'\frac{\partial x'}{\partial q'_\alpha} + y'\frac{\partial y'}{\partial q'_\alpha} + z'\frac{\partial z'}{\partial q'_\alpha}\right) - \sum m\left(x'\frac{\partial x'}{\partial q_\alpha} + y'\frac{\partial y'}{\partial q_\alpha} + z'\frac{\partial z'}{\partial q_\alpha}\right)$$
$$+\sum m\left[x'\left(\sum_{i=1}^{p}\frac{\partial x'_0}{\partial q'_{k+i}}\frac{\partial q'_{k+i}}{\partial q_\alpha}\right) + y'\left(\sum_{i=1}^{p}\frac{\partial y'_0}{\partial q'_{k+i}}\frac{\partial q'_{k+i}}{\partial q_\alpha}\right) + z'\left(\sum_{i=1}^{p}\frac{\partial z'_0}{\partial q'_{k+i}}\frac{\partial q'_{k+i}}{\partial q_\alpha}\right)\right]$$
$$-\sum m\Big[x'\frac{d}{dt}\Big(\sum_{i=1}^{p}\frac{\partial x'_0}{\partial q'_{k+i}}\frac{\partial q'_{k+i}}{\partial q'_\alpha}\Big) + y'\frac{d}{dt}\Big(\sum_{i=1}^{p}\frac{\partial y'_0}{\partial q'_{k+i}}\frac{\partial q'_{k+i}}{\partial q'_\alpha}\Big) + z'\frac{d}{dt}\Big(\sum_{i=1}^{p}\frac{\partial z'_0}{\partial q'_{k+i}}\frac{\partial q'_{k+}}{\partial q'_\alpha}$$

Dans cette expression, la dernière somme se transforme en

$$\frac{d}{dt}\sum m\left[x'\left(\sum_{i=1}^{p}\frac{\partial x'_0}{\partial q'_{k+i}}\frac{\partial q'_{k+i}}{\partial q'_\alpha}\right) + y'\left(\sum_{i=1}^{p}\frac{\partial y'_0}{\partial q'_{k+i}}\frac{\partial q'_{k+i}}{\partial q'_\alpha}\right) + z'\left(\sum_{i=1}^{p}\frac{\partial z'_0}{\partial q'_{k+i}}\frac{\partial q'_{k+i}}{\partial q'_\alpha}\right)\right]$$
$$-\sum m\left[x''\left(\sum_{i=1}^{p}\frac{\partial x''_0}{\partial q''_{k+i}}\frac{\partial q''_{k+i}}{\partial q''_\alpha}\right) + y''\left(\sum_{i=1}^{p}\frac{\partial y''_0}{\partial q''_{k+i}}\frac{\partial q''_{k+i}}{\partial q''_\alpha}\right) + z''\left(\sum_{i=1}^{p}\frac{\partial z''_0}{\partial q''_{k+i}}\frac{\partial q''_{k+i}}{\partial q''_\alpha}\right)\right],$$

parce que les équations (7) et (8) donnent

$$\frac{\partial x'_0}{\partial q'_{k+i}} = \frac{\partial x''_0}{\partial q''_{k+i}}, \quad \frac{\partial y'_0}{\partial q'_{k+i}} = \frac{\partial y''_0}{\partial q''_{k+i}}, \quad \frac{\partial z'_0}{\partial q'_{k+i}} = \frac{\partial z''_0}{\partial q''_{k+i}} \qquad (i = 1, 2, \ldots, p),$$

$$\frac{\partial q'_{k+i}}{\partial q'_\alpha} = \frac{\partial q''_{k+i}}{\partial q''_\alpha} \qquad (i = 1, 2, \ldots, p).$$

Donc pour les équations du mouvement (6), on aura

$$(6')\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{d}{dt}\sum m\left(x'\frac{\partial x'}{\partial q'_\alpha}+y'\frac{\partial y'}{\partial q'_\alpha}+z'\frac{\partial z'}{\partial q'_\alpha}\right)-\sum m\left(x'\frac{\partial x'}{\partial q_\alpha}+y'\frac{\partial y'}{\partial q_\alpha}+z'\frac{\partial z'}{\partial q_\alpha}\right)\\ &\quad+\sum m\left[x'\left(\sum_{i=1}^{p}\frac{\partial x'_0}{\partial q'_{k+i}}\frac{\partial q'_{k+i}}{\partial q_\alpha}\right)+\ldots+\ldots\right]\\ &\quad-\frac{d}{dt}\sum m\left[x'\left(\sum_{i=1}^{p}\frac{\partial x'_0}{\partial q'_{k+i}}\frac{\partial q'_{k+i}}{\partial q'_\alpha}\right)+\ldots+\ldots\right]\\ &\quad+\sum m\left[x''\left(\sum_{i=1}^{p}\frac{\partial x''_0}{\partial q''_{k+i}}\frac{\partial q''_{k+i}}{\partial q''_\alpha}\right)+\ldots+\ldots\right]=Q_\alpha\quad(\alpha=1,2,\ldots,k),\end{aligned}\right.$$

ou

$$(6'')\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{d}{dt}\sum m\left(x'\frac{\partial x'_0}{\partial q'_\alpha}+y'\frac{\partial y'_0}{\partial q'_\alpha}+z'\frac{\partial z'_0}{\partial q'_\alpha}\right)-\sum m\left(x'\frac{\partial x'_0}{\partial q_\alpha}+y'\frac{\partial y'_0}{\partial q_\alpha}+z'\frac{\partial z'_0}{\partial q_\alpha}\right)\\ &\quad+\sum m\left[x''\left(\sum_{i=1}^{p}\frac{\partial x''_0}{\partial q''_{k+i}}\frac{\partial q''_{k+i}}{\partial q''_\alpha}\right)+\ldots+\ldots\right]=Q_\alpha\quad(\alpha=1,2,\ldots,k),\end{aligned}\right.$$

parce que, des équations (7) et (8), on déduit

$$(9)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{\partial x'}{\partial q'_\alpha}=\frac{\partial x'_0}{\partial q'_\alpha}+\sum_{i=1}^{p}\frac{\partial x'_0}{\partial q'_{k+i}}\frac{\partial q'_{k+i}}{\partial q'_\alpha},\quad \frac{\partial y'}{\partial q'_\alpha}=\ldots,\quad \frac{\partial z'}{\partial q'_\alpha}=\ldots\quad(\alpha=1,2,\ldots,k),\\ &\frac{\partial x'}{\partial q_\alpha}=\frac{\partial x'_0}{\partial q_\alpha}+\sum_{i=1}^{p}\frac{\partial x'_0}{\partial q'_{k+i}}\frac{\partial q'_{k+i}}{\partial q_\alpha},\quad \frac{\partial y'}{\partial q_\alpha}=\ldots,\quad \frac{\partial z'}{\partial q_\alpha}=\ldots\quad(\alpha=1,2,\ldots,k).\end{aligned}\right.$$

Désignons par T_0 e S_0 la demi-force vive et la demi-énergie d'accélération du système, calculées en ne tenant compte que des liaisons finies imposées au système,

$$2\,T_0=\sum m(x_0'^2+y_0'^2+z_0'^2),\qquad 2\,S_0=\sum m(x_0''^2+y_0''^2+z_0''^2),$$

de sorte que T_0 est une fonction de $t, q_1, \ldots, q_k, \ldots, q_{k+p}, q'_1, \ldots, q'_k, \ldots, q'_{k+p}$, où les quantités $q'_{k+1}, \ldots, q'_{k+p}$ sont des variables indépendantes, et S_0 est une fonction de $t, q_1, \ldots, q_k, \ldots, q_{k+p}, q'_1, \ldots, q'_k, \ldots, q'_{k+p}, q''_1, \ldots, q''_k, \ldots, q''_{k+p}$, où les quantités $q''_{k+1}, \ldots, q''_{k+p}$ sont des variables indépendantes.

D'autre part, désignons par T et S les quantités analogues en tenant compte aussi des liaisons différentielles, données par les équations (8),

$$2\,T=\Sigma m(x'^2+y'^2+z'^2),\qquad 2\,S=\Sigma m(x''^2+y''^2+z''^2).$$

Enfin désignons par T_1 la fonction T_0, considérée comme fonction de $q'_{k+1}, \ldots, q'_{k+p}$ seulement, et par S_1 la fonction S_0, considérée comme fonction de $q''_{k+1}, \ldots, q''_{k+p}$ seulement, en n'oubliant pas, bien entendu, que $q'_{k+1}, \ldots, q'_{k+p}$ pour T_1 et $q''_{k+1}, \ldots, q''_{k+p}$ pour S_1 sont déterminés par les équations (8).

Alors, en remarquant que x', y', z', x'', y'', z'' se déduisent de x_0', y_0', z_0', x_0'', y_0'', z_0'' en tenant compte des relations (8), mais que, en vertu des équations (9), il n'en est pas de même des $\frac{\partial x'}{\partial q_\alpha'}$, $\frac{\partial x'}{\partial q_\alpha}$, ... on peut mettre les équations du mouvement (6') ou (6'') des systèmes non holonomes dans la forme suivante:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial q_\alpha'} - \frac{\partial T}{\partial q_\alpha} + \frac{\partial T_1}{\partial q_\alpha} - \frac{d}{dt}\frac{\partial T_1}{\partial q_\alpha'} + \frac{\partial S_1}{\partial q_\alpha''} = Q_\alpha \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, k), \tag{10}$$

ou

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T_0}{\partial q_\alpha'} - \frac{\partial T_0}{\partial q_\alpha} + \frac{\partial S_1}{\partial q_\alpha''} = Q_\alpha \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, k). \tag{11}$$

J'ai déjà déduit ces résultats à peu près de la même manière dans le mémoire «*Sur les équations du mouvement des systèmes matériels non holonomes*», imprimé dans le Journal de Mathématiques pures et appliquées 1920.

2. M. P. Woronetz[1]) présente sous une autre forme les équations du mouvement des systèmes non holonomes. En introduisant nos notations pour les fonctions et les paramètres, les équations qu'il a obtenues s'écrivent de la façon suivante:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial q_\alpha'} - \frac{\partial T}{\partial q_\alpha} - \sum_{i=1}^{p} a_{i\alpha}\frac{\partial T}{\partial q_{k+i}} - \sum_{i=1}^{p}\left[\frac{\partial T_0}{\partial q_{k+i}'}\right]\left(\sum_{j=1}^{k} A_{\alpha j}^{(i)} q_j' + A_\alpha^{(i)}\right) = Q_\alpha \tag{12}$$
$$(\alpha = 1, 2, \ldots, k)$$

avec

$$q_{k+i}' = \sum_{\alpha=1}^{k} a_{i\alpha}\, q_\alpha' + a_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, p),$$

$$\left\{\begin{aligned} A_{\alpha j}^{(i)} &= \left(\frac{\partial a_{i\alpha}}{\partial q_j} + \sum_{\mu=1}^{p} a_{\mu j}\frac{\partial a_{i\alpha}}{\partial q_{k+\mu}}\right) - \left(\frac{\partial a_{ij}}{\partial q_\alpha} + \sum_{\mu=1}^{p} a_{\mu\alpha}\frac{\partial a_{ij}}{\partial q_{k+\mu}}\right), \\ A_\alpha^{(i)} &= \left(\frac{\partial a_{i\alpha}}{dt} + \sum_{\mu=1}^{p} a_\mu\frac{\partial a_{i\alpha}}{\partial q_{k+\mu}}\right) - \left(\frac{\partial a_i}{\partial q_\alpha} + \sum_{\mu=1}^{p} a_{\mu\alpha}\frac{\partial a_i}{\partial q_{k+p}}\right) \end{aligned}\right. \tag{13}$$
$$(\alpha \text{ et } j = 1, 2, \ldots, k; \quad i = 1, 2, \ldots, p),$$

$\left[\frac{\partial T_0}{\partial q_{k+i}'}\right]$ désignant la valeur que prend $\frac{\partial T_0}{\partial q_{k+i}}$ en y remplaçant les variables q_{k+i}' par leurs valeurs (8).

Je me propose maintenant de montrer, de quelle manière nos équations (10) conduisent aux équations (12) de M. Woronetz.

---

[1]) Über die Bewegung eines starren Körpers, der ohne Gleitung auf beliebiger Fläche rollt. Math. Annalen 70 (1910).

En effet le troisième terme du premier nombre de l'équation (10) est égal à

$$(14)\qquad \frac{\partial T_1}{\partial q_a}=\sum_{i=1}^{p}\frac{\partial T_0}{\partial q'_{k+i}}\frac{\partial q'_{k+i}}{\partial q_a}=\sum_{i=1}^{p}\frac{\partial T_0}{\partial q'_{k+i}}\left(\sum_{j=1}^{k}\frac{\partial a_{ij}}{\partial q_a}q'_j+\frac{\partial a_i}{\partial q_a}\right).$$

Pour le quatrième terme on obtient:

$$(15)\qquad -\frac{d}{dt}\frac{\partial T_1}{\partial q'_a}=-\frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{p}\frac{\partial T_0}{\partial q_{k+i}}a_{ia}.$$

Pour le cinquième on a:

$$\frac{\partial S_1}{\partial q''_a}=\sum_{i=1}^{p}\frac{\partial S_0}{\partial q''_{k+i}}a_{ia},$$

ou bien, comme est facile de vérifier que:

$$\frac{\partial S_0}{\partial q''_{k+i}}=\frac{d}{dt}\frac{\partial T_0}{\partial q'_{k+i}}-\frac{\partial T_0}{\partial q_{k+i}}\qquad (i=1,2,\ldots,p),$$

on obtient finalement pour ce terme

$$\frac{\partial S_1}{\partial q''_a}=\frac{d}{dt}\left(\sum_{i=1}^{p}\frac{\partial T_0}{\partial q'_{k+i}}a_{ia}\right)-\sum_{i=1}^{p}\frac{\partial T_0}{\partial q'_{k+i}}\frac{da_{ia}}{dt}-\sum_{i=1}^{p}\frac{\partial T_0}{\partial q_{k+i}}a_{ia}.$$

Nous allons transformer le second membre de cette formule. On a

$$\begin{aligned}\frac{da_{ia}}{dt}&=\frac{\partial a_{ia}}{\partial t}+\sum_{j=1}^{k}\frac{\partial a_{ia}}{\partial q_j}q'_j+\sum_{\mu=1}^{p}\frac{\partial a_{ia}}{\partial q_{k+\mu}}\left(\sum_{j=1}^{k}a_{\mu j}q'_j+a_\mu\right)\\&=\frac{\partial a_{ia}}{\partial t}+\sum_{j=1}^{k}\frac{\partial a_{ia}}{\partial q_j}q'_j+\sum_{j=1}^{k}q'_j\sum_{\mu=1}^{k}a_{\mu j}\frac{\partial a_{ia}}{\partial q_{k+\mu}}+\sum_{\mu=1}^{p}a_\mu\frac{\partial a_{ia}}{\partial q_{k+\mu}};\end{aligned}$$

d'autre part, comme

$$\frac{\partial T}{\partial q_{k+i}}=\frac{\partial T_0}{\partial q_{k+i}}+\sum_{\mu=1}^{p}\frac{\partial T_0}{\partial q'_{k+\mu}}\frac{\partial q'_{k+\mu}}{\partial q_{k+i}},$$

on a

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{p}\frac{\partial T_0}{\partial q_{k+i}}a_{ia}&=\sum_{i=1}^{p}a_{ia}\frac{\partial T}{\partial q_{k+i}}-\sum_{i=1}^{p}a_{ia}\sum_{\mu=1}^{p}\frac{\partial T_0}{\partial q'_{k+\mu}}\frac{\partial q'_{k+\mu}}{\partial q_{k+i}}\\&=\sum_{i=1}^{p}a_{ia}\frac{\partial T}{\partial q_{k+i}}-\sum_{i=1}^{p}\frac{\partial T_0}{\partial q'_{k+i}}\sum_{\mu=1}^{p}a_{\mu a}\frac{\partial q'_{k+i}}{\partial q_{k+\mu}}\\&=\sum_{i=1}^{p}a_{ia}\frac{\partial T}{\partial q_{k+i}}-\sum_{i=1}^{p}\frac{\partial T}{\partial q'_{k+i}}\sum_{\mu=1}^{p}a_{\mu a}\left(\sum_{j=1}^{k}\frac{\partial a_{ij}}{\partial q'_{k+\mu}}q'_j+\frac{\partial a_i}{\partial q'_{k+\mu}}\right)\end{aligned}$$

$$=\sum_{i=1}^{p}a_{ia}\frac{\partial T}{\partial q_{k+i}}-\sum_{i=1}^{p}\frac{\partial T_0}{\partial q'_{k+i}}\sum_{j=1}^{p}q'_j\sum_{\mu=1}^{p}a_{\mu a}\frac{\partial a_{ij}}{\partial q'_{k+\mu}}-\sum_{i=1}^{p}\frac{\partial T_0}{\partial q'_{k+i}}\sum_{\mu=1}^{p}a_{\mu a}\frac{\partial a_i}{\partial q_{k+\mu}}.$$

Alors l'expression de $\frac{\partial S_1}{\partial q_\alpha''}$ prend la forme

$$
(16)\quad \frac{\partial S_1}{\partial q_\alpha''} = \frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{p}\frac{\partial T_0}{\partial q_{k+i}'}a_{i\alpha} - \sum_{i=1}^{p} a_{i\alpha}\frac{\partial T}{\partial q_{k+i}}
$$
$$
-\sum_{i=1}^{p}\frac{\partial T_0}{\partial q_{k+i}'}\left(\frac{\partial a_{i\alpha}}{\partial t} + \sum_{j=1}^{k}\frac{\partial a_{i\alpha}}{\partial q_j}q_j' + \sum_{\mu=1}^{p} a_\mu \frac{\partial a_{i\alpha}}{\partial q_{k+\mu}} + \sum_{j=1}^{k} q_j' \sum_{\mu=1}^{p} a_{\mu j}\frac{\partial a_{i\alpha}}{\partial q_{k+\mu}}\right)
$$
$$
+\sum_{i=1}^{p}\frac{\partial T_0}{\partial q_{k+i}'}\left(\sum_{j=1}^{k} q_j' \sum_{\mu=1}^{p} a_{\mu\alpha}\frac{\partial a_{ij}}{\partial q_{k+\mu}} + \sum_{\mu=1}^{p} a_{\mu\alpha}\frac{\partial a_i}{\partial q_{k+\mu}}\right).
$$

En ajoutant membre à membre les formules (14), (15) et (16) on obtient

$$
\frac{\partial T_1}{\partial q_\alpha} - \frac{d}{dt}\frac{\partial T_1}{\partial q_\alpha'} + \frac{\partial S_1}{\partial q_\alpha''} = -\sum_{i=1}^{p} a_{i\alpha}\frac{\partial T}{\partial q_{k+i}} - \sum_{i=1}^{p}\frac{\partial T_0}{\partial q_{k+i}'}\left(\sum_{j=1}^{k} A_{\alpha j}^{(i)} q_j' + A_\alpha^{(i)}\right).
$$

Ce sont précisément les équations de M. Woronetz.

On voit que le terme complémentaire qu'on doit ajouter au premier membre de l'équation de Lagrange pour l'égaler ensuite à Q_α de façon à obtenir les équations du mouvement des systèmes non holonomes, est présenté par M. Woronetz sous une forme plus compliquée que la nôtre et surtout extrêmement difficile à retenir.

Remarquons encore que nos équations (10) ou (11) s'appliquent avantageusement surtout aux problèmes du roulement des corps solides, car pour trouver la fonction S_1 on n'a pas besoin de calculer la fonction S_0 ou S toute entière, ce qui est assez difficile; dans le cas considéré la fonction S_1 se réduit à la seule énergie de l'accélération de toute la masse, supposée concentrée au centre de gravité, et son calcul ne présente aucune difficulté. Les fonctions T, T_1, T_0 se calculent très facilement après qu'on a calculé la fonction T_0.[2])

3. Dans le § 7 de son mémoire, M. Woronetz donne pour le cas des systèmes non holonomes une formule analogue à l'intégrale d'Hamilton en l'exprimant par le théorème suivant:

«Les équations du mouvement d'un système non holonome peuvent être obtenues facilement sous la forme (12) de la manière suivante. Désignons par $q_1, \ldots, q_{k+p}$ les coordonnées d'un système matériel; par T_0 son énergie cinétique et par Q_s' la force généralisée correspondant à la coordonnée q_s. Supposons que le système satisfasse aux conditions

$$
q_{k+i}' = \sum_{\alpha=1}^{k} a_{i\alpha} q_\alpha' + a_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, p).
$$

[2]) Voir le n° 3 de mon mémoire cité du Journal de Mathématiques où j'étudie en détail le roulement d'un cerceau sur un plan horizontal.

Si, en se servant de ces équations, on exprime l'énergie cinétique du système et les impulsions généralisées, correspondant aux vitesses dépendantes $q'_{k+1}, \ldots, q'_{k+p}$, en fonction du temps t, des coordonnées $q_1, q_2, \ldots, q_{k+p}$ et des vitesses indépendantes $q'_1, \ldots, q'_k$:

$$T_0 = T(t, q_1, \ldots, q_{k+p}, q'_1, \ldots, q'_k),$$

$$\left[\frac{\partial T_0}{\partial q'_{k+i}}\right] = k_i(t, q_1, \ldots, q_{k+p}, q'_1, \ldots, q'_k) \qquad (i = 1, 2, \ldots, p),$$

on aura la formule

$$(23) \qquad \int_{t_0}^{t_1} [\delta T + \sum_{j=1}^{k+p} Q'_s \delta q_s + \sum_{i=1}^{p} k_i \delta (q'_{k+i} - \sum_{\alpha=1}^{k} a_{i\alpha} q'_\alpha - a_i)]\, dt = 0$$

pour toutes les variations $\delta q_1, \ldots, \delta q_k$ qui s'annulent aux moments t_0 et t_1. Les variations $\delta q_{k+1}, \ldots, \delta q_{k+p}$ sont définies par les équations

$$\delta q_{k+i} = \sum_{\alpha=1}^{k} a_{i\alpha} \delta q'_\alpha \qquad (i = 1, 2, \ldots, p)$$

et toutes les différences $\delta q'_s - \frac{d}{dt} \delta q_s$ $(s = 1, 2, \ldots, k + p)$ doivent être égalées à zéro.»

Il est facile de voir que l'intégrale (23) de M. Woronetz est identique à l'intégrale

$$(24) \qquad \int_{t_0}^{t_1} [\delta (T - T_1 + T_1^0) + \sum_{\alpha=1}^{k} Q_\alpha \delta q_\alpha]\, dt,$$

où T_1^0 représente la fonction T_0 considérée comme fonction des variables indépendantes $q'_{k+1}, \ldots, q'_{k+p}$; et par conséquent T_1 n'est autre chose que la fonction T_1^0, en tenant compte des équations (8).

De l'intégrale (24), égalée à zéro, on obtient nos équations (10). Donc, notre intégrale est plus simple que celle de M. Woronetz.

(Eingegangen am 7. 4. 1923.)

Die Isomorphismengruppe der freien Gruppen.

Von

Jakob Nielsen in Kopenhagen.

Ein System von Elementen einer Gruppe heiße *unabhängig*, wenn zwischen den Elementen des Systems keine anderen Relationen als Identitäten gültig sind. Eine Gruppe heiße *frei*, wenn sie durch ein unabhängiges System *erzeugender* Elemente hervorgebracht werden kann. Eine abstrakte Theorie der diskontinuierlichen Gruppen, die von vornherein darauf abzielt, *unendliche* Gruppen einzubegreifen, wird in dem Studium der freien Gruppen ihren natürlichen Ausgangspunkt finden [1]). Ein Blick auf bisher vorliegende Untersuchungen zeigt, welche Bedeutung dabei dem methodischen Wechsel des Erzeugendensystems zukommt [2]). Dem Übergang zwischen zwei Systemen unabhängiger Erzeugender entspricht eine eineindeutige Abbildung der Gruppe in sich, ein „Autoisomorphismus". Die Autoisomorphismen einer Gruppe bilden wieder eine Gruppe, und das Studium dieser gehört zu den fundamentalen Aufgaben der abstrakten Gruppentheorie.

Das Ziel der vorliegenden Arbeit ist, die Struktur der (Auto-)Isomorphismengruppe der durch ein endliches System von unabhängigen Erzeugenden hervorgebrachten freien Gruppen zu bestimmen. Die vorliegende Abhandlung gliedert sich wie folgt:

§ 1. Die Erzeugung der Isomorphismengruppe.

§ 2. Das Relationensystem der symmetrischen Gruppe.

§ 3. Das Relationensystem der durch Vorzeichenwechsel erweiterten symmetrischen Gruppe.

§ 4. Das Relationensystem für die Gesamtgruppe.

---

[1]) Man sehe z. B. W. Dycks „Gruppentheoretische Studien", Math. Ann. 20 u. 22.

[2]) Es sei z. B. auf die Dehnsche Methode zur Bestimmung von Faktorgruppen hingewiesen. (Berichtvortrag von M. Dehn auf der Jahresversammlung d. D. M. V., Leipzig 1922.)

§ 1.

Die Erzeugung der Isomorphismengruppe.

Sei F_n die freie Gruppe, die durch die Erzeugenden $a_1, a_2, \ldots, a_n$ ohne verbindende Relation hervorgebracht wird, Γ_n die Gruppe ihrer Isomorphismen [3]). Das Elementsystem [4])

$$\alpha_i = \Pi^{(i)}(a_1, \ldots, a_n) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n) \tag{1}$$

ist ein „Primitivsystem", d. h. als neues Erzeugendensystem für F_n verwendbar, wenn die ursprünglichen Erzeugenden aus den α zusammengesetzt werden können, wenn es also n Auflösungsgleichungen

$$a_i = \overline{\Pi}^{(i)}(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n) \tag{2}$$

als Identitäten in den a gibt. Die Zuordnung von a_i zu α_i $(i = 1, \ldots, n)$ bestimmt einen Isomorphismus I von F_n, der mit

$$I = [\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n] = [\alpha]$$

bezeichnet sei. Sei $I' = [\alpha']$ ein zweiter Isomorphismus von F_n. Ersetzt man dann in den α jedes a_i durch α_i', so erhält man ein neues Primitivsystem; der neue Isomorphismus sei dann mit II' bezeichnet. Die Bildung eines „Produkts" $II'I'' \ldots I^{(r)}$ von Isomorphismen kann also so bewerkstelligt werden, daß man *entweder* mit dem Faktor am weitesten links anfängt und im jeweiligen Ergebnis die Elemente des nächstfolgenden Faktors für die a *substituiert, oder* mit dem Faktor am weitesten rechts anfängt und die Elemente des jeweiligen Ergebnisses nach der Vorschrift des nächstvoranstehenden Faktors *komponiert*. Ersichtlich erfüllt die so definierte „Multiplikation" von Isomorphismen das assoziative Gesetz. Die Reziproke I^{-1} von I ist durch (2) gegeben, wenn man die Bezeichnungen a und α vertauscht. Bezeichnet man den identischen Isomorphismus $[a]$ mit 1, so ist die Beziehung $I^{-1}I = 1$ eine Folge der Definitionsgleichungen (1) und (2). Aus Kompositionsregel, assoziativem Gesetz und Existenz der „vorderen" Reziproken folgt die Gruppeneigenschaft von Γ_n. Denn II^{-1} ist jedenfalls ein Isomorphismus, etwa I', und hat eine vordere Rezi-

[3]) Der angehängte Index n gibt also hier *nicht*, wie sonst vielfach in der Gruppentheorie üblich, die Ordnung der Gruppe an. F_n und Γ_n sind unendliche Gruppen.

[4]) Das Produktzeichen Π ohne Produktindex steht hier überall, um irgendein nicht kommutatives Produkt aus den Argumenten und ihren Reziproken zu bezeichnen.

proke I'^{-1}. Prämultipliziert man die richtige Gleichung $I^{-1}I \cdot I^{-1} = I^{-1}$ mit $I'^{-1}I$, so folgt unter Anwendung des assoziativen Gesetzes $I'^{-1}I' \cdot I' = I'^{-1}I'$, also $I' = 1$. — Das besagt, daß die Gleichungen (1) Auflösungsgleichungen von (2) sind. Man kann das auch dadurch erkennen, daß man direkt die Ausdrücke (2) für die a in (1) einsetzt und benutzt, daß die entstehenden Relationen zwischen den α Identitäten in den α sein müssen [5]).

Um zu einem Erzeugendensystem von Γ_n zu gelangen, bedenke man zunächst, daß eine beliebige Permutation der a die einfachste Form eines Isomorphismus von F_n darstellt. Man erhält also die symmetrische Gruppe Σ_n als Untergruppe von Γ_n. Es seien folgende Bezeichnungen eingeführt:

(3) $$P = P_{12} = [a_2, a_1, a_3, \ldots, a_n] = (a_1 a_2),$$

(4) $$Q = [a_2, a_3, \ldots, a_n, a_1] = (a_1 a_2 \ldots a_n).$$

Die runden Klammern bezeichnen hier in üblicher Weise die Ersetzung jedes Elements durch das im Zyklus folgende, wobei nicht angeführte Elemente ungeändert bleiben. Setzt man

$$T_i = (a_1 a_2 \ldots a_i) \qquad (i = 2, 3, \ldots, n),$$

so läßt sich jede Permutation in der Form schreiben

$$T_2^{\varepsilon_2} T_3^{\varepsilon_3} \ldots T_n^{\varepsilon_n}, \quad 0 \leqq \varepsilon_i < i.$$

Da aber

$$Q^{-(i-1)} P Q^{i-1} = P_{i,\,i+1} = (a_i a_{i+1}) \quad (i = 1, 2, \ldots, n-1),$$

$$T_i = P_{i-1,\,i} P_{i-2,\,i-1} \ldots P_{23} P_{12},$$

so folgt, daß P und Q ganz Σ_n erzeugen. Wir schreiben $\Sigma_n = \{P, Q\}$. [6])

Ebenso einfache Isomorphismen erhält man, indem man eine Erzeugende durch ihre Reziproke ersetzt. Es bezeichne

(5) $$O = O_1 = (a_1^{-1}, a_2, \ldots, a_n] = [a_1 \rightarrow a_1^{-1}],$$

wo in der letzten Schreibweise der Pfeil als *Ersetzungs*zeichen dient und nicht angeführte Elemente durch sich selbst ersetzt werden. Aus

$$Q^{-(i-1)} O Q^{i-1} = O_i = [a_i \rightarrow a_i^{-1}] \qquad (i = 1, \ldots, n)$$

---

[5]) Eingehendere Untersuchungen über die Eigenschaften unabhängiger Systeme findet man in meinem Aufsatz: „Om Regning med ikke-kommutative Faktorer og dens Anvendelse i Gruppeteorien“, Matematisk Tidsskrift 1921.

[6]) Die Erzeugung der symmetrischen Gruppe durch zwei Operationen ist u. a. benutzt worden von A. Capelli, Giorn. mat. (2) **4** (1897), S. 354; E. H. Moore, Proc. Lond. math. Soc. (1) **28** (1896/7), S. 363.

folgt, daß O zusammen mit P und Q die ganze aus Σ_n durch Vorzeichenwechsel erweiterte Gruppe

$$\Omega_n = \{P, Q, O\}$$

von der Ordnung $2^n \cdot n!$ erzeugt.

Ist α irgendein Produkt aus den Erzeugenden und ihren Reziproken in „unverkürzbarer Form", d. h. keinen Komplex $a_i a_i^{-1}$ enthaltend, so sei mit $L(\alpha)$ die „Länge von α", d. h. die Anzahl der Zeichen in α, also die Summe der numerischen Werte der Exponenten der a in α bezeichnet. Ist $I = [\alpha_1, \ldots, \alpha_n]$, so sei

$$L(I) = L(\alpha_1) + L(\alpha_2) + \ldots + L(\alpha_n)$$

gesetzt. Ω_n umfaßt alle Isomorphismen der Länge n. Um zu Isomorphismen größerer Länge zu gelangen, führen wir eine Erzeugende von der Länge $n+1$ ein:

$$U = U_{12} = [a_1 a_2, a_2, \ldots, a_n] = [a_1 \to a_1 a_2]. \tag{6}$$

Damit ist $U^{-1} = [a_1 \to a_1 a_2^{-1}]$, ferner

$$O U^{\mp 1} O = V^{\pm 1} = V_{12}^{\pm 1} = [a_1 \to a_2^{\pm 1} a_1]. \tag{7}$$

Die Permutation

$$N_{ik} = \begin{cases} (QP)^{k-i-1} Q^{i-1} & \text{für } i < k, \\ (QP)^{k-i} \ \ Q^{i-1} & \text{für } i > k \end{cases} \tag{8}$$

bringt a_i an die Stelle von a_1 und a_k an die Stelle von a_2, wie man vermöge

$$QP = (a_2 a_3 \ldots a_n) \tag{9}$$

unmittelbar sieht. (8) besagt speziell $N_{12} = 1$ und $N_{21} = P$. Man hat dann

$$N_{ik}^{-1} P N_{ik} = P_{ik} = P_{ki} = (a_i a_k), \tag{10}$$

$$N_{ik}^{-1} U^{\pm 1} N_{ik} = U_{ik}^{\pm 1} = [a_i \to a_i a_k^{\pm 1}], \tag{11}$$

$$N_{ik}^{-1} V^{\pm 1} N_{ik} = V_{ik}^{\pm 1} = [a_i \to a_k^{\pm 1} a_i]. \tag{12}$$

In einer früheren kurzen Abhandlung [7]) habe ich gezeigt, daß man von einem beliebig gegebenen Isomorphismus I der Länge $L(I) > n$ aus durch fortgesetzte Prämultiplikation mit Ismorphismen der Form $U_{ik}^{\pm 1}$ und $V_{ik}^{\pm 1}$ zu Isomorphismen mit schrittweise abnehmender Länge und zuletzt zu einem Isomorphismus der Länge n, also in Ω_n, gelangen kann. Diesem „Abbau" von I entspricht ein „Aufbau" von I von Ω_n aus durch Prämultiplikation mit den Reziproken jener Faktoren in umgekehrter

---

[7]) „Über die Isomorphismen unendlicher Gruppen ohne Relation", Mathematische Annalen 79. — Eine erweiterte Darstellung findet sich in der unter [5]) zitierten Arbeit.

Reihenfolge. Da alle diese Faktoren nach (7), (11) und (12) aus $U^{\pm 1}$ durch Transformation mit Isomorphismen aus Ω_n entstehen, so folgt $\Gamma_n = \{P, Q, O, U\}$, d. h.:

> Die Isomorphismengruppe Γ_n der freien Gruppe F_n wird durch vier Isomorphismen P, Q, O und U erzeugt, welche durch die Definitionsgleichungen (3) bis (6) gegeben sind.

Für $n = 2$ wird Q mit P identisch, und die Erzeugendenzahl reduziert sich auf 3.

§ 2.

Das Relationensystem der symmetrischen Gruppe.

Nachdem sich so eine von n unabhängige Anzahl von Erzeugenden für Γ_n ergeben hat, handelt es sich nun um die Auffindung eines vollständigen Relationensystems. Die Aufgabe ist, ein System von Relationen zwischen P, Q, O und U — wir werden es das System S nennen — mit folgenden beiden Eigenschaften aufzustellen:

a) Die Relationen des Systems S sind eine Folge der Definitionsgleichungen (3) bis (6) von P, Q, O, U.

b) Jede Relation zwischen P, Q, O, U, die aus den Definitionsgleichungen folgt, folgt *formal* aus S.

Entsprechend dem Vorgehen in § 1 wird in den folgenden Paragraphen ein solches Relationensystem schrittweise für Σ_n, Ω_n und zuletzt Γ_n aufgestellt. Da Transformationen und Vertauschbarkeiten in dem System eine beherrschende Rolle spielen, werden der Übersichtlichkeit halber folgende abkürzende Bezeichnungen benutzt: Sind X und Y zwei Gruppenelemente, so wird die Transformierte von X mit Y durch X_Y bezeichnet:

$$X_Y = Y^{-1} X Y.$$

Die Vertauschbarkeit von X und Y wird durch einen Doppelpfeil bezeichnet:

$$X \rightleftarrows Y \quad \text{bedeutet also:} \quad XY = YX \quad \text{oder} \quad XYX^{-1}Y^{-1} = 1.$$

Als nächstliegende Relationen zwischen P und Q haben wir die Ordnungen von P, Q und QP nach (3), (4) und (9), ferner die Vertauschbarkeit von P mit den Permutationen von $a_3, \ldots, a_n$. Wegen $P_{Q^i} = (a_{i+1}\, a_{i+2})$ wird diese vollständig durch $P \rightleftarrows P_{Q^i}$ für $2 \leqq i \leqq n-2$ ausgedrückt; dabei folgt $P_{Q^{n-i}} \rightleftarrows P$ aus $P_{Q^i} \rightleftarrows P$. Wir notieren also das folgende Relationensystem:

$$(13) \qquad \left\{ \begin{array}{lll} \text{a)} & P^2 = 1, & \\ \text{b)} & Q^n = 1, & \\ \text{c)} & (QP)^{n-1} = 1, & \\ \text{d)} & P \rightleftarrows P_{Q^i} & \left(i = 2, 3, \ldots, \left[\frac{n}{2}\right]\right). \end{array} \right.$$

Bezüglich der kleinen Werte von n bemerkt man, daß die Relation d) für $n = 4$ aus a) bis c) folgt und für $n = 3$ fortfällt, während für $n = 2$ aus c) $Q = P$ folgt und also nur a) übrigbleibt.

Es wird nun behauptet, daß (13) für Σ_n *vollständig* ist. Hierfür genügt es, nachzuweisen, daß die Ordnung der durch das Relationensystem (13) definierten abstrakten Gruppe nicht größer als $n!$ sein kann. — Es sei gesetzt

$$q = Q^2 P Q^{-1} = (QP)_{Q^{-1}}.$$

Aus (13c) folgt dann

$$(\beta) \qquad q^{n-1} = 1.$$

Unter Benutzung von (13a und d) hat man

$$P_q = QPQ^{-2} \cdot P \cdot Q^2 P Q^{-1} = Q \cdot P \cdot P_{Q^2} \cdot P \cdot Q^{-1} = Q \cdot P_{Q^2} \cdot Q^{-1} = P_Q.$$

Wir nehmen $P_{q^{i-1}} = P_{Q^{i-1}}$ als bewiesen an, was also für $i = 2$ richtig ist, und finden

$$P_{q^i} = q^{-1} \cdot P_{q^{i-1}} \cdot q = QPQ^{-2} \cdot P_{Q^{i-1}} \cdot Q^2 P Q^{-1} = Q \cdot P \cdot P_{Q^{i+1}} \cdot P \cdot Q^{-1}.$$

Ist nun $i + 1 \leqq n - 2$, also $i \leqq n - 3$, so folgt wegen (13d)

$$P_{q^i} = Q \cdot P_{Q^{i+1}} \cdot Q^{-1} = P_{Q^i}.$$

Diese Relation gilt also für $i = 1, 2, \ldots, n - 3$. Aus (13d) folgt dann

$$(\delta) \qquad P \rightleftarrows P_{q^i} \qquad \left(i = 2, 3, \ldots, \left[\tfrac{n-1}{2}\right]\right).$$

Endlich ist unter Benutzung der vorletzten Gleichung sowie (13a—c) und (β)

$$\begin{aligned}(Pq^{-1})^{n-2} &= P \cdot q^{-1} P q \cdot q^{-2} P q^2 \cdot \ldots \cdot q^{-(n-3)} P q^{n-3} \cdot q^{-(n-2)} \\ &= P \cdot P_q \cdot P_{q^2} \cdot \ldots \cdot P_{q^{n-3}} \cdot q = P \cdot P_Q \cdot \ldots \cdot P_{Q^{n-3}} \cdot q \\ &= (PQ^{-1})^{n-2} \cdot Q^{n-2} \cdot q = QPQ^{-2} \cdot q = 1.\end{aligned}$$

Also ist

$$(\gamma) \qquad (qP)^{n-2} = 1.$$

Die Relationen (β), (γ), (δ) zeigen, daß die Untergruppe $\{P, q\}$ von $\{P, Q\}$ das System (13) befriedigt, wenn man Q durch q und n durch $n - 1$ ersetzt. Diese Untergruppe ist mit der Untergruppe $\{Q\}$ vertauschbar. Denn man hat

$$Q^i P = Q^{-(n-i)} P = P_{Q^{n-i}} Q^i = P_{q^{n-i}} Q^i,$$

gültig für $n - i = 1, 2, \ldots, n - 3$, also $i = n - 1, n - 2, \ldots, 3$. Aus der Definition von q liest man aber für die beiden noch fehlenden Exponenten ab:

$$Q^2 P = q Q,$$

$$QP = q^{-1} Q^2.$$

Ebenso hat man

$$Q^i q = Q^{i+2} P Q^{-1} = P_{Q^{n-i-2}} Q^{i+1} = P_{q^{n-i-2}} Q^{i+1} = P_{q^{-i-1}} Q^{i+1},$$

gültig für $n - i - 2 = 0, 1, \ldots, n-3$, also $i = n-2, n-3, \ldots, 1$; und aus der Definition von q liest man für den noch fehlenden Exponenten ab:

$$Q^{-1} q = q^{-1} Q.$$

Jedes Element in $\{P, Q\}$ kann daher geschrieben werden als Element in $\{P, q\}$ postmultipliziert mit einer Potenz von Q. Wegen $Q^n = 1$ kann (13) daher für einen bestimmten Wert von n höchstens n-mal so viel Elemente darstellen, als für den Wert $n-1$. Und für $n = 2$ werden die beiden Elemente 1 und P dargestellt. — Damit ist der Vollständigkeitsbeweis erbracht.

Vollständige Relationensysteme für die symmetrische Gruppe sind mehrfach aufgestellt worden, zuerst wohl von E. H. Moore[8]) und W. Burnside[9]). Speziell hat Moore ein Relationensystem zwischen zwei Erzeugenden angegeben, das aus dem obigen System (13) und noch einer weiteren Relation besteht, die in unserer Schreibweise $(P_Q P)^3 = 1$ lauten würde. Der obige Beweis gewährleistet, daß diese aus (13) folgen muß; das bestätigt man auch leicht direkt, indem man aus (13d) schließt:

$$P \rightleftarrows P_{Q^{n-2}} \cdot P_{Q^{n-3}} \cdot \ldots \cdot P_{Q^2},$$

die rechte Seite mittels (13c) in QPP_Q umformt und die Relation ausführlich hinschreibt, wodurch die Mooresche Relation hervorgeht[10]) [11]).

§ 3.

Das Relationensystem der durch Vorzeichenwechsel erweiterten symmetrischen Gruppe.

Erweitert man Σ_n durch Hinzunahme der Erzeugenden O zu Ω_n, so ergeben sich als naheliegende Relationen die Ordnung von O, die Vertauschbarkeit von O mit den Permutationen von $a_2, \ldots, a_n$ und die Vertauschbarkeit der Zeichenwechsel in den verschiedenen Elementen. Diese Eigenschaften drücken sich in folgenden Relationen aus:

---

[8]) Proc. Lond. math. Soc. (1) 28 (1896/97).

[9]) Wie [8]); siehe auch desselben Autors „Theory of Groups of finite Order", Note C.

[10]) In Comptes rend. Acad. sc. Paris 132 (1901), S. 1031 gibt J. de Séguier ein Relationensystem für die symmetrische Gruppe an, das er selbst als das Mooresche bezeichnet; indessen fehlt dort die oben mit (13c) bezeichnete Relation, und ein Blick auf die Exponentensumme von Q in (13) und der Mooreschen Relation zeigt, daß (13c) nicht aus den übrigen folgen kann. Das System de Séguiers ist also unvollständig.

[11]) Es sei noch auf L. E. Dickson in Proc. Lond. math. Soc. (1) 31 hingewiesen.

$$(14)\quad \begin{cases} \text{a)}\quad O^2 = 1, \\ \text{b)}\quad O \rightleftarrows P_Q, \\ \text{c)}\quad O \rightleftarrows QP, \\ \text{d)}\quad O \rightleftarrows O_Q, \end{cases}$$

und (14) ist zusammen mit (13) für Ω_n vollständig. Hierzu braucht man wieder nur zu zeigen, daß die Ordnung der durch (13), (14) definierten abstrakten Gruppe nicht größer als die Ordnung $n!\,2^n$ von Ω_n ist. — Es bezeichne

$$(15)\qquad O_i = O_{Q^{i-1}} \qquad (i = 1, \ldots, n),$$

also $O_1 = O$. Aus (14a) folgt dann $O_i^2 = 1$. Nun ist für jeden Wert von h

$$Q(QP)^h = Q^{-(n-2)}P(QP)^{h-1} = P_{Q^{n-2}}P_{Q^{n-3}} \ldots P_{Q^{n-h-1}} \cdot Q^{h+1},$$

also für $h = 0, 1, \ldots, n-3$

$$P_{Q(QP)^h} = P_{Q^{h+1}}.$$

Indem man nun (14b) mit $(QP)^{i-1}$ transformiert, folgt wegen (14c)

$$(\varepsilon)\qquad O \rightleftarrows P_{Q^i} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n-2).$$

Indem man (14d) mit $(QP)^h$ transformiert, kommt

$$O \rightleftarrows O_{Q(QP)^h} = O_{Q^{h+1}}$$

für $h + 1 \leqq n - 1$, daher $O \rightleftarrows O_i$ für alle i, und durch Transformation mit allen Potenzen von Q

$$O_i \rightleftarrows O_k$$

für alle i und k. Die O_i bilden also eine Abelsche Gruppe $\{O_i\}$, deren Ordnung höchstens 2^n ist. Diese ist mit $\{P, Q\}$ vertauschbar; denn es ist

$$QO_i = O_{i-1}Q \qquad (i \bmod n),$$

$$PO_i = Q^{-(i-1)}P_{Q^{-(i-1)}}OQ^{i-1} = Q^{-(i-1)}OP_{Q^{-(i-1)}}Q^{i-1} = O_{Q^{i-1}}P = O_iP$$

gültig wegen (ε) für $i \geqq 3$. Für die noch fehlenden beiden Exponenten folgt

$$PO_2 = O_1P,$$
$$PO_1 = O_2P$$

wegen $POP = O_P = O_{QP \cdot P} = O_Q = O_2$. — Damit ist der Vollständigkeitsbeweis erbracht.

Es ist im folgenden oft zweckmäßig, Σ_n durch ein umfassenderes Erzeugendensystem, bestehend aus allen P_{ik} und allen $O_i = [a_i \to a_i^{-1}]$, zu erzeugen. Wir notieren das folgende, in den Indizes symmetrische Relationensystem (16) zwischen diesen, und haben aus dem geführten Beweis die Gewähr, daß (16) eine Folge aus (13), (14) sowie den *formalen*

Definitionsgleichungen (8), (10) und (15) ist. Über die Verwendung von Indizes sei dabei bemerkt: Indizes der Buchstaben P, O, sowie später auch der Buchstaben U, V, W, die verschieden bezeichnet sind, sollen als verschieden gelten; ist der besondere Fall, daß zwei solche Indizes gleich sind, zu berücksichtigen, so wird er jedesmal mit gleicher Bezeichnung der Indizes hinzugefügt.

$$(16)\quad \left\{\begin{array}{ll} \text{a)} & P_{ik}^2 = 1 \qquad\qquad (P_{ik} = P_{ki}), \\ \text{b)} & P_{ik} \rightleftarrows P_{lm}, \\ \text{c)} & \underline{P_{ik}P_{kl} = P_{il}P_{ik} = P_{kl}P_{il},} \\ \text{d)} & O_i^2 = 1, \\ \text{e)} & \underline{O_i \rightleftarrows O_k,} \\ \text{f)} & P_{ik} \rightleftarrows O_l, \\ \text{g)} & P_{ik}O_i = O_k P_{ik}. \end{array}\right.$$

§ 4.

Das Relationensystem für die Gesamtgruppe.

Wir nehmen nun die Erzeugende U hinzu. Die Potenzen von U sind alle verschieden. Geht man an die Aufstellung von Relationen, die U mit P, Q, O verknüpfen, so bieten sich wieder eine ganze Anzahl von solchen, insbesondere Vertauschbarkeiten, unmittelbar dar. Tabelle (17) gibt eine geeignete Auswahl solcher Relationen an, deren Richtigkeit man aus der Bedeutung der erzeugenden Isomorphismen mit leichter Mühe bestätigt:

$$(17)\quad \left\{\begin{array}{lll} \text{a)} & U \rightleftarrows & \left\{\begin{array}{l} P_{Q^2}, \\ QPP_Q, \\ O_{Q^2}, \\ U_{Q^2}, \\ U_O, \\ U_{OQP}, \\ U_{P_{QP}}, \end{array}\right. \\ \text{b)} & & \\ \text{c)} & & \\ \text{d)} & & \\ \text{e)} & & \\ \text{f)} & & \\ \text{g)} & & \end{array}\right. \qquad \begin{array}{ll} \text{h)} & UU_Q = U_{QP}U_QU, \\ \text{i)} & U_{O_P} = U^{-1}, \\ \text{k)} & U^{-1}U_PU_O = OP. \end{array}$$

Es wird die Aufgabe der folgenden Paragraphen sein, zu zeigen, daß (17) zusammen mit (13) und (14) für die gesamte Isomorphismengruppe Γ_n vollständig ist. (13), (14) und (17) möge das „Relationensystem S" heißen.

Es ist zweckmäßig, das Erzeugendensystem durch Hinzunahme der in (11) und (12) definierten Isomorphismen U_{ik} und V_{ik} zu erweitern und Relationen zwischen diesen untereinander und mit den P_{ik} und O_i aufzustellen. Das soll in diesem Paragraphen geschehen. Das Zeichen W_{ik}

sei als Sammelname für U_{ik} und V_{ik} eingeführt. Die aufzustellenden Relationen sollen als Folgerungen aus S abgeleitet werden. Daher wird von der Bedeutung der W_{ik} als Isomorphismen nirgends Gebrauch gemacht, sondern die W_{ik} werden durch (7), (8), (11) und (12) formal definiert als Abkürzungen für gewisse Produkte in P, Q, O, U. Wo es sich dagegen um Produkte aus P, Q, O allein handelt, ist es statthaft, von der Bedeutung dieser Zeichen Gebrauch zu machen, da ja die Ableitbarkeit jeder Relation zwischen diesen aus S gesichert ist.

$P_{Q^2} = (a_3 a_4)$ und $QPP_Q = (a_3 a_4 \ldots a_n)$ erzeugen alle Permutationen von $a_3 \ldots a_n$. σ sei das Zeichen für *jede* solche, also

$$\sigma = \Pi(P_{Q^2}, QPP_Q)$$

für ein beliebiges Produkt Π. (17 a) und (17 b) sagen dann zusammen aus:

$$U \rightleftarrows \sigma.$$

N_{iklm} sei das Zeichen für eine Permutation, die a_i, a_k, a_l, a_m an die Stelle von a_1, a_2, a_3, a_4 bringt. i, k, l, m sind dabei irgend vier verschiedene unter den Zahlen $1, 2, \ldots, n$. Dann ist $N_{iklm} = \sigma \cdot N_{ik}$. Transformiert man daher (17 a) mit N_{iklm}, so kommt

$$U_{N_{iklm}} = U_{\sigma \cdot N_{ik}} = U_{N_{ik}} = U_{ik} \rightleftarrows P_{Q^2 \cdot N_{iklm}} = P_{lm}.$$

Aus $U \rightleftarrows \sigma$ folgt durch Transformation mit O

$$V \rightleftarrows \sigma,$$

daher aus (17 a) durch Transformation mit ON_{iklm}:

$$V_{ik} \rightleftarrows P_{lm},$$

also zusammenfassend:

(18 a) $$W_{ik} \rightleftarrows P_{lm}.$$

Es ist $PN_{ik} = \sigma \cdot N_{ki}$. Transformiert man $W_{12\,P}^{\pm 1}$ mit N_{ik}, so kommt einerseits

$$W_{12\,PN_{ik}}^{\pm 1} = W_{12\,N_{ik}P_{ik}}^{\pm 1} = W_{ik\,P_{ik}}^{\pm 1},$$

andererseits

$$W_{12\,PN_{ik}}^{\pm 1} = W_{12\,\sigma \cdot N_{ki}}^{\pm 1} = W_{12\,N_{ki}}^{\pm 1} = W_{ki}^{\pm 1},$$

also ist

(18 b) $$P_{ik} W_{ik}^{\pm 1} = W_{ki}^{\pm 1} P_{ik}.$$

N_{ikl} sei eine Permutation, die a_i, a_k, a_l an die Stelle von a_1, a_2, a_3 bringt. Dann ist

$$N_{ikl} = \sigma \cdot N_{ik},$$

$$P_{13} N_{ikl} = \sigma \cdot N_{lk},$$

$$P_{23} N_{ikl} = \sigma \cdot N_{il}.$$

Transformiert man $W_{12\,P_{12}}^{\pm 1}$ mit N_{ikl}, so kommt einerseits

$$W_{12\,P_{12}N_{ikl}}^{\pm 1} = W_{12\,N_{ikl}P_{il}}^{\pm 1} = W_{12\,N_{ik}P_{il}}^{\pm 1} = W_{ik\,P_{il}}^{\pm 1},$$

andererseits

$$W_{12\,P_{12}N_{ikl}}^{\pm 1} = W_{12\,\sigma\cdot N_{ik}}^{\pm 1} = W_{lk}^{+1},$$

also ist

(18c)
$$P_{il} W_{ik}^{\pm 1} = W_{lk}^{\pm 1} P_{il}.$$

Transformiert man $W_{12\,P_{23}}^{\pm 1}$ mit N_{ikl}, so folgt genau ebenso

(18d)
$$P_{kl} W_{ik}^{\pm 1} = W_{il}^{\pm 1} P_{kl}.$$

(18a—d) sagt die Vertauschbarkeit der Gruppen $\{P_{ik}\}$ und $\{W_{ik}\}$ aus. Transformiert man (17c) mit O, so kommt

$$V \rightleftarrows O_{Q^2}.$$

Diese Relation und (17c) geben bei Transformation mit N_{ikl}

(18e)
$$W_{ik} \rightleftarrows O_l.$$

Wegen $O_P = O_2$ sagt (17i) aus:

$$U_{O_2} = U^{-1},$$

woraus durch Transformation mit O folgt:

$$V_{O_2}^{-1} = V,$$

also zusammenfassend:

$$W_{12\,O_2}^{\pm 1} = W_{12}^{\mp 1},$$

und hieraus durch Transformation mit N_{ik}:

(18f)
$$O_k W_{ik}^{\pm 1} = W_{ik}^{\mp 1} O_k.$$

Endlich gibt (7) bei Transformation mit N_{ik}

(18g)
$$O_i U_{ik}^{\pm 1} = V_{ik}^{\mp 1} O_i,$$

die man auch schreiben kann

$$O_i V_{ik}^{\pm 1} = U_{ik}^{\mp 1} O_i.$$

(18e—g) sagt die Vertauschbarkeit von $\{O_i\}$ mit $\{W_{ik}\}$, also (18a—g) die Vertauschbarkeit von Ω_n mit $\{W_{ik}\}$ aus.

Γ_n ist aber nicht das „direkte Produkt" von Ω_n und $\{W_{ik}\}$, da diese beiden Untergruppen, wie (17k) zeigt, mehr als das Einheitselement gemeinsam haben. Aus (17k) folgt durch Transformation mit N_{ik} wegen $PN_{ik} = \sigma \cdot N_{ki}$ und (7)

(18h)
$$U_{ik}^{-1} U_{ki} V_{ik}^{-1} = O_i P_{ik},$$

und hieraus durch Transformation mit O_k wegen (18f, g):

(18i) $$U_{ik} V_{ki}^{-1} V_{ik} = O_k P_{ik}.$$

Die noch übrigen Relationen (17d—h) liefern Relationen innerhalb der Gruppe $\{W_{ik}\}$. Da $N_{iklm} = \sigma \cdot N_{ik}$ und $Q^2 N_{iklm} = \sigma \cdot N_{lm}$ ist, ergibt (17d) bei Transformation mit N_{iklm}:

$$U_{ik} \rightleftarrows U_{lm},$$

welches durch Transformation mit O_i und mit $O_i O_l$ wegen (18e—g) erweitert wird zu:

(18k) $$W_{ik} \rightleftarrows W_{lm}.$$

Es ist $P_{QP} = (a_1 a_2)$, also $P_{QP} N_{ikl} = \sigma \cdot N_{lk}$; und da $N_{ikl} = \sigma \cdot N_{ik}$, so gibt (17g) bei Transformation mit N_{ikl}:

$$U_{ik} \rightleftarrows U_{lk},$$

welches durch Transformation mit O_i und mit $O_i O_l$ erweitert wird zu:

(18l) $$W_{ik} \rightleftarrows W_{lk}.$$

(17e) besagt $U \rightleftarrows V$ und gibt bei Transformation mit N_{ik}:

(18m) $$U_{ik} \rightleftarrows V_{ik}.$$

(17f) besagt $U \rightleftarrows V_{QP}$ und gibt wegen $QP N_{ikl} = \sigma \cdot N_{il}$ bei Transformation mit N_{ikl}:

(18n) $$U_{ik} \rightleftarrows V_{il}.$$

Endlich haben wir noch die Folgerungen aus der bedeutungsvollen Relation (17h) zu ziehen, welche aussagt, daß U_{QP} der Kommutator von U und U_Q ist. Wegen

$$N_{ikl} = \sigma \cdot N_{ik},$$
$$Q N_{ikl} = \sigma \cdot N_{kl},$$
$$QP N_{ikl} = \sigma \cdot N_{il}$$

ergibt (17h) bei Transformation mit N_{ikl}:

$$U_{ik} U_{kl} = U_{il} U_{kl} U_{ik},$$

woraus durch Transformation mit O_l wegen (18e, f):

$$U_{ik} U_{kl}^{-1} = U_{il}^{-1} U_{kl}^{-1} U_{ik},$$

also zusammenfassend, mit Rücksicht auf die Vertauschbarkeit von U_{il} und U_{kl} nach (18l):

(18o) $$U_{ik} U_{kl}^{\pm 1} U_{ik}^{-1} U_{kl}^{\mp 1} U_{il}^{\mp 1} = U_{ik} U_{kl}^{\pm 1} U_{ik}^{-1} U_{il}^{\mp 1} U_{kl}^{\mp 1} = 1,$$

woraus durch Transformation mit O_k:

$$U_{ik}^{-1} V_{kl}^{\mp 1} U_{ik} V_{kl}^{\pm 1} U_{il}^{\pm 1} = U_{ik}^{-1} V_{kl}^{\mp 1} U_{ik} U_{il}^{\pm 1} V_{kl}^{\pm 1} = 1, \tag{18p}$$

und mit O_i:

$$V_{ik}^{-1} U_{kl}^{\pm 1} V_{ik} U_{kl}^{\mp 1} V_{il}^{\pm 1} = V_{ik}^{-1} U_{kl}^{\pm 1} V_{ik} V_{il}^{\pm 1} U_{kl}^{\mp 1} = 1, \tag{18q}$$

und mit $O_i O_k$:

$$V_{ik} V_{kl}^{\mp 1} V_{ik}^{-1} V_{kl}^{\pm 1} V_{il}^{\pm 1} = V_{ik} V_{kl}^{\mp 1} V_{ik}^{-1} V_{il}^{\pm 1} V_{kl}^{\pm 1} = 1 \tag{18r}$$

folgt.

Der Übergang von (17) zu (18) läßt die Tragweite der einzelnen Relationen in (17) erkennen. Die Ausnutzung der Eigenschaften der Untergruppe Ω_n von Γ_n ermöglicht es, die über Ω_n hinausgehenden Relationen auf die knappe Form (17) zurückzuführen.

§ 5.

Vollständigkeitsbeweis für die Gesamtgruppe. Zurückführung auf ein Lemma.

Statt der Darstellung $\Gamma_n = \{P, Q, O, U\}$ wird weiterhin die Darstellung $\Gamma_n = \{P_{ik}, O_i, W_{ik}\}$ zur Anwendung kommen. Nach dem letzten Paragraphen ist $\Omega_n = \{P_{ik}, O_i\}$ mit $\{W_{ik}\}$ vertauschbar. Ist also Ω das allgemeine Zeichen für eine Operation aus Ω_n, so kann jeder Isomorphismus in jede der folgenden Formen gebracht werden:

$$\Omega \cdot \Pi(W_{ik}),$$
$$\Pi(W_{ik}) \cdot \Omega,$$
$$\Omega \cdot \Pi(W_{ik}) \cdot \Omega.$$

Wir nehmen den in § 1 definierten Begriff der *„Länge"* $L(I)$ eines Isomorphismus I wieder auf. Es ist $L(\Omega) = n$, insbesondere $L(1) = n$, und

$$L(I\Omega) = L(\Omega I) = L(\Omega I \Omega) = L(I).$$

Die Länge eines Isomorphismus wird also allein durch den *„Kern"* $\Pi(W_{ik})$ bestimmt. Es sei

$$K = W^{(1)} W^{(2)} \dots W^{(r)}$$

ein solcher Kern, wo jedes $W^{(h)}$ irgendein W_{ik} bedeutet und K unverkürzbar in diesen geschrieben sei. Wir definieren

$$\begin{aligned} L(W^{(1)} W^{(2)} \dots W^{(r)}) &= \lambda_1 = L(K), \\ L(W^{(2)} \dots W^{(r)}) &= \lambda_2, \\ &\dots\dots\dots\dots \\ L(W^{(r)}) &= \lambda_r = n + 1 \end{aligned}$$

und nennen die Folge von ganzen Zahlen $\geqq n$:

$$\Delta(K) = \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r$$

das „*Diagramm*“ von K. Transformiert man K mit einem Ω unter Benutzung der Vertauschungsrelationen (18a—g) des vorigen Paragraphen, so erhält man einen neuen unverkürzbaren Kern von r Faktoren mit demselben Diagramm. Läßt man neben den $W^{(\lambda)}$ auch Faktoren O_i und P_{ik} zu, so erweitert sich die Definition zum Diagramm $\Delta(I)$ eines beliebigen Isomorphismus bezogen auf eine bestimmte Produktdarstellung desselben. Ein Diagramm heiße „*normal*“, wenn die λ eine nirgends wachsende Folge bilden, die zugehörige Produktdarstellung eine „*Normalform*“ für den dargestellten Isomorphismus. Wie schon in § 1 genannt, kann jeder Isomorphismus als Produkt in den P_{ik}, O_i, W_{ik} *in Normalform* dargestellt werden. Es wird nun gezeigt werden der folgende

Hauptsatz. *Zu jedem in der Form $I = \Pi(P_{ik}, O_i, W_{ik})$ gegebenen Isomorphismus läßt sich eine Darstellung in Normalform $I = \Pi'(P_{ik}, O_i, W_{ik})$ so finden, daß die Relation*

$$\Pi(P_{ik}, O_i, W_{ik}) = \Pi'(P_{ik}, O_i, W_{ik})$$

eine formale Folge der oben entwickelten, aus S folgenden Relationen (16) *und* (18) *zwischen den P_{ik}, O_i, W_{ik} ist.*

Mit dem Beweis dieses Hauptsatzes wird die Vollständigkeit des Relationensystems S für Γ_n bewiesen sein. Denn es sei

$$R(P, Q, O, U) = 1 \tag{19a}$$

eine beliebige, nach der Bedeutung von P, Q, O, U richtige Relation in Γ_n. Man führe die Symbole P_{ik}, O_i, U_{ik}, V_{ik} lediglich als formale Abkürzungen für gewisse Produkte aus P, Q, O, U ein, die durch (7), (8), (10), (11), (12) und (15) gegeben sind. Dann ist

$$P_{n-1,n} P_{n-2,n-1} \ldots P_{23}, P_{12} = P_{Q^{n-2}} P_{Q^{n-3}} \ldots P_Q P \equiv Q^{-(n-1)}(QP)^{n-1},$$

und dies ist nach S gleich Q. Substituiert man nun in (19a) P_{12} für P, O_1 für O, U_{12} für U und $P_{n-1,n} P_{n-2,n-1} \ldots P_{12}$ für Q, so hat (19a) die Gestalt

$$R'(P_{ik}, O_i, W_{ik}) = 1. \tag{19b}$$

Nach der Aussage des Hauptsatzes kann man nun die linke Seite dieser Relation unter alleiniger Anwendung der aus S folgenden Relationen (16) und (18) in eine Normalform R'' verwandeln:

$$R''(P_{ik}, O_i, W_{ik}) = 1. \tag{19c}$$

Wegen $R'' = 1$ ist $L(R'') = n$, und da R'' als Normalform ein nirgends

wachsendes Diagramm hat, besteht $\Delta(R'')$ aus lauter Zahlen n. Daraus folgt, *daß in* (19c) *überhaupt kein* W_{ik} *vorkommen kann*, denn das Auftreten des ersten Faktors W_{ik} würde eine Zahl $n^{*}+1$ im Diagramm hervorrufen. (19c) lautet also in Wahrheit:

$$(19\text{d}) \qquad R''(P_{ik}, O_i) = 1$$

und indem man die P_{ik}, O_i durch ihre Ausdrücke in P, Q, O ersetzt:

$$(19\text{e}) \qquad R'''(P, Q, O) = 1.$$

Der Übergang von (19a) zu (19e) bedeutet, daß die Erzeugende U aus der vorgelegten Relation durch alleinige Anwendung von S herausgeschafft worden ist. (19e) kann dann weiter dem in § 2 und § 3 gegebenen Vollständigkeitsbeweis zufolge mittels S in eine Identität umgewandelt werden. Jede Relation zwischen P, Q, O und U wird also durch S auf eine Identität zurückgeführt, w. z. b. w.

Es kommt somit alles auf den Beweis des Hauptsatzes an. Wir suchen diesen auf einen Satz geringeren Umfanges zurückzuführen. Zunächst ist, wie oben gesagt:

$$\Pi(P_{ik}, O_i, W_{ik}) = \Omega \cdot K(W_{ik}) \cdot \Omega,$$

und das Diagramm der rechten Seite ist monoton, wenn dasjenige von $K(W_{ik})$ monoton ist. Wir können uns also auf den Kern K beschränken. Die Faktoren von K und die Zahlen λ des Diagramms $\Delta(K)$ seien wie oben bezeichnet. Ist Δ nicht monoton, so sei ϱ der größte Index derart, daß $\lambda_\varrho < \lambda_{\varrho+1}$; ϱ bezeichnet also die Stelle der letzten Nicht-Monotonität im Diagramm von K. Dann betrachten wir den Teilkern $W^{(\varrho)} W^{(\varrho+1)} \ldots W^{(r)}$ und zeigen, daß dieser mittels S so umgeformt werden kann, daß keine der Zahlen des neuen Diagramms dieses Teilkerns den Wert $\lambda_{\varrho+1}$ erreicht. Offenbar kann man dann durch fortgesetzte Anwendung solcher Umformungen $\Delta(K)$ in einer endlichen Anzahl von Schritten monoton machen. Eventuelle Faktoren Ω, die dabei zwischen den W_{ik} auftreten können, kann man dabei immer an den Anfang oder das Ende schaffen, ohne im übrigen den Prozeß zu stören. Der Hauptsatz ist also zurückgeführt auf das folgende

Lemma. *Es sei*

$$K(W_{ik}) = W^{(1)} W^{(2)} \ldots W^{(r)},$$
$$L(W^{(i)} W^{(i+1)} \ldots W^{(r)}) = \lambda_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, r),$$
$$\lambda_1 < \lambda_2 \geqq \lambda_3 \geqq \lambda_4 \geqq \cdots \geqq \lambda_r;$$

dann gibt es eine aus S *folgende Umformung*

$$K(W_{ik}) = \Omega \cdot K'(W_{ik}) \cdot \Omega$$

derart, daß keine Zahl im Diagramm $\Delta(K')$ *den Wert* λ_2 *erreicht.*

Um die Sonderstellung von λ_2 als der größten Zahl in $\Delta(K)$ hervorzuheben, wird diese weiterhin mit Λ bezeichnet. § 6 beweist das Lemma in dem Fall, daß $\lambda_2 > \lambda_3$, daß also Λ in $\Delta(K)$ nur einmal vorkommt. Doch wird diese Bedingung dem § 6 nicht als durchgehende Voraussetzung vorangestellt, da dieser zugleich die Erledigung des allgemeinen Falls in § 7 vorbereiten soll.

§ 6.

Beweis des Lemmas. I. Teil.

Durch Transformation von K mit einem geeigneten Ω kann man erreichen, daß $W^{(1)} = U_{12}$: Denn hat $W^{(1)}$ die Indizes i, k, so verwandle man diese in 1, 2 durch Transformation mit $N_{i,k}^{-1}$ nach (11) und (12); $V_{12}^{\pm 1}$ wird durch Transformation mit O_1 in $U_{12}^{\mp 1}$ verwandelt nach (18g); U_{12}^{-1} wird durch Transformation mit O_2 in U_{12} verwandelt nach (18f). — Es sei also $W^{(1)} = U_{12}$. Ferner sei bezeichnet:

$$W^{(3)} W^{(4)} \ldots W^{(r)} = I = [\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n].$$

Wir haben uns in diesem Paragraphen um die Faktorenfolge von I nicht zu bekümmern und haben demnach nur die folgenden Voraussetzungen:

$$\begin{aligned} K &= U_{12} W^{(2)} I, \\ L(K) &= \lambda_1 < \Lambda, \\ L(W^{(2)} I) &= \lambda_2 = \Lambda, \\ L(I) &= \lambda_3 \leqq \Lambda. \end{aligned}$$

Es kommt nun alles auf den Faktor $W^{(2)}$ an. Wir nehmen zunächst an, daß er keinen Index mit U_{12} gemeinsam hat:

$$W^{(2)} = W_{ik}^{\pm 1} \qquad (i, k = 3, 4, \ldots, n).$$

Setzt man dann

$$K' = W_{ik}^{\pm 1} U_{12} I,$$

so ist $K = K'$ eine Folge von (18k). Die Wirkung des Faktors U_{12} auf den Isomorphismus ist hier unabhängig davon, ob $W_{ik}^{\pm 1}$ vorher oder nachher ausgeübt wird. Also ist $L(U_{12} I) < L(I)$. Ist also $\lambda_3 < \Lambda$, so tritt Λ in $\Delta(K')$ überhaupt nicht auf, das Lemma ist also erfüllt; ist $\lambda_3 = \Lambda$, so ist die Untersuchung auf den kürzeren Kern $U_{12} I$ zurückgeführt, der wieder die Voraussetzungen des Lemmas erfüllt.

Ähnliche Gesichtspunkte haben uns im folgenden in den schwerer zu erledigenden Fällen zu leiten, wo $W^{(2)}$ mit U_{12} einen oder beide Indizes gemein hat. Es bezeichne t eine beliebige der Zahlen $3, 4, \ldots, n$. Dann ist noch leicht zu erledigen der Fall $W^{(2)} = W_{t2}^{\pm 1}$. Denn dies ist wegen (18l) mit U_{12} vertauschbar, und von dem umgeformten Kern $K' = W_{t2}^{\pm 1} U_{12} I$

gilt das gleiche wie eben von $W_{ik}^{\pm 1} U_{12} I$. Wir haben für $W^{(2)}$ daher der Reihe nach noch folgende Fälle einzeln zu betrachten:

$$\text{I.}\quad W^{(2)} = W_{12}^{\pm 1},$$
$$\text{II.}\quad W^{(2)} = W_{21}^{\pm 1},$$
$$\text{III.}\quad W^{(2)} = W_{t1}^{\pm 1},$$
$$\text{IV.}\quad W^{(2)} = W_{1t}^{\pm 1},$$
$$\text{V.}\quad W^{(2)} = W_{2t}^{\pm 1}.$$

P_{3t} ist wegen (18a) mit U_{12} vertauschbar. Bei Behandlung von III, IV, V können wir daher durch Transformation mit P_{3t} wegen (18c, d) erreichen, daß wir für t den speziellen Index 3 haben.

$$\text{I.}\quad K = U_{12} W_{12}^{\pm 1} I.$$

$W_{12}^{\pm 1}$ kann wegen der vorausgesetzten Unverkürzbarkeit von K nicht U_{12}^{-1} sein. Es kann auch nicht U_{12} sein. Denn wir hätten:

$$U_{12} I = [\ \alpha_1 \alpha_2,\ \alpha_2, \ldots],$$
$$U_{12}^2 I = [\alpha_1 \alpha_2 \alpha_2, \alpha_2, \ldots]$$

mit $L(\alpha_1 \alpha_2) \geqq L(\alpha_1)$ und $L(\alpha_1 \alpha_2 \alpha_2) < L(\alpha_1 \alpha_2)$. Bei der Hinzufügung des ersten α_2 dürfte also von diesem höchstens die Hälfte durch Verkürzung ausgelöscht werden, bei Hinzufügung des zweiten α_2 müßte von diesem mehr als die Hälfte ausgelöscht werden. Es müßten also die beiden Faktoren des Produktes $\alpha_2 \alpha_2$ sich mindestens bis zur Hälfte auslöschen, was für jeden unverkürzbar geschriebenen Ausdruck α_2 unmöglich ist. Wir haben für $W_{12}^{\pm 1}$ daher nur die beiden Unterfälle V_{12} und V_{12}^{-1}.

a) $K = U_{12} V_{12} I$.

$$V_{12} I = [\ \alpha_2 \alpha_1\ , \alpha_2, \ldots],$$
$$U_{12} V_{12} I = [\alpha_2 \alpha_1 \alpha_2, \alpha_2, \ldots].$$

Hier ist $L(\alpha_2 \alpha_1) \geqq L(\alpha_1)$ und $L(\alpha_2 \alpha_1 \alpha_2) < L(\alpha_2 \alpha_1)$. — Wir werden im folgenden viel mit Längenzahlen der α sowie von Teilen und Kombinationen der α zu rechnen haben. Es wird nicht zu Mißverständnissen führen, wenn wir dabei das Längenzeichen $L(\,)$ fortlassen und also z. B. obige Ungleichungen schreiben:

$$\alpha_2 \alpha_1 \geqq \alpha_1,$$
$$\alpha_2 \alpha_1 \alpha_2 < \alpha_2 \alpha_1.$$

Es kommt nun alles darauf an, wie die gegenseitige Absorption der Erzeugenden a in dem Ausdruck $\alpha_2 \alpha_1 \alpha_2$ vor sich geht. Um die Übersicht über die möglichen Fälle zu erleichtern und uns kurz ausdrücken zu

können, verwenden wir eine Veranschaulichung durch einen unendlichen Streckenkomplex N mit folgenden Eigenschaften: 1. N ist ein „Baum“, d. h. irgend zwei Punkte A und B in N bestimmen eindeutig einen Verbindungsweg AB in N, wenn man es vermeidet, eine Teilstrecke hin und unmittelbar danach zurück zu durchlaufen. 2. Von jedem Eckpunkt in N gehen $2n$ Teilstrecken aus. — Daß ein solcher Streckenzug auch in der Ebene topologisch möglich ist, folgt z. B. daraus, daß er in der hyperbolischen Ebene metrisch regulär konstruiert werden kann, so daß also alle Teilstrecken gleich lang sind und der Vollwinkel um jeden Eckpunkt in $2n$ gleiche Teile geteilt ist. Man hat dazu offenbar nur die Länge der Teilstrecke so groß zu wählen, daß die Ecken eines Polygonzuges mit dem Polygonwinkel $\frac{\pi}{n}$ einer Abstandslinie folgen. — 3. Jede Teilstrecke trägt den Namen a_i einer Erzeugenden und einen Durchlaufungssinn, und zwar so, daß von jedem Eckpunkt jede Erzeugende mit positiver und negativer Richtung ausgeht. — N ist mit diesen Eigenschaften das Dehnsche „Gruppenbild“ von F_n. Wählt man die Bezeichnung für den hyperbolisch-regulären Komplex überdies noch so, daß die Erzeugendenstrecken bei positiver Umlaufung der Netzpunkte überall gleich angeordnet sind, so ist die Bewegungsgruppe der hyperbolischen Ebene, die dies bezeichnete Netz mit sich zur Deckung bringt, mit F_n isomorph. — Doch wird im folgenden hiervon sowie von der hyperbolisch-regulären Konstruktion oder überhaupt von der Gesamtheit von N nirgends Gebrauch gemacht, vielmehr nur topologische Eigenschaften endlicher Teilkomplexe aus N verwendet. Es seien AB und CD zwei — unverkürzbare — Wege in N. $AB = CD$ soll dann besagen, daß sie „gleich lang“ sind, d. h. aus gleich vielen Teilstrecken bestehen. $AB \equiv CD$ soll besagen, daß sie überdies aus den gleichen Erzeugenden in gleicher Reihenfolge bestehen. (a_1 in negativer Richtung durchlaufen entspricht a_1^{-1}). Jede Erzeugendenfolge kann auf eindeutige Weise von jedem Eckpunkt aus als Weg in N beschrieben werden. Für zwei verschiedene Punkte A und B ist immer $AC \not\equiv BC$ und $AB \not\equiv BA$. Sind A, B und C drei verschiedene Punkte und enthält der unverkürzbare Weg AB den Punkt C, so sagen wir: C trennt A und B auf N.

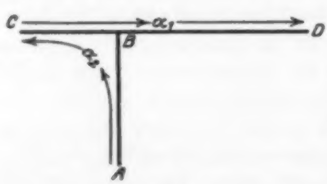

Fig. 1.

In unserem obigen Fall beschreiben wir nun die Erzeugendenfolge $\alpha_2\alpha_1$ von einem Punkt A von N aus, desgleichen α_2 allein. Es sei $AC \equiv \alpha_2$ und $CD \equiv \alpha_1$, also $AD \equiv \alpha_2\alpha_1$. (Siehe Fig. 1.) Dabei können CA und CD ein Stück CB gemeinsam haben, es kann aber auch $CB = 0$

sein. Jedenfalls wissen wir aus der Voraussetzung $\alpha_2\alpha_1 \geqq \alpha_1$, daß $AD \geqq CD$, also $BA \geqq BC$ ist. Um nun zu $\alpha_2\alpha_1\alpha_2$ zu kommen, beschreibe man α_2 von D aus, $\alpha_2 \equiv DF$. Sei E der Punkt, in dem DF von der bisher gezeichneten Figur abzweigt. E kann speziell mit F zusammenfallen, wenn nämlich DF ganz auf der bisher gezeichneten Figur verläuft.

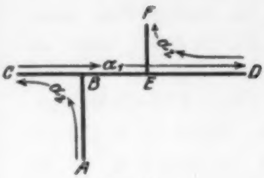

Fig. 2a.

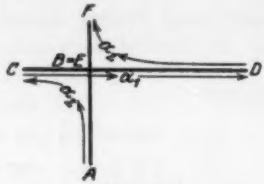

Fig. 2b.

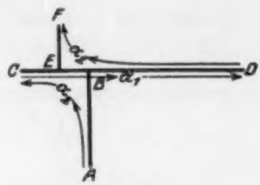

Fig. 2c.

Wir nehmen zunächst an, daß E auf DC liegt, also nicht A von B trennt; s. Fig. 2a, b, c. In den beiden ersten Fällen ist DE, im letzten DB das Stück, das beim Anfügen von α_2 an $\alpha_2\alpha_1$ gelöscht wird, daher größer als $\frac{\alpha_2}{2}$ wegen $\alpha_2\alpha_1\alpha_2 < \alpha_2\alpha_1$. Infolgedessen ist $\alpha_1\alpha_2 < \alpha_1$. Setzt man dann

$$K' = V_{12} U_{12} I,$$

so folgt $K = K'$ aus (18m). Dabei ist $L(U_{12} I) < L(I)$, also $< \Lambda$. Für $L(I) < \Lambda$ ist also das Lemma erfüllt, für $L(I) = \Lambda$ ist die Untersuchung auf den kürzeren Kern $U_{12} I$ zurückgeführt.

Wir nehmen dann an, daß E die Punkte A und B trennt; s. Fig. 3. Sei M_1 die Mitte von AC, also ein Eckpunkt, falls $L(AC)$ gerade ist, und die Mitte einer Erzeugendenstrecke, falls $L(AC)$ ungerade ist; M_2 ebenso die Mitte von DF. Wegen $AM_1 \equiv DM_2$ (beide sind Anfangshälften von α_2) können M_1 und M_2 nicht zusammenfallen. Wegen $\alpha_2\alpha_1 \geqq \alpha_1$ liegt M_1 auf AB, wegen $\alpha_2\alpha_1\alpha_2 < \alpha_2\alpha_1$ liegt M_2 auf DE und nicht in E. $BC \neq BD$, wegen $M_1 \neq M_2$. Wäre $BC > BD$, so läge $M_1 M_2$ auf BE und M_1 näher an B. Aus $M_1 A \equiv M_2 D$ würde dann $M_1 M_2 \equiv M_2 M_1$ folgen, was unmöglich ist. Also ist $BC < BD$, daher $\alpha_1\alpha_2 < \alpha_2\alpha_1$, weil in $\alpha_1\alpha_2$ ein größerer Bestandteil ausgelöscht wird; in K' ist also wieder $L(U_{12} I) < \Lambda$.

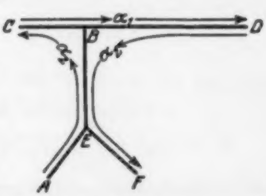

Fig. 3.

b) $K = U_{12} V_{12}^{-1} I$.

$$V_{12}^{-1} I = [\ \alpha_2^{-1}\alpha_1\ ,\ \alpha_2, \ldots],$$
$$U_{12} V_{12}^{-1} I = [\alpha_2^{-1}\alpha_1\alpha_2,\ \alpha_2, \ldots].$$

Hier ist $\alpha_2^{-1}\alpha_1 \geqq \alpha_1$ und $\alpha_2^{-1}\alpha_1\alpha_2 < \alpha_2^{-1}\alpha_1$. Man zeichne $\alpha_2^{-1}\alpha_1\alpha_2$, und man erhält vier, den Figuren 2a, b, c und 3 entsprechende Figuren, nur mit umgekehrter Pfeilrichtung auf AC. Die wieder aus (18m) folgende Umformung

$$K' = V_{12}^{-1} U_{12} I$$

genügt wieder in den drei ersten Fällen; ebenso im vierten Fall, wenn $CB < BD$. $CB = BD$ ist unmöglich wegen $BC \not\equiv BD$. Also sei $BC > BD$. (Siehe Fig. 4.) Es sei $CG = DB$, also $CG \equiv DB$ als Anfangsbestandteil von α_2. Wegen $\alpha_2^{-1}\alpha_1 \geqq \alpha_1$ ist $CB \leqq \frac{\alpha_2}{2}$, wegen $\alpha_2^{-1}\alpha_1\alpha_2 < \alpha_2^{-1}\alpha_1$ ist $DE > \frac{\alpha_2}{2}$, also ist $DE > CB$, also $BE > GB$. Sei H der Punkt auf BE, für den $BH = GB$, dann ist $BH \equiv GB$. α_1 und α_2 können daher aus folgenden Erzeugendenfolgen zusammengesetzt werden:

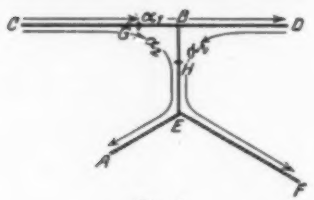

Fig. 4.

$$\alpha_1 \equiv (CG)(GB)(GC),$$
$$\alpha_2 \equiv (CG)(GB)(GB)(HA).$$

Dann bilden wir den neuen Kern

$$K' = U_{12}^{-1} V_{21}^{-1} U_{12} V_{21}^{-1} V_{21}^{-1} I,$$

dessen sukzessive gebildeten Teilkerne aussehen wie folgt:

$$\begin{aligned}
V_{21}^{-1} I &= [\ \alpha_1\ ,\ \alpha_1^{-1}\alpha_2 \equiv (CG)(GB)(HA),\ \ldots],\\
V_{21}^{-2} I &= [\ \alpha_1\ ,\ \alpha_1^{-2}\alpha_2 \equiv \quad (CG)\,HA) \quad ,\ \ldots],\\
U_{12} V_{21}^{-2} I &= [\alpha_1^{-1}\alpha_2,\ \ \alpha_1^{-2}\alpha_2\ ,\ \ldots],\\
V_{21}^{-1} U_{12} V_{21}^{-2} I &= [\alpha_1^{-1}\alpha_2,\ \alpha_2^{-1}\alpha_1^{-1}\alpha_2,\ \ldots],\\
K' = U_{12}^{-1} V_{21}^{-1} U_{12} V_{21}^{-2} I &= [\ \alpha_2\ ,\ \alpha_2^{-1}\alpha_1^{-1}\alpha_2,\ \ldots].
\end{aligned}$$

Die Längen aller dieser Isomorphismen bleiben unterhalb $\Lambda = L([\alpha_2^{-1}\alpha_1, \alpha_2, \ldots])$, denn: die beiden ersten sind $< L(I)$; $L(K') = L(K) < \Lambda$; der vierte ist $< L(K')$ wegen $\alpha_1^{-1}\alpha_2 < \alpha_2$; der dritte ist $< \Lambda$ wegen $\alpha_1^{-1}\alpha_2 = \alpha_2^{-1}\alpha_1$ und $\alpha_1^{-2}\alpha_2 < \alpha_2$. — Es ist $K = P_{12} O_2 K'$, und es bleibt noch zu zeigen, daß diese Relation aus S folgt. Es ist nachzuweisen

$$U_{12} V_{12}^{-1} V_{21}^{2} U_{12}^{-1} V_{21} U_{12} O_2 P_{12} = 1.$$

Mittels (18i, h) wird die linke Seite:

$$U_{12} \cdot U_{21}^{-1} O_1 P_{12} \cdot P_{12} O_2 U_{21}^{-1} \cdot V_{21} U_{12} O_2 P_{12},$$

also durch Vertauschung von U_{21}^{-1} und V_{21} nach (18 m) und erneuter Anwendung von (18 h):

$$U_{12} U_{21}^{-1} O_1 O_2 V_{21} \cdot O_2 P_{12} V_{21} \cdot O_2 P_{12},$$

welches durch (18 f, g) auf 1 zurückgeführt wird.

$$\text{II.} \quad K = U_{12} W_{21}^{\pm 1} I.$$

Wir haben für W_{21}^{+1} der Reihe nach U_{21}, U_{21}^{-1}, V_{21}, V_{21}^{-1} zu setzen.

a) $K = U_{12} U_{21} I$.

$$U_{21} I = [\ \alpha_1 \quad , \alpha_2\alpha_1, \ldots] \quad (\text{mit } \alpha_2\alpha_1 \geqq \alpha_2),$$
$$K = U_{12} U_{21} I = [\alpha_1\alpha_2\alpha_1, \alpha_2\alpha_1, \ldots] \quad (\text{mit } \alpha_1\alpha_2\alpha_1 < \alpha_1).$$

Man zeichne $AB \equiv \alpha_2$, $BD \equiv \alpha_1$ mit Abzweigungspunkt C, endlich $AF = \alpha_1^{-1}$ mit Abzweigungspunkt E. Nimmt man zunächst E auf AB

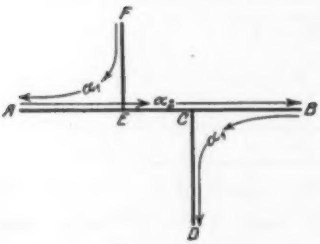

Fig. 5a

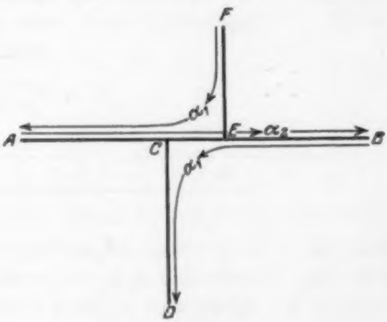

Fig. 5b.

an, so hat man eine der Figuren 5 a, b, wo man z. B. in 5 a den Fall $E = C$, also $EC = 0$ mitrechnen möge. Man bilde den Kern

$$K' = U_{21} V_{21}^{-1} V_{12} V_{21} I,$$

der folgendem Aufbau von I aus mit den beigefügten Längenzahlen entspricht:

$\alpha_1\alpha_2\alpha_1$	$\alpha_1\alpha_2\alpha_1$	$\alpha_1\alpha_2\alpha_1$	α_1	α_1
$\alpha_2\alpha_1$	α_1^{-1}	$\alpha_1\alpha_2$	$\alpha_1\alpha_2$	α_2
$\lambda_1 < \Lambda$	μ_3	μ_2	μ_1	$\lambda_2 \leqq \Lambda$,

wobei die ungeänderten Elemente $\alpha_3 \ldots \alpha_n$ nicht mitgeschrieben sind. In Fig. 5a ist $CD \geqq CB$, $EC + CD < EA$, daher $CB < EA$, daher $\mu_1 < \Lambda$, $\mu_2 < \lambda_1$, $\mu_3 < \lambda_1$. Dieselben Ungleichungen gelten aber auch

im Falle 5b wegen $CD \geqq CB$, $CA > CD$, daher $CA > CB > EB$. Wir haben noch aus S abzuleiten, daß $K = K'$, daß also

$$U_{21} V_{21}^{-1} V_{12} V_{21} U_{21}^{-1} U_{12}^{-1} = 1;$$

durch Anwendung von (18 m, i, h) folgt

$$U_{21} \cdot U_{12}^{-1} O_2 P_{12} \cdot U_{21}^{-1} \cdot P_{12} O_2 U_{21}^{-1},$$

und dies reduziert sich mittels (18 b, f) auf 1.

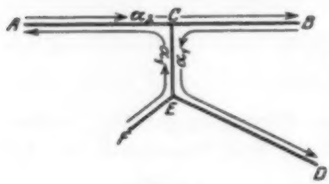

Fig. 6.

Bleibt noch der Fall, daß E die Punkte C und D trennt (Fig. 6). Hier ist $BC \leqq CD$ und $ED < EA$. Die Mitte M von AD liegt also auf AE. M kann nicht auf CE liegen, denn aus $MA = MD$ würde $MA \equiv MD$ folgen als Endbestandteil von α_1. M trennt also A und C; also ist $AC > CD$ und daher $AC > CB$.

$$K' = V_{12}^{-1} U_{21} V_{21} I$$

$\alpha_1^{-1}\alpha_2^{-1}$	α_1	α_1	α_2
$\alpha_1\alpha_2\alpha_1$	$\alpha_1\alpha_2\alpha_1$	$\alpha_1\alpha_2$	α_2
$\lambda_1 < \Lambda$	μ_2	μ_1	$\lambda_2 \leqq \Lambda$

Hier ist $\mu_1 < \lambda_2$, denn wegen $AC > CB$ muß $EF < ED$ sein, also $FC < DC < AC$, also $\alpha_1 \alpha_2 < \alpha_2$. Ferner $\mu_2 < \lambda_1$, da $\alpha_1 < \alpha_2 \alpha_1$ wegen $CB < CA$. Es ist $K = P_{12} O_1 K'$, und dies folgt aus (18 m, i).

b) $K = U_{12} U_{21}^{-1} I$.

Man erhält beim Zeichnen von $\alpha_1 \alpha_2 \alpha_1^{-1}$ drei den Figuren 5a, b und 6 entsprechende Figuren, nur mit umgekehrter Pfeilrichtung auf DB. In den Fällen 5a, b hat man dieselben Größenrelationen wie oben und

$$K' = V_{21} V_{21} U_{12}^{-1} V_{21} I$$

genügt aus denselben Gründen wie dort. Es ist $K = O_1 O_2 K'$. Wegen (18 m, h) folgt:

$$O_1 O_2 V_{21}^2 U_{12}^{-1} V_{21} U_{21} U_{12}^{-1} = O_1 O_2 V_{21} \cdot V_{21} U_{12}^{-1} U_{21} \cdot V_{21} U_{12}^{-1}$$
$$= O_1 O_2 V_{21} \cdot P_{12} O_2 \cdot P_{12} O_2 U_{21}^{-1}$$

und dies wird 1 mittels (18 f, g).

Im Fall der Fig. 6 ist $CA \neq CB$ wegen $CA \not\equiv CB$. Es sei zunächst $CA > CB$ angenommen. Dann ist $EF < ED$. Es sei $K' = V_{12}^{-1} U_{21}^{-1} V_{21} I$

$\alpha_1\alpha_2^{-1}$	α_1	α_1	α_1
$\alpha_1\alpha_2\alpha_1^{-1}$	$\alpha_1\alpha_2\alpha_1^{-1}$	$\alpha_1\alpha_2$	α_2
$\lambda_1 < \Lambda$	μ_2	μ_1	$\lambda_3 \leqq \Lambda$

Dann ist $\mu_1 < \Lambda$, da $FB < AD$; $\mu_2 < \lambda_1$, da $\alpha_1 < \alpha_1\alpha_2^{-1}$ wegen $CB < CA$. Es ist $K = P_{12}O_1K'$, und dies folgt aus (18 m, i).

Endlich sei $CA < CB$ angenommen. Dann sei G auf BC der Punkt, für den $BG = AC$, also $BG \equiv AC$ als Anfangsbestandteil von α_1^{-1}. Nach Voraussetzung ist

$$CE + ED \geqq CB = CG + CA,$$
$$CA + CE > ED,$$

woraus durch Addition:

$$2CE > CG.$$

Die Erzeugendenfolge GC wiederholt sich daher (als Teil von α_1^{-1}) auf CE von C aus, so weit CE reicht, d. h. mehr als die Hälfte von GC. — Es sei

$$K' = U_{12}^{-1}V_{21}U_{12}^{-1}U_{12}^{-1}I$$

$\alpha_1\alpha_2^{-1}\alpha_1^{-1}$	$\alpha_1\alpha_2^{-2}$	$\alpha_1\alpha_2^{-2}$	$\alpha_1\alpha_2^{-1}$	α_1
$\alpha_1\alpha_2^{-1}$	$\alpha_1\alpha_2^{-1}$	α_2	α_2	α_2
$\lambda_1 < \Lambda$	μ_3	μ_2	μ_1	$\lambda_3 \leqq \Lambda$

Hierbei ist $\mu_1 < \lambda_3$, wegen $CA < CB$; ferner $\mu_2 < \mu_1$, denn beschreibt man α_2^{-1} von A aus, so verläuft es zunächst bis C wegen $AC \equiv BG$ und darauf mehr als die Hälfte der Erzeugendenfolge GC auf CE, wie oben gefunden wurde; $L(\alpha_2)$ ist aber $2BG + GC$. Da somit $\alpha_1\alpha_2^{-2} < \alpha_1$ ist $\mu_3 < \Lambda$. — Es ist $K = O_1O_2K'$; man hat nach (18 h):

$$O_1O_2U_{12}^{-1}\cdot V_{21}U_{12}^{-1}\cdot U_{12}^{-1}U_{21}\cdot U_{12}^{-1} = O_1O_2U_{12}^{-1}\cdot P_{12}O_2U_{21}^{-1}\cdot O_1P_{12}V_{12}\cdot U_{12}^{-1}$$

und dies wird 1 nach (18 f, g, m).

c) $K = U_{12}V_{21}I$.

$\alpha_1\alpha_1\alpha_2$	α_1	α_1
$\alpha_1\alpha_2$	$\alpha_1\alpha_2$	α_2
$\lambda_1 < \Lambda$	Λ	$\lambda_3 \leqq \Lambda$

In $\alpha_1\alpha_1\alpha_2$ wird von dem mittleren Faktor α_1 durch den vorderen Faktor α_1 weniger als $\frac{\alpha_1}{2}$ ausgelöscht, durch den Faktor α_2 höchstens $\frac{\alpha_1}{2}$, wegen $\alpha_1\alpha_2 \geqq \alpha_2$. Der mittlere Fak-

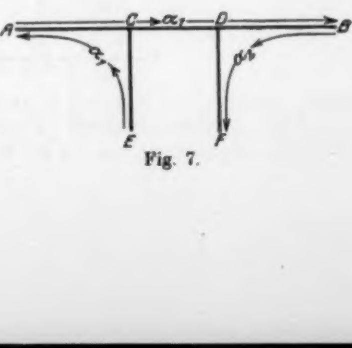

Fig. 7.

tor wird also nicht ganz absorbiert, und wir haben beim Zeichnen von $\alpha_1 \alpha_1 \alpha_2$ nur eine mögliche Figur (Fig. 7), mit $CD > 0$. — Es sei

$$K' = V_{21} U_{12}^{-1} V_{21}^{-1} U_{12} I$$

$\alpha_1 \alpha_1 \alpha_2$ $\alpha_1 \alpha_2$	$\alpha_1 \alpha_1 \alpha_2$ $\alpha_2^{-1} \alpha_1^{-1} \alpha_2$	$\alpha_1 \alpha_2$ $\alpha_2^{-1} \alpha_1^{-1} \alpha_2$	$\alpha_1 \alpha_2$ α_2	α_1 α_2
$\lambda_1 < \Lambda$	μ_3	μ_2	μ_1	$\lambda_2 \leqq \Lambda$

Nach Voraussetzung ist $AC + CD \geqq DB$ und $AC > CD + DF$, daher durch Addition: $2AC > DB + DF = \alpha_2$, und da $AC < \frac{\alpha_1}{2}$ (wegen $\alpha_1^2 > \alpha_1$), folgt $\alpha_1 > \alpha_2$, daher $\mu_1 < \Lambda$. Da $AC < CD + DB$ $\left(\text{weil} < \frac{\alpha_1}{2}\right)$, folgt $DB > DF$, daher $\alpha_1 \alpha_2 < \alpha_1$. Es ist also $BD > \frac{\alpha_2}{2}$ und $AC > \frac{\alpha_2}{2}$; die ersten $\left[\frac{\alpha_2}{2}\right] + 1$ Erzeugenden von AC stimmen daher mit den ersten $\left[\frac{\alpha_2}{2}\right] + 1$ von BD (als Anfang von α_1^{-1}) überein. Also ist $\alpha_2^{-1} \alpha_1^{-1} \alpha_2 < \alpha_2^{-1} \alpha_1^{-1}$; hieraus und aus $\alpha_1 \alpha_2 < \alpha_1$ folgt $\mu_2 < \Lambda$. Zugleich folgt $\mu_3 < \lambda_1$.

Es ist $K = K'$, und dies folgt durch zweimalige Anwendung von (18h) sowie von (18m, f, g, b).

d) $K = U_{12} V_{21}^{-1} I$.

Man hat $K' = V_{12}^{-1} I$. Die Relation $K = P_{12} O_1 K'$ folgt aus (18i). Die noch fehlenden Fälle III, IV, V setzen $n > 2$ voraus. Also ist mit dem bisher Erreichten der Vollständigkeitsbeweis für S für $n = 2$ abgeschlossen. (Natürlich läßt sich dieser einfacher führen, wenn man von vornherein $n = 2$ voraussetzt, weil man dann über die Gestalt der α ganz spezielle Voraussetzungen hat.) — Im folgenden haben wir ein drittes Element von I, α_3, in die Untersuchung einzubeziehen.

III. $K = U_{12} W_{31}^{\pm 1} I$. — Da $O_3 \rightleftarrows U_{12}$ nach (18e) können wir durch eventuelle Transformation mit O_3 wegen (18g) erreichen, daß W_{31} den Exponenten $+1$ erhält (analog unten in IV und V). Wir haben daher für W_{31} erst U_{31}, dann V_{31} zu setzen.

a) $K = U_{12} U_{31} I$.

$\alpha_1 \alpha_2$ α_2 $\alpha_3 \alpha_1$	α_1 α_2 $\alpha_3 \alpha_1$	α_1 α_2 α_3
$\lambda_1 < \Lambda$	Λ	$\lambda_2 \leqq \Lambda$

Man zeichne folgende Figur: $AB \equiv \alpha_1$; $AD \equiv \alpha_3^{-1}$ mit dem Abzweigungspunkt C von AB; $BF \equiv \alpha_2$ mit dem Abzweigungspunkt E

von der bisher gezeichneten Figur. Trennt E nicht A und C, so bilde man

$$K' = U_{32}^{-1} U_{31} U_{12} I$$

$$\begin{array}{c|c|c|c}
\alpha_1 \alpha_2 & \alpha_1 \alpha_2 & \alpha_1 \alpha_2 & \alpha_1 \\
\alpha_2 & \alpha_2 & \alpha_2 & \alpha_2 \\
\alpha_3 \alpha_1 & \alpha_3 \alpha_1 \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_3 \\
\hline
\lambda_1 < \Lambda & \mu_2 & \mu_1 & \lambda_3 \leqq \Lambda
\end{array}.$$

Aus $\alpha_1 \alpha_2 < \alpha_1$ folgt $\mu_1 < \lambda_3$, $\mu_2 < \lambda_1$ bei obiger Voraussetzung über E. $K = K'$ folgt aus (18 o). Trennt E aber A und C, so ist $CB \geqq CA$ wegen $\alpha_3 \alpha_1 \geqq \alpha_3$, also $EB > EA$, also $\alpha_1 \alpha_2 < \alpha_2$. Dann wird in

$$K' = V_{12}^{-1} U_{31} V_{21} I$$

Λ nicht erreicht. $K = P_{12} O_1 K'$. Dies folgt aus (18 l, i).

b) $K = U_{12} V_{31} I$.

Man zeichne $AB \equiv \alpha_1$; $BD \equiv \alpha_3$ mit dem Abzweigungspunkt C von AB; $BF \equiv \alpha_2$ mit dem Abzweigungspunkt E von der bisher gezeichneten Figur. Dann bilde man

$$K' = V_{31} V_{32}^{-1} U_{12} I$$

$$\begin{array}{c|c|c|c}
\alpha_1 \alpha_2 & \alpha_1 \alpha_2 & \alpha_1 \alpha_2 & \alpha_1 \\
\alpha_2 & \alpha_2 & \alpha_2 & \alpha_2 \\
\alpha_1 \alpha_3 & \alpha_2^{-1} \alpha_3 & \alpha_3 & \alpha_3 \\
\hline
\lambda_1 < \Lambda & \mu_2 & \mu_1 & \lambda_3 \leqq \Lambda
\end{array}.$$

Hier ist $\mu_1 < \lambda_3$, weil nach Voraussetzung $\alpha_1 \alpha_2 < \alpha_1$. Trennt E nicht A und C, so ist $BE > \frac{\alpha_2}{2}$ (wegen $\alpha_1 \alpha_2 < \alpha_1$), also auch $\alpha_2^{-1} \alpha_3 < \alpha_3$, also $\mu_2 < \mu_1$. E trenne daher A und C. Wir stellen die Bedingung dafür auf, daß $\mu_2 < \Lambda$ ist. Es ist

$$\Lambda = \lambda_3 + AC - CB,$$
$$\mu_2 = \lambda_3 + (EF - EB) + (CF - CB),$$

daher $\mu_2 < \Lambda$ solange $AC - EF + EB - CF > 0$,

$$\alpha_1 - 2\,EF > 0,$$

und da $EF < EB$, wegen $\alpha_1 \alpha_2 < \alpha_1$, ist dies erfüllt, solange

$$\alpha_1 - 2\,EB \geqq 0,$$

d. h. $AE \geqq EB$. Es ist daher nur noch $AE < EB$ anzunehmen. Dann ist $\alpha_1 \alpha_2 < \alpha_2$. Dann genügt $K'' = V_{12}^{-1} V_{31} V_{21} I$. — $K = K'$ folgt aus (18 q), $K = P_{12} O_1 K''$ aus (18 l, i).

IV. $K = U_{12} W_{13} I$.

a) $K = U_{12} U_{13} I$.

$$\begin{array}{c|c|c}
\alpha_1\alpha_3\alpha_2 & \alpha_1\alpha_3 & \alpha_1 \\
\alpha_2 & \alpha_2 & \alpha_2 \\
\alpha_3 & \alpha_3 & \alpha_3 \\
\hline
\lambda_1 < \Lambda & \Lambda & \lambda_3 \leqq \Lambda
\end{array}.$$

Man zeichne $AB \equiv \alpha_3$ und $AD \equiv \alpha_1^{-1}$ mit dem Abzweigungspunkt C, endlich $BF \equiv \alpha_2$ mit dem Abzweigungspunkt E. Falls E nicht C und D trennt, bilde man

$$K' = U_{32}^{-1} U_{12} U_{32} I$$

$$\begin{array}{c|c|c|c}
\alpha_1\alpha_3\alpha_2 & \alpha_1\alpha_3\alpha_2 & \alpha_1 & \alpha_1 \\
\alpha_2 & \alpha_2 & \alpha_2 & \alpha_2 \\
\alpha_3 & \alpha_3\alpha_2 & \alpha_3\alpha_2 & \alpha_3 \\
\hline
\lambda_1 < \Lambda & \mu_2 & \mu_1 & \lambda_3 \leqq \Lambda
\end{array}.$$

Aus $\alpha_1\alpha_3\alpha_2 < \alpha_1\alpha_3$ folgt $BE > \frac{\alpha_2}{2}$, also $\alpha_3\alpha_2 < \alpha_3$, also $\mu_1 < \lambda_3$, $\mu_2 < \lambda_1$. $K = K'$ folgt aus (18 o). Bleibt der Fall, daß C und D von E getrennt werden. Ist $CF < CB$, so genügt K' noch. Also sei $CF \geqq CB$. Wegen $\alpha_1\alpha_3 \geqq \alpha_1$ ist $CB \geqq CA$. Falls $CB > CA$, genügt $K'' = V_{23}^{-1} U_{12} V_{23} I$ wegen $\alpha_3\alpha_2 < \alpha_2$. $K = K''$ folgt aus (18 p). Falls $CB = CA$, also $\lambda_3 = \Lambda$, können wir noch den Fall erledigen, daß $\alpha_1 < \alpha_2$. Wir haben dann die Voraussetzung $CD < CA = CB \leqq CF$, also $\alpha_1 < \alpha_3 \leqq \alpha_2$. Es sei

$$K''' = V_{32}^{-1} V_{13}^{-1} V_{23} V_{31} I$$

$$\begin{array}{c|c|c|c|c}
\alpha_3^{-1} & \alpha_3^{-1} & \alpha_1 & \alpha_1 & \alpha_1 \\
\alpha_1\alpha_3\alpha_2 & \alpha_1\alpha_3\alpha_2 & \alpha_1\alpha_3\alpha_2 & \alpha_2 & \alpha_2 \\
\alpha_2^{-1} & \alpha_1\alpha_3 & \alpha_1\alpha_3 & \alpha_1\alpha_3 & \alpha_3 \\
\hline
\lambda_1 < \Lambda & \mu_3 & \mu_2 & \mu_1 & \lambda_3 = \Lambda
\end{array}.$$

Hier ist $\mu_1 < \Lambda$, $\mu_2 < \lambda_1$ wegen $\alpha_1\alpha_3 < \alpha_3$ und $\alpha_1 < \alpha_2$, $\mu_3 < \lambda_1$ wegen $\alpha_1\alpha_3 < \alpha_3 \leqq \alpha_2$. Es ist $K = P_{23} P_{12} O_1 O_3 K'''$, und dies folgt, indem nach (18 l, i):

$$\begin{aligned}
&P_{23} P_{12} O_1 O_3 V_{32}^{-1} V_{13}^{-1} V_{23} V_{31} U_{13}^{-1} U_{12}^{-1} \\
&= P_{23} P_{12} O_1 O_3 (V_{32}^{-1} V_{23})(V_{13}^{-1} V_{31} U_{13}^{-1}) U_{12}^{-1} \\
&= P_{23} P_{12} O_1 O_3 (P_{23} O_2 U_{32})(P_{13} O_3) U_{12}^{-1} = 1 \text{ nach (18 c, e).}
\end{aligned}$$

Hiermit ist Fall IV a) erledigt bis auf den folgenden

$$\boxed{\textbf{Restfall: } CA = CB \begin{cases} \leq CD \\ \leq CF \end{cases}}.$$

Für die Weiterbehandlung dieses Restfalles, in dem also $\lambda_3 = \Lambda$ ist und α_3 zu gleichen Teilen zwischen α_1 und α_2 ausgelöscht wird und diese mindestens die gleiche Länge haben wie α_3, ist der vorderste Faktor des Teilkerns I in Betracht zu ziehen. Es wird hierfür auf den nächsten Paragraphen verwiesen.

b) $U_{12} V_{13} I$.

Man zeichne $AB \equiv \alpha_1$, $AD \equiv \alpha_3^{-1}$ mit dem Abzweigungspunkt C und dann $BF \equiv \alpha_2$ mit dem Abzweigungspunkt E. Trennt E nicht C und D, so genügt $K' = V_{13} U_{12} I$. $K = K'$ folgt aus (18 n). E möge also C und D trennen. K' genügt noch, solange $\alpha_1 \alpha_2 < \alpha_3 \alpha_1$, d. h. solange $AF < DB$. Wir nehmen also $AF \geq DB$ an.

Es sei $CB > CA$. Dann ist $CD < CF$, also $\alpha_3 \alpha_1 < \alpha_2$. Und da $CD \geq CA$, wegen $\alpha_3 \alpha_1 \geq \alpha_1$, so ist $CF > CA$, also $\alpha_2 > \alpha_1$. Dann genügt $K'' = V_{12}^{-1} V_{13} V_{23} V_{21} I$. Es ist $K = P_{12} O_1 K''$. Nach (18 r) ist

$$P_{12} O_1 V_{12}^{-1} (V_{13} V_{23} V_{21} V_{13}^{-1}) U_{12}^{-1} = P_{12} O_1 V_{12}^{-1} V_{21} U_{12}^{-1},$$

und dies ist 1 wegen (18 i).

Es sei $CB < CA$. Wegen $\alpha_3 \alpha_1 \geq \alpha_1$, also $CD \geq CA$, ist dann $\alpha_3 > \alpha_1$. Man bilde

$$K''' = U_{13}^{-1} U_{12} U_{32} U_{31} I$$

α_3^{-1}	$\alpha_1 \alpha_2$	α_1	α_1	α_1
α_2	α_2	α_2	α_2	α_2
$\alpha_3 \alpha_1 \alpha_2$	$\alpha_3 \alpha_1 \alpha_2$	$\alpha_3 \alpha_1 \alpha_2$	$\alpha_3 \alpha_1$	α_3
$\lambda_1 < \Lambda$	μ_3	μ_2	μ_1	$\lambda_3 \leq \Lambda$

Hier ist $\mu_1 < \lambda_3$, $\mu_2 < \lambda_1$; ferner $\mu_3 \leq \lambda_1$, wenn $\alpha_1 \alpha_2 \leq \alpha_3$, und das ist der Fall, wenn $EF \leq ED$. Für $EF > ED$ verwenden wir

$$K'''' = U_{23} U_{12} U_{23}^{-1} U_{32} U_{31} I$$

α_3^{-1}	α_3^{-1}	α_1	α_1	α_1	α_1
α_2	$\alpha_1^{-1} \alpha_3^{-1}$	$\alpha_1^{-1} \alpha_3^{-1}$	α_2	α_2	α_2
$\alpha_3 \alpha_1 \alpha_2$	$\alpha_3 \alpha_1 \alpha_2$	$\alpha_3 \alpha_1 \alpha_2$	$\alpha_3 \alpha_1 \alpha_2$	$\alpha_3 \alpha_1$	α_3
$\lambda_1 < \Lambda$	$\mu_4^{(1)}$	$\mu_3^{(1)}$	μ_2	μ_1	$\lambda_3 \leq \Lambda$

wo noch $\mu_3^{(1)}$ und $\mu_4^{(1)}$ zu untersuchen sind. Es ist $\mu_3^{(1)} < \mu_4^{(1)}$, wegen $\alpha_3 > \alpha_1$,

und $\mu_4^{(1)} < \lambda_1$, wegen $ED < EF$, also $\alpha_3\alpha_1 < \alpha_2$. $K'''' = K'''$ folgt aus (18o). $K = P_{13}O_1K'''$. Dies folgt so:

$$\begin{aligned} & P_{13}O_1U_{13}^{-1}U_{12}U_{32}\cdot U_{31}V_{13}^{-1}\cdot U_{12}^{-1} \\ &= P_{13}O_1U_{13}^{-1}U_{12}U_{32}\cdot O_1P_{13}V_{31}^{-1}\cdot U_{12}^{-1} \quad \text{(nach 18i)} \\ &= V_{31}V_{33}^{-1}U_{12}V_{31}^{-1}U_{12}^{-1} \quad \text{(nach 18e, g, c, b)} \\ &= 1 \quad \text{nach (18q).} \end{aligned}$$

Es bleibt noch der Fall $CB = CA$. Ist $CD > AC$, dann ist $\lambda_3 < \Lambda$, $\alpha_1 < \alpha_3 \leqq \alpha_2$, denn $ED \leqq EF$ wegen $AF \geqq DB$; ferner $\alpha_3\alpha_1 \leqq \alpha_2$ und $\alpha_1\alpha_3 = \alpha_2$. Dann genügt der obige Kern K''. — Wegen $\alpha_3\alpha_1 \geqq \alpha_1$, also $CD \geqq AC$, haben wir daher nur noch den

Restfall: $\boxed{CA = CB = CD \leqq CF}$

mit $\lambda_3 = \Lambda$, $\alpha_1 = \alpha_3 \leqq \alpha_2$.

V. $K = U_{12}W_{23}I$.

a) $K = U_{12}U_{23}I$.

Man zeichne $AB \equiv \alpha_2$, $AD \equiv \alpha_1^{-1}$ mit Abzweigungspunkt C und $BF \equiv \alpha_3$ mit Abzweigungspunkt E. Der Kern $K' = U_{23}U_{13}U_{12}I$ genügt, falls E nicht C und D trennt. Also möge E die Punkte C und D trennen. Dann genügt K' auch noch, falls $CA > CB$, ferner noch falls $CA = CB$ und gleichzeitig $\alpha_3 > \alpha_2$. Falls $CA < CB$ ist, genügt $K'' = V_{23}^{-1}U_{13}V_{32}I$ wegen $\alpha_3 \leqq \alpha_2\alpha_3 < \alpha_3$. Bleibt der Fall $CA = CB = CF$. Ist hierbei $CD < CA$, so genügt $K''' = V_{12}^{-1}U_{23}V_{21}I$.

Restfall: $\boxed{CA = CB = CF \leqq CD}$.

Es ist $K = K'$, und dies folgt aus (18o); $K = P_{23}O_2K''$, und dies folgt aus (18l, i, d, e); $K = P_{12}O_1K'''$, und dies folgt aus (18n, i).

b) $K = U_{12}V_{23}I$.

Man zeichne $AB \equiv \alpha_3$, $AD \equiv \alpha_1^{-1}$ mit dem Abzweigungspunkt C und $BF \equiv \alpha_2$ mit dem Abzweigungspunkt E. Für jede Lage von E ist $EA \geqq EB$ wegen $\alpha_3\alpha_2 \geqq \alpha_2$. Werden A und C durch E getrennt, so genügt $K' = V_{23}U_{12}U_{13}$. Denn $CA > EA \geqq EB > CB$, also $\alpha_1\alpha_3 < \alpha_1$. K' genügt auch für $E = C$, falls $EA > EB$. Ist $E = C$ und $EA = EB$, so ist $EF < EA = EB$ wegen $\alpha_1\alpha_3\alpha_2 < \alpha_1$; also ist $\alpha_3\alpha_2 < \alpha_3$ und $\alpha_2 < \alpha_3$. Dann genügt $K'' = U_{23}^{-1}U_{13}U_{32}I$. E trenne sodann C und B. Wegen $\alpha_1\alpha_3\alpha_2 < \alpha_1$ ist $CF < CA$, also ist entweder $CB < CA$, und dann genügt K', oder $EF < EB$, und dann genügt K''. E trenne endlich C und D. Dann ist $CA \geqq CB$ wegen $\alpha_3\alpha_2 \geqq \alpha_2$. Für $CA > CB$ genügt K'. Für $CA = CB$ und gleichzeitig $\alpha_2 < \alpha_3$ genügt K''. Für

$CA = CB \leqq CF$ können wir noch den Fall $\alpha_1 < \alpha_3$ erledigen. Ist nämlich $CD < CA$, so genügt $K''' = V_{12}^{-1} V_{31}^{-1} V_{23} V_{31} I$.

$$\boxed{\textbf{Restfall: } CA = CB \begin{cases} \leqq CF \\ \leqq CD \end{cases}}.$$

$K = K'$ folgt aus (18 p), $K = P_{23} O_2 K''$ aus (18 l, h, e, d), $K = P_{12} O_1 K'''$ aus (18 r, i).

§ 7.

Beweis des Lemmas. II. Teil.

An dem Beweis des Lemmas fehlt noch die Erledigung der vier Restfälle unter IV a), IV b), V a), V b). Allen gemeinsam ist die Bedingung $\lambda_3 = \Lambda$: Die maximale Diagrammzahl ist „stationär", d. h. die Diagrammzahl hat unmittelbar vor der Hinzufügung des verkleinernden Faktors mindestens zweimal hintereinander denselben Wert. In allen Fällen handelt es sich um ein Produkt aus drei Elementen, in dem der mittlere Faktor zu gleichen Teilen von den beiden andern ausgelöscht wird. In keinem Fall übertrifft die Länge dieses mittleren Faktors die Länge eines der beiden auslöschenden. In den Fällen IV b) und V a) ist die Länge des erstverwendeten auslöschenden Faktors überdies gleich der Länge des ausgelöschten. Diese Eigenschaften ermöglichen es, die drei letzten Fälle durch eine leichte Umformung auf den ersten zurückzuführen und dadurch die folgende Behandlung zu vereinheitlichen:

Im Restfalle unter IV b) setze man

$$U_{12} V_{13} I = P_{23} O_2 O_1 U_{31}^{-1} U_{32} U_{12} U_{13} P_{23} P_{12} O_3 O_2 O_1 I,$$

welche Relation aus (18 a—h, r) folgt. Hier vertausche man $P_{23} P_{12} O_3 O_2 O_1$ mit I. Vom neuen Anfangskern $I^{(1)} = [\alpha_2^{-1}, \alpha_3^{-1}, \alpha_1^{-1}, \alpha_4, \ldots, \alpha_n]$ ausgehend, hat man diese Isomorphismenfolge mit den beigefügten Längenzahlen:

$\alpha_2^{-1} \alpha_1^{-1} \alpha_3^{-1}$	$\alpha_2^{-1} \alpha_1^{-1} \alpha_3^{-1}$	$\alpha_2^{-1} \alpha_1^{-1} \alpha_3^{-1}$	$\alpha_2^{-1} \alpha_1^{-1}$	α_2^{-1}
α_3^{-1}	α_3^{-1}	α_3^{-1}	α_3^{-1}	α_3^{-1}
α_2	$\alpha_1^{-1} \alpha_3^{-1}$	α_1^{-1}	α_1^{-1}	α_1^{-1}
λ_1	μ_2	μ_1	Λ	Λ

mit $\mu_1 \leqq \lambda_1$, wegen $\alpha_1 \leqq \alpha_2$, und $\mu_2 = \mu_1$, wegen $\alpha_2 \alpha_1 = \alpha_1$. Der Teilkern $U_{12} U_{13} I^{(1)}$ entspricht jetzt genau dem Restfall unter IV a), und auf diesen können wir uns beschränken, da die beiden vorderen Faktoren U_{32} und U_{31}^{-1} für die Herabdrückung von Λ nicht in Betracht kommen. — Ähnlich setze man im Restfall unter V a):

$$U_{12} U_{23} I = U_{23} U_{13} U_{12} I = P_{23} U_{32} U_{12} U_{13} P_{23} I$$

nach (18o) und (18b, d), und im Restfall unter Vb)

$$U_{12} V_{23} I = V_{23} U_{12} U_{13} I$$

nach (18p). — Den Restfall unter IVa) kann man noch durch die Bedingung $\alpha_2 \leqq \alpha_1$ einschränken. Ist nämlich $\alpha_2 > \alpha_1$, so vertausche man die Rollen von α_2 und α_1 mittels der Gleichung

$$U_{12} U_{12} I = O_2 O_1 V_{23} U_{21}^{-1} U_{12} U_{13} P_{12} O_3 O_2 O_1 I,$$

(die aus (18e—g, i, p) folgt), und schaffe in dieser $P_{12} O_3 O_2 O_1$ rechts von I.

Wir haben also den Restfall unter IVa) (mit der noch hinzugefügten Bedingung $\alpha_2 \leqq \alpha_1$) zu behandeln. Eine direkte Untersuchung des Restfalles würde wiederum auf Restfälle höherer Art führen, bei denen die maximale Diagrammzahl Λ bei mindestens zwei Schritten stationär bliebe. Wir fassen daher gleich unsern Restfall IVa) als Spezialfall eines allgemeineren Falles auf, bei dem Λ in einer ganzen Anzahl von Schritten stationär ist, und nehmen dazu folgende Form des Kernes an, die wir als unverkürzbar voraussetzen:

$$K = U_{12} U_{1r_\nu}^{\varepsilon_\nu} U_{1r_{\nu-1}}^{\varepsilon_{\nu-1}} \ldots U_{1r_2}^{\varepsilon_2} U_{1r_1}^{\varepsilon_1} W_{xy}^{\pm 1} I.$$

Die r_i sind irgendwelche, nicht notwendig verschiedene, unter den Indizes 3, 4, ..., n, *die* $\varepsilon_i = \pm 1$. *Die Diagrammzahlen sind:*

$$L(I) = \lambda_0$$
$$L(W_{xy}^{\pm 1} I) = L(U_{1r_1}^{\varepsilon_1} W_{xy}^{\pm 1} I) = \ldots = L(U_{1r_\nu}^{\varepsilon_\nu} \ldots U_{1r_1}^{\varepsilon_1} W_{xy}^{\pm 1} I) = \Lambda \geqq \lambda_0$$
$$L(K) = \lambda_1 < \Lambda.$$

Es wird bezeichnet:

$$I = [\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n]$$
$$W_{xy}^{\pm 1} I = [\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n],$$

und es gilt die Bedingung:

$$\beta_i \leqq \beta_2 \leqq \beta_1 \qquad (i = r_1, r_2, \ldots, r_\nu).$$

Ein Kern von dieser Gestalt sei „bezüglich des Teilkerns $U_{12} U_{1r_\nu}^{\varepsilon_\nu} \ldots U_{1r_1}^{\varepsilon_1}$ *normal-ν*-fach stationär" genannt.

Um die Bildung von K zu veranschaulichen und uns im folgenden kurz ausdrücken zu können, stellen wir wie früher das erste Element von K im Gruppenbild dar, von den β ausgehend. Es sei $AB_0 \equiv \beta_1$ und M_1 die Mitte von AB_0, also ein Netzpunkt, falls $L(\beta_1)$ gerade, und die Mitte einer Erzeugendenstrecke, falls $L(\beta_1)$ ungerade ist. Weiter sei $B_0 B_1 \equiv \beta_{r_1}^{\varepsilon_1}$; der Abzweigungspunkt C_1 von $B_0 A$ liegt auf $B_0 M_1$ und ist die Mitte von

$B_0 B_1$ ($L(\beta_{r_l})$ ist gerade). Weiter werde $B_1 B_2 \equiv \beta_{r_2}^{\varepsilon_2}$ mit der Mitte C_2 beschrieben; D_2 sei dabei der Abzweigungspunkt von der bisher gezeichneten Figur. Ist $\beta_{r_2} < \beta_{r_1}$, so trennt $D_2 = C_2$ die Punkte C_1 und B_1; ist $\beta_{r_2} > \beta_{r_1}$, so liegt $D_2 = C_2$ auf $C_1 M_1$, und zwar nicht in C_1; ist $\beta_{r_2} = \beta_{r_1}$, so ist $C_2 = C_1$, und entweder ist $D_2 = C_2 = C_1$, oder D_2 trennt C_1 und B_0. Weiter zeichne man $B_2 B_3 \equiv \beta_{r_3}^{\varepsilon_3}$ mit der Mitte C_3 und dem Abzweigungspunkt D_3 von der bisher gezeichneten Figur, usw. Die so gewonnenen Punkte $B_0, B_1, \ldots, B_\nu$ sind alle verschieden; wäre nämlich $B_h = B_l$, $(l > h)$, so wäre $\beta_{r_{h+1}}^{\varepsilon_{h+1}} \beta_{r_{h+2}}^{\varepsilon_{h+2}} \ldots \beta_{r_l}^{\varepsilon_l} = 1$ eine Relation, die *identisch* in den β erfüllt sein müßte, und der daher, entgegen der Voraussetzung, eine Verkürzbarkeit von K entspräche. Ferner ist $A B_i = A B_0$ wegen $\beta_1 \beta_{r_1}^{\varepsilon_1} \ldots \beta_{r_i}^{\varepsilon_i} = \beta_1$. Jedes B_i wird ferner wegen $\beta_{r_i} \leqq \beta_1$ von A durch M_1 getrennt. Also ist auch M_1 von allen B_i gleichweit entfernt. Mit C^* sei derjenige unter den auf $A B_0$ gelegenen C-Punkten bezeichnet, der am nächsten an A liegt; C^* liegt auf $B_0 M_1$, und kann speziell auch in M_1 liegen; C^* ist die Mitte des (oder der) β_i mit größter Länge und $C^* = M_1$, wenn diese Länge $= L(\beta_1)$ ist. Auch C^* ist von allen B_i gleich weit entfernt und trennt jedes B_i von A. Endlich werde $B_\nu F \equiv \beta_2$ mit der Mitte M_2 und dem Abzweigungspunkt E von der bisherigen Figur gezeichnet. Wegen $\beta_2 \geqq \beta_{r_i}$ ist $B_\nu M_2 \geqq B_\nu C^*$.

Wegen $\beta_1 \beta_{r_1}^{\varepsilon_1} \ldots \beta_{r_\nu}^{\varepsilon_\nu} \beta_2 < \beta_1 \beta_{r_1}^{\varepsilon_1} \ldots \beta_{r_\nu}^{\varepsilon_\nu}$ hat $B_\nu F$ mit $B_\nu A$ *mehr* als $B_\nu M_2$ gemein. Also liegt C^* auf $B_\nu M_2$, und speziell ist $C^* = M_2$, falls ein $\beta_{r_i} = \beta_2$. Ferner trennt E die Punkte M_2 und A. Wegen $\beta_1 \geqq \beta_2$ ist $B_0 M_1 \geqq B_\nu M_2 = B_0 M_2$, also liegt M_1 auf $A M_2$.

In Fig. 8 ist ein Beispiel eines solchen Ausdrucks $\beta_1 \beta_{r_1}^{\varepsilon_1} \ldots \beta_{r_\nu}^{\varepsilon_\nu} \beta_2$ für $\nu = 8$ gezeichnet. Dabei ist $C_3 \neq D_3$, sonst immer $C_i = D_i$ gewählt. Ferner ist $\beta_{r_i} < \beta_2 < \beta_1$ gewählt, daher $B_0 C^* < B_8 M_2 < B_0 M_1$.

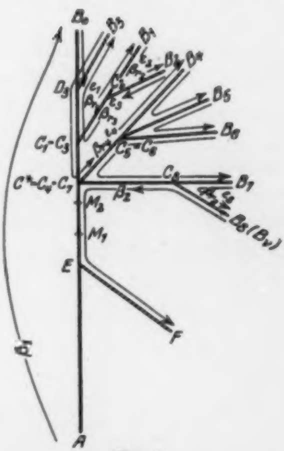

Fig. 8.

Wir werden nun den Faktor $W_{zy}^{\pm 1}$ in die Untersuchung einbeziehen und folgende zwei Sätze nachweisen.

Satz A. *Ist $\Lambda > \lambda_0$, wirkt also der Faktor $W_{zy}^{\pm 1}$ in K vergrößernd auf die Diagrammzahl, so läßt sich für den Teilkern $K_1 = U_{12} U_{1r_\nu}^{\varepsilon_\nu} \ldots U_{1r_1}^{\varepsilon_1} W_{zy}^{\pm 1}$ von K eine solche aus S folgende Umformung $K_1 = \Omega \cdot K_1'$ finden, daß Λ in $K_1' 1$ mindestens einmal*

weniger als in $K_1 I$ und, wenn überhaupt mehrfach, dann wieder normal-stationär vorkommt.

Aus diesem Satze folgt, daß Λ, im Falle $\Lambda > \lambda_0$, durch fortgesetzte Anwendung solcher Umformungen ganz aus dem Diagramm fortgeschafft werden kann.

Satz B. *Ist $\Lambda = \lambda_0$, so läßt sich für den Teilkern K_1 eine solche aus S folgende Umformung $K_1 = \Omega \cdot K_1'$ finden, daß entweder der Teilkern K_1' von $K_1' I$ die Diagrammzahl Λ gar nicht hervorruft, oder Λ bezüglich eines Endbestandteils dieses Teilkerns normal-stationär vorkommt.*

Im letzteren Fall zieht man den vordersten Faktor von I in die Untersuchung hinein und setzt das Verfahren fort. Da die Zahlen im Diagramm $\Delta(I)$ einmal abnehmen müssen, tritt notwendig einmal die Bedingung $\Lambda > \lambda_0$ des Satzes A auf, und damit die Möglichkeit, Λ ganz herauszuschaffen. Mit dem im folgenden gemeinsam geführten Beweis der Sätze A und B wird daher der Beweis des Lemmas abgeschlossen sein. Der Nachweis, daß die benutzten Umformungen aus den Relationen (18) folgen, bietet nirgends wesentliche Schwierigkeiten und wird daher von nun an dem Leser überlassen.

Für die Indizes x und y werden wir nun, analog wie im vorigen Paragraphen, eine Reihe von Fallunterscheidungen gesondert zu betrachten haben.

$$\text{I.}\quad x \neq 1, 2, r_1, \ldots, r_\nu; \quad y \neq 1.$$

$$K' = W_{xy}^{+1} U_{12} U_{1 r_\nu}^{\varepsilon_\nu} \ldots U_{1 r_1}^{\varepsilon_1} I$$

genügt in den Sätzen A und B; denn jeder Faktor ändert in dieser neuen Stellung die Diagrammzahl um denselben Betrag wie in der alten Stellung. Ist also $\Lambda > \lambda_0$, so tritt Λ in K' überhaupt nicht auf, Satz A ist also erfüllt; ist $\Lambda = \lambda_0$, so tritt Λ in K' einmal weniger auf als in K, und der Teilkern $U_{12} \ldots I$ von K' ist bezüglich $U_{12} \ldots U_{1 r_1}^{\varepsilon_1}$ normal stationär; Satz B ist also erfüllt. (Es kann in diesem letzten Fall jetzt der vorderste Faktor von I in die Untersuchung hineingezogen werden, und man hat dabei die gleichen Voraussetzungen wie für K.)

$$\text{II.}\quad x \neq 1, 2, r_1, \ldots, r_\nu; \quad y = 1.$$

a) $K = U_{12} U_{1 r_\nu}^{\varepsilon_\nu} \ldots U_{1 r_1}^{\varepsilon_1} U_{x1} I$. — Es ist also $\beta_t \equiv \alpha_t$ für $t \neq x$ und $\beta_x \equiv \alpha_x \alpha_1$.

$$K' = U_{x r_1}^{-\varepsilon_1} \ldots U_{x r_\nu}^{-\varepsilon_\nu} U_{x2}^{-1} U_{x1} U_{12} U_{1 r_\nu}^{\varepsilon_\nu} \ldots U_{1 r_1}^{\varepsilon_1} I$$

genügt in den Sätzen A und B.

Beweis. $L(U_{12}U_{1r_\nu}^{\varepsilon_\nu}\ldots U_{1r_1}^{\varepsilon_1}I) < L(I) \leqq \Lambda$. Um den Einfluß des Faktors U_{x1} auf $\Delta(K')$ zu ermitteln, zeichne man (Fig. 8) $AH \equiv \alpha_x^{-1}$ mit dem Abzweigungspunkt G von der bereits vorliegenden Figur. Wir wollen zeigen, daß U_{x1} in seiner neuen Stellung nicht mehr vergrößert als in der alten, daß also gilt: $\alpha_x\alpha_1\alpha_{r_1}^{\varepsilon_1}\ldots\alpha_{r_\nu}^{\varepsilon_\nu}\alpha_2 \leqq \alpha_x\alpha_1$, also $HF \leqq HB_0$, oder was dasselbe sagt: $GF \leqq GB_0$. Liegt G auf AF, so folgt dies aus $EF < EB_0$. Liegt G auf EB_0, so muß es auf EM_1 liegen, da $GB_0 \geqq GA$ wegen $\alpha_x\alpha_1 \geqq \alpha_x$. Dann ist $GF \leqq GA \leqq GB_0$. Aus demselben Grunde folgt allgemeiner, daß AH von AB_0 nur auf AM_1 abzweigen kann. Andere mögliche Lagen für G erhält man daher nur, indem $C^* = M_2 = M_1$ und G von A sowohl wie von B_0 durch C^* getrennt wird. Dann ist $GF = GB_0$. Also ist in allen Fällen $L(U_{x1}\ldots I) < \Lambda$. Durch die weiteren Faktoren kann Λ dann ebenfalls nicht erreicht werden, da G in allen Fällen den Punkten $B_\nu, \ldots, B_1$ mindestens ebenso nahe liegt wie dem Punkte B_0.

b) $K = U_{12}U_{1r_\nu}^{\varepsilon_\nu}\ldots U_{1r_1}^{\varepsilon_1}V_{x1}I$. — $\beta_x \equiv \alpha_1\alpha_x$, sonst $\beta_i \equiv \alpha_i$.

$$K' = V_{x1}V_{x2}^{-1}V_{xr_\nu}^{-\varepsilon_\nu}\ldots V_{xr_1}^{-\varepsilon_1}U_{12}U_{1r_\nu}^{\varepsilon_\nu}\ldots U_{1r_1}^{\varepsilon_1}I$$

genügt in den Sätzen A und B.

Beweis ganz ähnlich wie unter a): $L(U_{12}\ldots U_{1r_1}^{\varepsilon_1}I) < L(I) \leqq \Lambda$. Man zeichne $B_0H \equiv \alpha_x$ mit Abzweigungspunkt G. Liegt G auf dem von $M_1A + EF$ verschiedenen Teil der Figur, ist $B_iG < AG$ und $FG \leqq AG$; liegt G auf M_1F, ist $B_iG = B_0G$ und $FG \leqq AG$; liegt G auf EA, ist $B_iG = B_0G$, $FG < B_0G$. Unter Rücksicht auf $\alpha_1\alpha_x \geqq \alpha_x$, also $AG \geqq B_0G$, folgt in allen Fällen, daß keiner der nach U_{12} hinzugefügten Faktoren Λ in $\Delta(K')$ hervorrufen kann.

Die Fälle U_{x1}^{-1} und V_{x1}^{-1} werden durch Transformation mit O_x auf diese zurückgeführt. — Wir haben also weiterhin für x nur Werte aus der Reihe $1, 2, r_1, \ldots, r_\nu$ zu nehmen.

III. $x = 1$; $y \neq 2$.

Ist $\Lambda > \lambda_0$, so wähle man

$$K' = V_{2r_\nu}^{-\varepsilon_\nu}\ldots V_{2r_1}^{-\varepsilon_1}\cdot U_{12}W_{1y}^{\pm 1}\cdot V_{2r_1}^{\varepsilon_1}\ldots V_{2r_\nu}^{\varepsilon_\nu}I;$$

denn Λ tritt in $\Delta(K')$ nur einmal auf, nämlich bei Ausübung von $W_{1y}^{\pm 1}$. Wir nehmen daher $\Lambda = \lambda_0$ an.

a) $W_{1y}^{\pm 1} = U_{1y}$. Der Fall U_{1y}^{-1} wird durch Transformation mit O_y hierauf zurückgeführt, wobei evtl. einige der ε_i das Zeichen wechseln können.

Ist $\alpha_y \leqq \alpha_2$, so ist K selbst schon normal $(\nu+1)$-fach stationär bezüglich $U_{12} U_{1r_\nu}^{\varepsilon_\nu} \ldots U_{1r_1}^{\varepsilon_1} U_{1y}$. Ist $\alpha_y > \alpha_2$, so ist $y \neq r_i$; dann bilde man

$$K'' = U_{yr_1}^{-\varepsilon_1} \ldots U_{yr_\nu}^{-\varepsilon_\nu} U_{y2}^{-1} \cdot U_{1y} \cdot U_{y2} U_{yr_\nu}^{\varepsilon_\nu} \ldots U_{yr_1}^{\varepsilon_1} I,$$

wo bereits der Faktor U_{y2} die Diagrammzahl endgültig unter den Wert Λ bringt und K'' bezüglich $U_{y2} U_{yr_\nu}^{\varepsilon_\nu} \ldots U_{yr_1}^{\varepsilon_1}$ normal-stationär ist.

b) $W_{1y}^{\pm 1} = V_{1y}$. Man zeichne $AH \equiv \alpha_y$ mit dem Abzweigungspunkt G in Fig. 8. Liegt M_2 nicht auf AG, so wähle man

$$K' = V_{1y} U_{12} U_{1r_\nu}^{\varepsilon_\nu} \ldots U_{1r_1}^{\varepsilon_1} I,$$

denn K' ist normal-stationär bezüglich $U_{12} U_{1r_\nu}^{\varepsilon_\nu} \ldots U_{1r_1}^{\varepsilon_1}$. Enthält der Teil von AG, der auf AB_0 liegt, M_1 als inneren Punkt, so ist $\alpha_y \alpha_1 < \alpha_y$ und $y \neq r_i$. Dann nimmt man

$$K'' = U_{1y}^{-1} U_{12} U_{1r_\nu}^{\varepsilon_\nu} \ldots U_{1r_1}^{\varepsilon_1} \cdot U_{y2} U_{yr_\nu}^{\varepsilon_\nu} \ldots U_{yr_1}^{\varepsilon_1} U_{y1} I.$$

Denn hier ist schon $L(U_{y1} I) < L(I) = \Lambda$, und da $HB_i < HA$ und $HF \leqq HA$, wird Λ überhaupt nicht erreicht in $\Delta(K'')$ außerhalb $\Delta(I)$. Wegen $AM_2 \geqq AM_1$ tritt dieser Fall immer dann ein, wenn der Teil von AG, der auf AB_0 liegt, M_2 als inneren Punkt enthält. Es bleiben daher nur noch die beiden Möglichkeiten: 1. $G = M_1 = M_2$ und 2. $M_1 = M_2 = C^*$ und G auf dem Teil der Figur liegend, der von A und B_0 durch C^* getrennt wird. In beiden Fällen ist K'' bezüglich $U_{y2} U_{yr_\nu}^{\varepsilon_\nu} \ldots U_{yr_1}^{\varepsilon_1} U_{y1}$ normal $(\nu+1)$-fach stationär, und die übrigen Faktoren rufen Λ nicht mehr hervor.

IV. $x = 1$; $y = 2$.

Der Fall $W_{xy}^{\pm 1} = U_{12}^{\pm 1}$ ist auszuschließen; denn wegen $\alpha_1 \alpha_2^{\pm 1} \geqq \alpha_1$ müßte die Mitte der Erzeugendenfolge $\alpha_2^{\pm 1}$ in dem durch AB_0 dargestellten Ausdruck $\alpha_1 \alpha_2^{\pm 1}$ ein Punkt auf AB_0 sein und dann wegen $C^* B_0 = C^* B_r$ dort mit M_2 zusammenfallen; es ist aber $M_2 B_0 \not\equiv M_2 B_r$ und $M_2 B_0 \not\equiv M_2 F$. Also $W_{xy}^{\pm 1} = V_{12}^{\pm 1}$. Die Mitte M_3 der Erzeugendenfolge $\alpha_2^{\pm 1}$ in $AB_0 \equiv \alpha_2^{\pm 1} \alpha_1$ liegt wiederum auf AB_0, aber nicht in M_2. Wegen $EF \leqq EA$ und $AM_3 = M_3 F$ ist dann $AM_3 < AM_2$. Sei $AH \equiv \alpha_2^{\pm 1}$ mit dem Abzweigungspunkt G. Wird A von M_3 durch G getrennt, so wähle man

$$K' = V_{12}^{\pm 1} U_{12} U_{1r_\nu}^{\varepsilon_\nu} \ldots U_{1r_1}^{\varepsilon_1} I.$$

M_3 liege also auf AG; daraus folgt $\alpha_2^{\pm 1} \alpha_1 > \alpha_1$, also $\Lambda > \lambda_0$. Es ist $GA > GB_i$ wegen $M_2 A > \frac{\alpha_2}{2} = M_2 B_i$; also kann man nehmen

$$K'' = U_{12} V_{12}^{\pm 1} U_{1r_\nu}^{\varepsilon_\nu} \ldots U_{1r_1}^{\varepsilon_1} I.$$

V. $x = 2$; $y \neq 1$.

Der Exponent von W_{2y} kann dann als $+1$ angenommen werden.

Für $\Lambda > \lambda_0$ genügt

$$K' = U_{12} W_{2y} U_{1r_\nu}^{\varepsilon_\nu} \dots U_{1r_1}^{\varepsilon_1} I,$$

also sei $\Lambda = \lambda_0$ vorausgesetzt.

a) $W_{2y} = V_{2y}$. Es sei $B_\nu H \equiv \alpha_y$ mit dem Abzweigungspunkt G. Liegt M_2 auf AG, so ist

$$K'' = V_{2y} U_{12} U_{1y} U_{1r_\nu}^{\varepsilon_\nu} \dots U_{1r_1}^{\varepsilon_1} I$$

normal $(\nu+1)$-fach stationär bezüglich $U_{12} U_{1y} \dots U_{1r_1}^{\varepsilon_1}$. Also liege M_2 nicht auf AG. Dann ist $\alpha_y \alpha_2 < \alpha_y$ und $y \neq r_i$. Dann wähle man

$$K''' = U_{2y}^{-1} U_{1y} U_{1r_\nu}^{\varepsilon_\nu} \dots U_{1r_1}^{\varepsilon_1} U_{y2} I.$$

b) $W_{2y} = U_{2y}$. Es sei $FH \equiv \alpha_y^{-1}$ mit dem Abzweigungspunkt G. Liegt M_2 nicht auf FG, so ist

$$K' = U_{2y} U_{1y} U_{12} U_{1r_\nu}^{\varepsilon_\nu} \dots U_{1r_1}^{\varepsilon_1} I$$

normal ν-fach stationär bezüglich $U_{12} \dots U_{1r_1}^{\varepsilon_1}$, und U_{1y} ruft Λ nicht hervor. Ist $M_2 = G$, so ist K' normal $(\nu+1)$-fach stationär bezüglich $U_{1y} \dots U_{1r_1}^{\varepsilon_1}$. Also trenne M_2 die Punkte F und G. Hat $M_2 G$ mit $M_2 B_\nu$ mehr als den Punkt M_2 gemein, dann ist $\alpha_2 \alpha_y < \alpha_y$ und $y \neq r_i$; dann nehme man

$$K'' = V_{2y}^{-1} U_{1y} U_{1r_\nu}^{\varepsilon_\nu} \dots U_{1r_1}^{\varepsilon_1} V_{y2} I.$$

Hat $M_2 G$ mit $M_2 B_\nu$ nur den Punkt M_2 gemein, so muß $M_2 = C^*$ sein, und G liegt auf dem Teil der Figur, der von A und von B_ν durch C^* getrennt wird. Dann ist K' normal $(\nu+1)$-fach stationär.

VI. $x = 2$; $y = 1$.

a) $W_{xy}^{\pm 1} = V_{21}^{\pm 1}$. — Man zeichne in Fig. 8 $B_\nu H \equiv \alpha_1^{\pm 1}$ mit der Mitte M_3 und dem Abzweigungspunkt G von der bisher vorliegenden Figur. Wegen $\alpha_1^{\pm 1} \alpha_2 \geqq \alpha_2$ liegt M_3 auf $B_\nu F$, und zwar wegen $M_3 B_\nu = \frac{\alpha_1}{2}$, $C^* B_\nu \leqq \frac{\alpha_1}{2}$ auf $C^* F$. Wegen $C^* B_0 \neqq C^* B_\nu$ ist dann der Fall V_{21}^{-1} ausgeschlossen, also ist $W_{xy}^{\pm 1} = V_{21}$. Läge M_3 auf $C^* E$, so wäre $M_3 B_\nu = M_3 B_0 = M_3 A$; das ist ausgeschlossen wegen $M_3 B_\nu \neqq M_3 A$. Also liegt M_3 auf EF, und zwar nicht in E. Also ist $M_3 F < M_3 B_\nu = M_3 H$, also auch $GF < GH$, also $\alpha_1 \alpha_2 < \alpha_1$ und $\alpha_2 < \alpha_1$. Dann bilde man

$$K' = U_{2r_\nu}^{\varepsilon_\nu} \dots U_{2r_1}^{\varepsilon_1} \cdot V_{1r_\nu}^{-\varepsilon_\nu} \dots V_{1r_1}^{-\varepsilon_1} \cdot V_{21}^{-1} \cdot U_{21}^{-1} \cdot V_{1r_1}^{\varepsilon_1} \dots V_{1r_\nu}^{\varepsilon_\nu} U_{12} I$$

$$\begin{array}{c|c}
\alpha_1\alpha_2 & \alpha_1\alpha_2 \\
\alpha_2^{-1}\alpha_1^{-1}\alpha_{r_\nu}^{-\varepsilon_\nu}\ldots\alpha_{r_1}^{-\varepsilon_1}\cdot\alpha_1^{-1} & \alpha_2^{-1}\alpha_1^{-1}\alpha_{r_\nu}^{-\varepsilon_\nu}\ldots\alpha_{r_1}^{-\varepsilon_1}\cdot\alpha_1^{-1}\cdot\alpha_{r_\nu}^{-\varepsilon_\nu}\ldots\alpha_{r_1}^{-\varepsilon_1} \\
\hline
\lambda_1 < \Lambda & \mu_3
\end{array}$$

$$\begin{array}{c|c}
\alpha_{r_1}^{\varepsilon_1}\ldots\alpha_{r_\nu}^{\varepsilon_\nu}\alpha_1\alpha_2 & \alpha_{r_1}^{\varepsilon_1}\ldots\alpha_{r_\nu}^{\varepsilon_\nu}\alpha_1\alpha_2 \\
\alpha_2^{-1}\alpha_1^{-1}\alpha_{r_\nu}^{-\varepsilon_\nu}\ldots\alpha_{r_1}^{-\varepsilon_1}\cdot\alpha_1^{-1}\cdot\alpha_{r_\nu}^{-\varepsilon_\nu}\ldots\alpha_{r_1}^{-\varepsilon_1} & \alpha_1^{-1}\alpha_{r_\nu}^{-\varepsilon_\nu}\ldots\alpha_{r_1}^{-\varepsilon_1} \\
\hline
\mu_4 & \mu_5
\end{array}$$

$$\begin{array}{c|c|c}
\alpha_{r_1}^{\varepsilon_1}\ldots\alpha_{r_\nu}^{\varepsilon_\nu}\alpha_1\alpha_2 & \alpha_1\alpha_2 & \alpha_1 \\
\alpha_2 & \alpha_2 & \alpha_2 \\
\hline
\mu_2 & \mu_1 & \lambda_0 \leqq \Lambda
\end{array},$$

wo $\mu_2=\mu_1<\lambda_0$, $\mu_4=\mu_5=\lambda_1$ ist, und $\mu_3=\Lambda$, denn $\alpha_{r_1}^{\varepsilon_1}\ldots\alpha_{r_\nu}^{\varepsilon_\nu}\alpha_1\alpha_2=\alpha_1\alpha_2\equiv\beta_2$, wegen $B_0F=B_\nu F$, und $\alpha_1^{-1}\alpha_{r_\nu}^{-\varepsilon_\nu}\ldots\alpha_{r_1}^{-\varepsilon_1}=\alpha_1$ wegen $HB_0=HB_\nu$. Λ tritt also in K' nur einmal, nämlich bei Ausübung des Faktors U_{21}^{-1}, auf. — Es ist $K=P_{12}O_2K'$.

b) $W_{xy}^{\pm 1}=U_{21}^{\pm 1}$. — Es sei $FH\equiv\alpha_1^{\mp 1}$ mit der Mitte M_3. Wegen $\alpha_2\alpha_1^{\pm 1}\geqq\alpha_2$ liegt M_3 auf FB_ν, und wegen $FM_3=\frac{\beta_2}{2}\leqq\frac{\alpha_1}{2}=FM_2$ liegt M_3 auf FM_2. Der Fall U_{21} ist dann auszuschließen wegen $M_3F\not\equiv M_2B_0$. Also $W_{xy}^{\pm 1}=U_{21}^{-1}$. Wegen $EF\not\equiv EA$ ist dann $EF<EA$, also $FB_\nu<AB_0$, d. h. $\alpha_1\alpha_2^{-1}<\alpha_1$, also $B_0M_1>B_0C^*$ und $\alpha_1>\alpha_2$.

Ist $\alpha_2\alpha_1^{-1}>\alpha_2$, also $\Lambda>\lambda_0$, so bilde man

$$K'=U_{12}U_{21}^{-1}\cdot U_{2r_\nu}^{\varepsilon_\nu}\ldots U_{2r_1}^{\varepsilon_1}\cdot U_{1r_\nu}^{\varepsilon_\nu}\ldots U_{1r_1}^{\varepsilon_1}I.$$

Hier ist $L(U_{1r_i}^{\varepsilon_i}\ldots U_{1r_1}^{\varepsilon_1}I)=\lambda_0<\Lambda$. Die Faktoren $U_{2r_i}^{\varepsilon_i}$ können zwar unter Umständen die Diagrammzahl vergrößern, aber nicht bis auf den Wert Λ; zeichnet man nämlich $B_0G\equiv\alpha_2^{-1}$, so enthält es nicht M_1 wegen $\alpha_2\alpha_1^{-1}>\alpha_2$, also ist $GB_i<GA$, daher $\alpha_2\alpha_{r_1}^{\varepsilon_1}\ldots\alpha_{r_i}^{\varepsilon_i}<\alpha_2\alpha_1^{-1}$. Also tritt Λ nur einmal, nämlich bei Ausübung von U_{21}^{-1} auf. — Bleibt der Fall $\alpha_2\alpha_1^{-1}=\alpha_2$, also $\Lambda=\lambda_0$. B_0G zweigt von B_0A in M_1+C^* ab. Dann bilde man

$$K''=U_{12}^{-1}V_{21}\cdot U_{2r_\nu}^{\varepsilon_\nu}\ldots U_{2r_1}^{\varepsilon_1}\cdot U_{12}^{-1}\cdot U_{1r_1}^{-\varepsilon_1}\ldots U_{1r_\nu}^{-\varepsilon_\nu}\cdot U_{12}^{-1}I.$$

Hier ist

$$L(U_{1r_i}^{-\varepsilon_i}\ldots U_{12}^{-1}I)=L(U_{12}^{-1}I)<L(I),$$

$$L(U_{12}^{-1}U_{1r_1}^{-\varepsilon_1}\ldots U_{1r_\nu}^{-\varepsilon_\nu}U_{12}^{-1}I)<L(K),$$

wegen $\alpha_2 = \alpha_2 \alpha_1^{-1}$, $GF < AF$, sowohl wenn M_1 auf EA als auch wenn M_1 auf EC^* liegt, wegen $GM_1 < \frac{\alpha_1}{2}$. Ferner $L(U_{2r_i}^{\varepsilon_i} \ldots I) = L(U_{12}^{-1} \ldots I)$ wegen $GB_i = GB_0$, endlich $L(V_{21} \ldots I) < L(K)$, wegen $GF < AF$. — $K = O_1 O_2 K''$.

$$\text{VII.}\quad x = r_{h_1} = r_{h_2} = \ldots = r_{h_s};\ y = 1.$$

Aus $\beta_x \geqq \alpha_x$ folgt, daß mindestens eine Endhälfte der Erzeugenden von α_1 in β_x an einem Ende steht, und aus $\beta_x \leqq \alpha_1$ folgt, daß sie mindestens die Hälfte von β_x ausmacht.

Es sei $\beta_x = \alpha_1$. Dann ist $C^* = M_1$, und dieser Punkt fällt mit den Mitten C_{h_i} $(i = 1 \ldots s)$ zusammen; dabei ist eine der Strecken C^*A oder C^*B_0 mit einer der Strecken $C^*B_{h_i - 1}$ oder $C^*B_{h_i}$ identisch. Das ist nur möglich für $h_i = 1$, also $x = r_1 + r_2, \ldots, r_\nu$. Wir können dann $\varepsilon_1 = +1$ annehmen, da das nötigenfalls durch Transformation mit O_{r_1} erreichbar ist, und haben dann $W_{xy}^{\pm 1} = V_{r_1 1}^{-1}$, $\beta_{r_1} \equiv B_0 B_1$, $\alpha_{r_1} \equiv A B_1$, $C_1 = C^* = M_1$. Dann ist der Kern

$$K' = V_{1r_2}^{\varepsilon_2} \ldots V_{1r_\nu}^{\varepsilon_\nu} V_{12} V_{1r_1}^{-1} U_{r_1 2} U_{r_1 r_\nu}^{\varepsilon_\nu} \ldots U_{r_1 r_2}^{\varepsilon_2} I$$

bezüglich $U_{r_1 2} \ldots U_{r_1 r_2}^{\varepsilon_2}$ normal-stationär und die weiteren Faktoren rufen A nicht hervor, da FB_0, $B_\nu B_0$, $\ldots$, $B_1 B_0 \leqq AB_0$.

Es sei $\beta_x < \alpha_1$.

a) $W_{xy}^{\pm 1} = U_{x1}$. — Es genügt

$$K'' = (V_{x2}^{-1} V_{x1}^{-1})_{T_{2r_1} \ldots T_{2r_\nu}} \cdot V_{1x} I,$$

wo $T_{2r_i} = V_{2r_i}^{\varepsilon_i}$ für $i \neq h_k$ und $T_{2r_i} = V_{21}^{\varepsilon_i}$ für $i = h_k$ gesetzt ist $(k = 1, 2, \ldots, s)$. Hier ist $L(V_{1x} I) < L(I)$, die Faktoren T lassen die Diagrammzahl ungeändert, und nur der Faktor V_{x1}^{-1} ruft A einmal hervor.

b) $W_{xy}^{\pm 1} = V_{x1}$.

$$K''' = (V_{x2}^{-1} U_{x1}^{-1})_{T_{2r_1} \ldots T_{2r_\nu}} \cdot U_{1x} I$$

analog wie unter a) mit der gleichen Bedeutung der T.

c) $W_{xy} = U_{x1}^{-1}$.

$$K'''' = (U_{x2} V_{x1})_{T_{2r_1} \ldots T_{2r_\nu}} \cdot U_{1x}^{-1} I,$$

wo $T_{2r_i} = V_{2r_i}^{\varepsilon_i}$ für $i \neq h_k$ und $T_{2r_i} = V_{21}^{-\varepsilon_i}$ für $i = h_k$ gesetzt ist.

d) $W_{xy}^{\pm 1} = V_{x1}^{-1}$.

$$K''''' = (U_{x2} U_{x1})_{T_{2r_1} \ldots T_{2r_\nu}} \cdot V_{1x}^{-1} I$$

mit gleicher Bedeutung der T wie unter c).

VIII. $x = r_{h_1} = r_{h_2} = \ldots = r_{h_s}$; $y = 2$.

Aus $\beta_x \geqq \alpha_x$ folgt, daß mindestens eine Endhälfte der Erzeugenden von α_2 in β_x an einem Ende steht, und aus $\beta_x \leqq \alpha_2$ folgt, daß sie mindestens die Hälfte von β_x ausmacht.

Es sei $\beta_x = \alpha_2$. Dann ist $C^* = M_2$ und dieser Punkt fällt mit den Mitten C_{h_i} $(i = 1, \ldots, s)$ zusammen; dabei ist eine der Strecken C^*F oder C^*B_ν mit einer der Strecken $C^*B_{h_i-1}$ oder $C^*B_{h_i}$ identisch. Das ist nur möglich für $h_i = \nu$, also $x = r_\nu + r_1, \ldots, r_{\nu-1}$. Wir können dann $\varepsilon_\nu = +1$ annehmen und haben $W_{xy}^{+1} = U_{r_\nu 2}^{-1}, \beta_{r_\nu} \equiv B_{\nu-1}B_\nu, \alpha_{r_\nu} \equiv B_{\nu-1}F, C_\nu = C^* = M_2$. Dann ist der Kern

$$K' = U_{r_\nu 2}^{-1} U_{1 r_\nu} U_{1 r_{\nu-1}}^{\varepsilon_{\nu-1}} \ldots U_{1 r_1}^{\varepsilon_1} I$$

bezüglich $U_{1 r_\nu} U_{1 r_{\nu-1}}^{\varepsilon_{\nu-1}} \ldots U_{1 r_1}^{\varepsilon_1}$ normal stationär.

Es sei $\beta_x < \alpha_2$. Dann nimmt man

$$K'' = Z \cdot Y \cdot T_{1 r_\nu} \ldots T_{1 r_1} \cdot X \cdot I,$$

wo $T_{1 r_i} = U_{1 r_i}^{\varepsilon_i}$ für $i \neq h_k$ und die Bedeutung der übrigen Zeichen je nach der Form von W_{xy}^{+1} aus folgender Tabelle hervorgeht

$W_{xy}^{\pm 1}$	X	$T_{1 r_{h_k}}$	Y	Z
U_{x2}	V_{2x}	$U_{12}^{\varepsilon_{h_k}}$	V_{x2}^{-1}	U_{1x}^{-1}
U_{x2}^{-1}	U_{2x}^{-1}	$U_{12}^{-\varepsilon_{h_k}}$	V_{x2}	U_{1x}
V_{x2}	U_{2x}	$U_{12}^{\varepsilon_{h_k}}$	U_{x2}^{-1}	U_{1x}^{-1}
V_{x2}^{-1}	V_{2x}^{-1}	$U_{12}^{-\varepsilon_{h_k}}$	U_{x2}	U_{1x}

Hier ist in allen Fällen $L(XI) < L(I)$, wegen $\beta_x < \alpha_2$, die Faktoren T lassen die Diagrammzahl ungeändert, und der Wert Λ tritt nur einmal, nämlich bei Ausübung von Y auf.

IX. $x = r_{h_1} = r_{h_2} = \ldots = r_{h_s}$; $y \neq 1, 2$.

Wir können $W_{xy}^{+1} = U_{xy}$ annehmen, da wir dies nötigenfalls durch Transformation mit O_x oder O_y oder beiden erzielen können (wobei evtl. einige der ε_i das Zeichen wechseln).

a) $\Lambda > \lambda_0$, also $\alpha_x \alpha_y > \alpha_x$.

Ist $x \neq r_1$, so genügt

$$K' = U_{12} U_{1 r_\nu}^{\varepsilon_\nu} \ldots U_{1 r_2}^{\varepsilon_2} U_{xy} U_{1 r_1}^{\varepsilon_1} I$$

dem Satz A; denn Λ kommt einmal weniger vor, und K' ist bezüglich $U_{12} U_{1 r_\nu}^{\varepsilon_\nu} \ldots U_{1 r_2}^{\varepsilon_2}$ normal-stationär.

Also sei $x = r_1$. Ferner sei $\varepsilon_1 = +1$.

Man zeichne $B_0 H \equiv \alpha_{r_1}$. G sei der Punkt, in dem $B_0 H$ von $B_0 B_1$ abzweigt. Liegt G in einem von C_1 verschiedenen Punkt auf $B_0 C_1$ und ist zugleich $GH \leqq GB_0$, oder liegt G auf $C_1 B_1$, in welchem Fall $GH < GB_1$ wegen $\alpha_{r_1}\alpha_y > \alpha_{r_1}$, so setzt man

$$K'' = U_{12} U_{1r_\nu}^{\varepsilon_\nu} \ldots U_{1r_2}^{\varepsilon_2} U_{r_1 y} U_{1y} U_{1r_1} I.$$

Liegt G auf $B_0 C_1$, und zwar nicht in C_1, und ist gleichzeitig $GH > GB_0$, so ist $\alpha_{r_1}\alpha_y < \alpha_y^{\lambda}$. Dann nehme man

$$\begin{aligned} K''' &= U_{12} U_{1r_\nu}^{\varepsilon_\nu} \ldots U_{1r_2}^{\varepsilon_2} P_{r_1 y} O_{r_1} V_{r_1 y}^{-1} U_{1y} V_{y r_1} I \\ &= U_{12} U_{1r_\nu}^{\varepsilon_\nu} \ldots U_{1r_2}^{\varepsilon_2} U_{y r_1} U_{1r_1} V_{r_1 y}^{-1} P_{r_1 y} O_{r_1} I. \end{aligned}$$

Der Fall $\varepsilon_1 = -1$ erledigt sich völlig analog.

b) $\Lambda = \lambda_0$.

b$_1$) $\alpha_x = \alpha_x \alpha_y < \alpha_y$. — Ist $r_1 \neq x$ und $\neq y$, so bilde man

$$\begin{aligned} K' &= U_{12} U_{1r_\nu}^{\varepsilon_\nu} \ldots U_{1r_2}^{\varepsilon_2} P_{xy} O_x V_{xy}^{-1} U_{1r_1}^{\varepsilon_1} V_{yx} I \\ &= U_{12} U_{1r_\nu}^{\varepsilon_\nu} \ldots U_{1r_2}^{\varepsilon_2} U_{yx} U_{1r_1}^{\varepsilon_1} V_{xy}^{-1} I^{(1)}, \end{aligned}$$

wo $I^{(1)} = P_{xy} O_x I$ gesetzt ist und die Faktoren $P_{xy} O_x$ hierin rechts von I geschafft werden können. Es ist nun

$$L(U_{1r_1}^{\varepsilon_1} V_{xy}^{-1} I^{(1)}) = L(V_{xy}^{-1} I^{(1)}) < L(I^{(1)}) = \Lambda,$$

der Faktor U_{yx} ruft Λ wieder hervor, und Λ ist bezüglich $U_{12} U_{1r_\nu}^{\varepsilon_\nu} \ldots U_{1r_2}^{\varepsilon_2}$ normal stationär. Man kann also nach Fall a) fortsetzen.

Ist $x = r_1$, so bilde man

$$\begin{aligned} K'' &= U_{12} U_{1r_\nu}^{\varepsilon_\nu} \ldots U_{1r_2}^{\varepsilon_2} \cdot P_{r_1 y} O_{r_1} V_{r_1 y}^{-1} U_{1y}^{\varepsilon_1} V_{y r_1} I \\ &= U_{12} U_{1r_\nu}^{\varepsilon_\nu} \ldots U_{1r_2}^{\varepsilon_2} \cdot U_{y r_1} U_{1r_1}^{\varepsilon_1} V_{r_1 y}^{-1} (P_{r_1 y} O_{r_1} I), \end{aligned}$$

welches genau wie vorher genügt.

Ist endlich $y = r_1$, und z. B. $\varepsilon_1 = +1$, so zeichne man $B_0 H \equiv \alpha_x^{-1}$; dies muß von $B_0 B_1 \equiv \alpha_y \equiv \alpha_{r_1}$ in C_1 abzweigen, wegen $\alpha_x \alpha_{r_1} = \alpha_x$, und wegen $\alpha_x \alpha_{r_1} < \alpha_{r_1}$ muß dabei $C_1 H < C_1 B_0$ sein. Dann nimmt man

$$\begin{aligned} K''' &= U_{12} U_{1r_\nu}^{\varepsilon_\nu} \ldots U_{1r_2}^{\varepsilon_2} \cdot P_{r_1 x} O_x V_{x r_1}^{-1} U_{1r_1} U_{1x}^{-1} V_{r_1 x} I \\ &= U_{12} U_{1r_\nu}^{\varepsilon_\nu} \ldots U_{1r_2}^{\varepsilon_2} \cdot U_{r_1 x} U_{1x} U_{1r_1} V_{x r_1}^{-1} (P_{r_1 x} O_x I). \end{aligned}$$

Der Fall $\varepsilon_1 = -1$ erledigt sich völlig analog, indem man $\alpha_x^{-1} \equiv B_1 H$ zeichnet; es zweigt von $B_1 B_0$ wieder in C_1 ab und $C_1 H < C_1 B_1$.

b$_2$) $\alpha_x = \alpha_x \alpha_y \geqq \alpha_y$. — Figur 9 stellt $\alpha_x \alpha_y$ dar. Dabei ist $P_4 P_2 = P_4 P_3$ wegen $\alpha_x \alpha_y = \alpha_x$, $P_4 P_1 \geqq P_4 P_3$ wegen $\alpha_x \alpha_y \geqq \alpha_y$. Die Mitte P_5 von $P_1 P_3$

liegt also auf $P_1 P_4$ und kann speziell mit P_4 zusammenfallen, falls $\alpha_x \alpha_y = \alpha_y$ ist. Dann bilde man

$$K' = U_{xy} U_{12} T_{1r_y} \dots T_{1r_1} I,$$

wo $T_{1r_i} = U_{1r_i}^{\varepsilon_i}$, falls $r_i \neq x = r_{h_k}$, $T_{1r_{h_k}} = U_{1y} U_{1r_{h_k}}$ für $\varepsilon_{h_k} = +1$ und $T_{1r_{h_k}} = U_{1r_{h_k}}^{-1} U_{1y}^{-1}$ für $\varepsilon_{h_k} = -1$. Die Bedeutung dieser Umformung ist offenbar, daß man nur überall da, wo in K an das erste Element das Element $\beta_x = \alpha_x \alpha_y$ angefügt werden soll (z. B. mit Exponent $+1$) in K' erst α_x und dann α_y anfügt. Ist nun $P_4 \neq P_5$, so ist K' bezüglich $U_{12} \dots T_{1r_1}$ normal-stationär. Um das zu sehen, betrachte man ein $r_{h_k} (= x)$ etwa mit $\varepsilon_{h_k} = +1$;

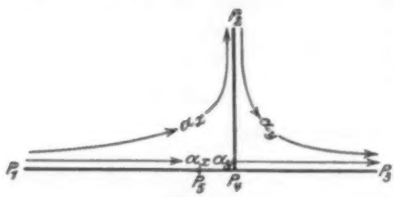

Fig. 9.

dann ist $\beta_{r_{h_k}} \equiv \alpha_x \alpha_y \equiv B_{h_k - 1} B_{h_k} \equiv P_1 P_3$ der Figur 9. Bringt man $P_1 P_3$ in $B_{h_k - 1} B_{h_k}$ an, so fällt P_5 in C_{h_k} und P_4 trennt C_{h_k} von B_{h_k}. Also wird $AP_2 = AP_5 + P_5 P_4 + P_4 P_2 = AP_4 + P_4 P_3 = AB_{h_k}$, fügt man also α_x an $AB_{h_k - 1}$, so ändert sich die Diagrammzahl nicht. Alle Lagen, in die der Punkt P_2 kommen kann, haben also dieselbe Entfernung von A_1 wie die B_i, und da $\alpha_x = \alpha_x \alpha_y \leqq \alpha_2$ ist, ist K' normal-stationär bezüglich $U_{12} \dots T_{1r_1}$. — Ist $P_4 = P_5$, so ist es auch noch denkbar, daß alle Lagen, in die P_2 kommen kann, dieselbe Entfernung von A haben, wie B_0. Es können aber auch andere Lagen eintreten. Es wird ja $P_4 = P_5 = C_{h_k}$, und wenn nun $P_4 P_2$ anfänglich auf $C_{h_k} A$ verläuft, ergibt sich für P_2 eine Lage, in der P_2 und A nicht durch C_{h_k} getrennt werden, also $AP_2 < AB_0$. Es sei $h_1 < h_2 < \dots < h_s$ und h_m der kleinste dieser Werte, für den eine solche Lage von P_2 auftritt. Dabei sei etwa $\varepsilon_{h_m} = +1$. (Der Fall -1 erledigt sich ganz analog.) Der erstverwendete Faktor $U_{1r_{h_m}}$ von $T_{1r_{h_m}}$ ruft dann in K' eine Diagrammzahl $< \Lambda$ hervor. Wir haben daher noch zu zeigen, wie K', das also in diesem Fall nicht normal-stationär ist, durch eine andere Umformung ersetzt werden kann, so daß das Verfahren fortsetzbar bleibt. Es sei l der größte Index $< h_m$ derart, daß $\beta_{r_l} > \beta_{r_{h_m}} (= \beta_x)$, *falls es einen solchen gibt*. Dann ist r_l von $x, y, r_{l+1}, \dots, r_{h_m - 1}$ verschieden. Ferner ist keiner der Indizes r_j ($j = l+1, l+2, \dots, h_m - 1$) gleich x oder y, denn für $r_j = x$ oder $= y$ fiele C_j mit C_{h_m} zusammen, und von diesem Punkte, der $P_4 = P_5$ in Figur 9 entspräche, müßten gleichbezeichnete Strecken verschieden ausgehen. Wir können $\varepsilon_l = +1$ an-

nehmen, da wir dies nötigenfalls durch Transformation mit O_{r_l} erreichen können, wegen $r_l \neq x, y, 1, 2$. Dann bilden wir zunächst den Teilkern

$$K_1 I = U_{r_l r_{h_m}} U^{\varepsilon_{h_m - 1}}_{r_l r_{h_m - 1}} \dots U^{\varepsilon_{l+1}}_{r_l r_{l+1}} I.$$

Es ist $L(K_1 I) < L(I) = \Lambda$ und $K_1 I$ ist ein normal-stationärer Kern bezüglich K_1. Nun formen wir K um zu

$$K'' = U_{xy} (U_{12} T_{1 r_\nu} \dots T_{1 r_1})_{K_1} I,$$

wo $T_{1 r_i} = U^{\varepsilon_i}_{1 r_i}$ für $r_i \neq x$ und $\neq r_l$, ferner $T_{1 r_i} = (U_{1y} U_{1x})^{\varepsilon_i}$ für $i = h_k$ (also $r_i = x$) und endlich $T_{1 r_i} = (U^{-\varepsilon_{l+1}}_{1 r_{l+1}} \dots U^{-\varepsilon_{h_m - 1}}_{1 r_{h_m - 1}} U^{-1}_{1 r_{h_m}} U_{1 r_l})^{\varepsilon_i}$ für $r_i = r_l$. Keiner der Faktoren $U_{12} T_{1 r_\nu} \dots T_{1 r_1}$ in K'' bewirkt dann eine größere Länge des ersten Elements im Isomorphismus als $L(\alpha_1) = AB_0$, der Länge AB_0 des ersten Elements entspricht aber in K'' eine Diagrammzahl $< \Lambda$, da die Länge von α_{r_l} durch die vorherige Ausübung von K_1 herabgesetzt ist. In K'' tritt Λ daher nur normal-stationär innerhalb K_1 und sonst überhaupt nicht auf, womit die Fortsetzbarkeit durch Hineinbeziehen des vordersten Faktors von I erkannt ist.

Es wurde oben angenommen, daß sich ein solcher Index l finden ließe. Ist das nicht der Fall, so hat das zunächst zur Folge, daß $h_m = h_1$, ferner daß der Teilkern (für $\varepsilon_{h_1} = +1$):

$$K_2 I = U_{1 r_{h_1}} U^{\varepsilon_{h_1 - 1}}_{1 r_{h_1 - 1}} \dots U^{\varepsilon_1}_{1 r_1} I$$

bezüglich K_2 normal-stationär ist. Dann bilde man

$$K''' (U_{12})_{V_{2y} V^{\varepsilon_{h_1+1}}_{2 r_{h_1+1}} \dots V^{\varepsilon_\nu}_{2 r_\nu}} \cdot U_{xy} \cdot K_2 I,$$

Hier ist K''' bezüglich K_2 normal-stationär, $L(K_2 I) < L(I) = \Lambda$, und die übrigen Faktoren rufen den Wert Λ nicht mehr hervor, womit die Fortsetzbarkeit durch Hineinziehen des vordersten Faktors von I erkannt ist.

Damit ist der Beweis des Lemmas zum Abschluß gebracht, also die Vollständigkeit des Relationensystems (13), (14), (17) für die Isomorphismengruppe Γ_n dargetan.

(Eingegangen am 2. 7. 1923.)

Beiträge zur allgemeinen Topologie. II.

Über die Einführung uneigentlicher Elemente.

Von

Heinrich Tietze in Erlangen.

Wenn im folgenden versucht wird, die Einführung uneigentlicher Elemente vom Standpunkt einer allgemeinen Topologie [1]) zu behandeln, so soll die (auf die Sätze 1, 2, 4 bis 7 in §§ 2 bis 4 führende) Fragestellung erst in § 2 genau formuliert werden. Zur Einleitung und Erläuterung soll § 1 dienen, in dem an die geläufigsten Beispiele uneigentlicher Elemente angeknüpft wird, — Beispiele, auf die wir noch in § 5 zurückkommen.

Der enge Zusammenhang des Gegenstandes mit dem Borelschen Überdeckungssatz kommt in § 3 zur Sprache.

Zur Klärung von Unabhängigkeitsfragen für verschiedene Postulate, die allgemeinen Räumen auferlegt werden können, dient ein von Herrn Hausdorff herrührendes, in § 4 angeführtes Beispiel, wobei sich Gelegenheit ergibt, eine früher von mir gemachte Bemerkung über den Begriff „abgeschlossen und kompakt" zu ergänzen.

Bei Untersuchung nicht zusammenhängender Räume wird der bereits in „Beiträge I" eingeführte Begriff „zusammenhängend in einem Punkte" und ein an anderer Stelle [2]) mitgeteiltes Kriterium dafür benützt, daß die Komponenten eines Raumes offen sind.

§ 1.

1. Um für die allgemeinen Betrachtungen ein einfaches Beispiel vor Augen zu haben, sei an zwei bekannte Arten der Einführung uneigentlicher Punkte der (reellen euklidischen) Ebene angeknüpft: 1. Einführung *eines* Punktes $z=\infty$, wodurch die $z=(\xi+i\eta)$-Ebene zu einer der Kugelfläche gleich-

---

[1]) Vgl. die im folgenden als „Beiträge I" zitierte Abhandlung in Math. Ann. 88 (1923), S. 290.

[2]) Beiträge zur allgemeinen Topologie III, Monatsh. f. Math. u. Phys. 33 (1923).

wertigen Fläche ergänzt wird; 2. Einführung der unendlich vielen die uneigentliche Gerade bildenden Punkte, wodurch die ξ-η-Ebene zur projektiven Ebene ergänzt wird, also wieder zu einer geschlossenen Fläche (die diesmal „nicht-orientierbar", d. i. „mit umkehrbarer Indikatrix" ist)[3]). In beiden Fällen hat die ergänzte Ebene die — ihr vorher nicht zukommende — Eigenschaft, daß jede unendliche Menge von Punkten wenigstens einen Häufungspunkt hat[4]). Wir wollen im folgenden einen Raum, dem diese Eigenschaft zukommt, als *„absolut-kompakt"* bezeichnen[5]). Man kann bei Einführung uneigentlicher Elemente zu einem gegebenen Raum $\mathfrak{R}$ den Nachdruck darauf legen — und dieser Standpunkt ist auch für das Folgende maßgebend —, daß *der ergänzte Raum* $\mathfrak{R}^*$ *absolut-kompakt* sei (Forderung 1).

2. Aber noch etwas anderes ist offenbar wesentlich. Betrachten wir $\mathfrak{R}$ (also in unserem Beispiel die Menge der eigentlichen Punkte der Ebene) als Teilmenge von $\mathfrak{R}^*$ (also als Teil von der auf die eine oder andere Art ergänzten Ebene), dann hat jeder Punkt von $\mathfrak{R}$ in $\mathfrak{R}^*$ eine Umgebung, die ganz aus Punkten von $\mathfrak{R}$ besteht, wofür wir sagen wollen: *Der gegebene Raum* $\mathfrak{R}$ *ist eine im ergänzten Raum* $\mathfrak{R}^*$ *„offene" Menge*[6]) (Forderung 2). Etwas anders ausgedrückt heißt das: kein eigentlicher Punkt soll Häufungspunkt von uneigentlichen Punkten sein. Das gilt für unser Beispiel in beiden Fällen und soll allgemein gefordert werden, wenn im folgenden von Erweiterung eines Raumes durch Einführung uneigentlicher Punkte gesprochen wird. Tatsächlich ist diese Forderung wohl immer, wenn auch unausgesprochen, bei Einführung uneigentlicher Elemente maßgebend gewesen. Durch sie wird ausgeschlossen, daß man etwa die Menge $\mathfrak{R}$ der eigentlichen Punkte der ξ-η-Ebene zu einem absolut-kompakten Raum $\mathfrak{R}^*$ ergänzt durch Einführung aller ihr nicht angehörenden eigentlichen und

---

[3]) Als drittes Beispiel möge etwa die nach vorheriger eineindeutiger stetiger Abbildung der ξ-η-Ebene auf das Innere eines reellen Kegelschnittes C^2 (hyperbolische nicht-euklidische Ebene) vorzunehmende Ergänzung — gleichfalls zur projektiven Ebene — angeführt werden, die durch Hinzunahme der unendlich fernen und der idealen Punkte (auf und außerhalb der C^2) bewirkt wird.

[4]) Über die Definition des Häufungspunktes für allgemeine „topologische Räume" vgl. Beiträge I, Nr. 2.

[5]) Zur Terminologie vgl. auch Nr. 14.

[6]) Mit anderen Worten: Die Menge $\mathfrak{R}^* - \mathfrak{R}$ der eingeführten uneigentlichen Elemente ist „in $\mathfrak{R}^*$ abgeschlossen". Vgl. Beiträge I, Nr. 2 und 6; zur Terminologie l. c. [5]). Die Forderung 2 ist ein wesentliches Merkmal, durch welches die hier betrachteten Ergänzungen eines Raumes sich von anderen Ergänzungen unterscheiden, wie sie z. B. die Hinzunahme irrationaler Punkte zum Raum aller rationalen Punkte darstellt [allgemein die Erweiterung zu einem „vollständigen Raum", Hausdorff, Grundzüge der Mengenlehre (1914), S. 315].

uneigentlichen Punkte eines $\mathfrak{R}$ enthaltenden projektiven *drei*-dimensionalen Raumes, — alle diese Punkte als „uneigentliche" von $\mathfrak{R}$ aufgefaßt.

3. Drittens ist aber noch ein weiterer Umstand als wesentlich für die ganze Fragestellung hervorzuheben, nämlich daß der gegebene Raum $\mathfrak{R}$ der Forderung genüge, daß es *zu jedem seiner Punkte x eine in $\mathfrak{R}$ abgeschlossene und in $\mathfrak{R}$ kompakte umgebende Menge*[7]) $\overline{\mathfrak{U}}(x)$ *gibt* (Forderung 3). Dabei nennt man eine Menge $\mathfrak{M}$ „*in $\mathfrak{R}$ kompakt*"[8]), wenn jede unendliche Teilmenge von $\mathfrak{M}$ einen Häufungspunkt in $\mathfrak{R}$ (nicht notwendig in $\mathfrak{M}$) hat. So stellt im Beispiel der Ebene $(\xi - \xi_0)^2 + (\eta - \eta_0)^2 < 1$ bzw. $(\xi - \xi_0)^2 + (\eta - \eta_0)^2 \leqq 1$ eine den Punkt $x = (\xi_0, \eta_0)$ umgebende Menge dar, die in der Ebene $\mathfrak{R}$ kompakt, bzw. kompakt und abgeschlossen ist. Wir wollen einen Raum „*im Punkte x abgeschlossen-kompakt*" nennen, wenn es eine abgeschlossene und kompakte, x umgebende Menge $\overline{\mathfrak{U}}(x)$ gibt. Unsere Forderung 3, die wir also dahin aussprechen können, daß $\mathfrak{R}$ in jedem Punkte abgeschlossen-kompakt sein soll, ist somit in unserem Beispiel erfüllt. Zur Begründung aber, daß diese Forderung für die ganze Fragestellung wesentlich ist, diene die an späterer Stelle (Nr. 15) bewiesene Tatsache, daß falls der nicht absolut-kompakte Raum $\mathfrak{R}$ der Forderung 3 nicht genügt, eine unseren beiden früheren Forderungen genügende Einführung uneigentlicher Elemente, wenn überhaupt, dann nicht anders möglich ist, als daß der ergänzte Raum $\mathfrak{R}^*$ das in „Beiträge I", Nr. 9 ff. besprochene zweite Trennbarkeitsaxiom (G) nicht erfüllt. Unsere dritte Forderung bedeutet also nur die Ausmerzung von „Räumen", die von etwas seltsamerer Art sind und daher mit Recht ausgeschieden werden können.

4. Endlich ist viertens die Beschränkung auf *zusammenhängende*[9]) Räume $\mathfrak{R}$ gerechtfertigt (Forderung 4, a). Verzichtet man nämlich darauf, andere Räume $\mathfrak{R}$ zu betrachten, als solche, die in jedem ihrer Punkte zusammenhängend sind, — was wieder nur die Ausmerzung abnormaler Fälle bedeutet, — so kann man im Falle eines nicht-zusammenhängenden Raumes $\mathfrak{R}$ für jede Komponente von $\mathfrak{R}$ die Frage der Ergänzung zu einem absolut-kompakten Raum $\mathfrak{R}^*$ getrennt behandeln[10]). Zugleich mit $\mathfrak{R}$ wird man auch $\mathfrak{R}^*$ *zusammenhängend* fordern (Forderung 4, b), da man etwaige nicht mit $\mathfrak{R}$ zusammenhängenden Teile von $\mathfrak{R}^*$ einfach fortlassen kann[10]). Mit dieser unseren allgemeinen Betrachtungen auferlegten Beschränkung soll natürlich nicht gesagt sein, daß es nicht bisweilen nützlich sein mag,

---

[7]) „Umgebende Menge" s. Beiträge I, Nr. 5.

[8]) Nach Fréchet, Rend. del Circ. Mat. di Palermo 22 (1906), S. 6.

[9]) Für die Definition von „zusammenhängend", „in einem Punkte zusammenhängend" und „Komponente" vgl. Beiträge I, Nr. 6. Wie leicht zu sehen, kann ein Raum nicht-zusammenhängend und zugleich in jedem Punkt zusammenhängend sein.

[10]) Näheres vgl. Nr. 16, 17.

einen nicht-zusammenhängenden Raum $\mathfrak{R}$ [etwa wie die Menge der — zwei Kreisflächen bildenden — Punkte $(\xi^2+\eta^2+3)^2-16\xi^2<0$] zu einem einzigen zusammenhängenden Raum $\mathfrak{R}^*$ zu ergänzen (im Beispiel etwa zur ganzen projektiven Ebene).

Zwei weitere Forderungen (5 und 6), die bisweilen an eine Einführung uneigentlicher Elemente gestellt werden mögen, sollen vorläufig unberücksichtigt bleiben und erst in § 5 erwähnt werden.

§ 2.

5. Nach diesen einführenden Bemerkungen definieren wir:

Sei $\mathfrak{R}$ ein topologischer Raum, d. h. es genüge $\mathfrak{R}$ den Hausdorffschen Umgebungsaxiomen (A, B, C, D) oder, was dasselbe ist[11]), den Axiomen $(\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}, \bar{D})$ für umgebende Mengen. Unter einer „*Erweiterung von $\mathfrak{R}$ zu einem absolut-kompakten Raum*" verstehen wir die Bildung eines absolut-kompakten topologischen Raumes $\mathfrak{R}^*$, der $\mathfrak{R}$ als *echte* Teilmenge enthält: $\mathfrak{R}^* \supset \mathfrak{R}$ (s. o. Forderung 1). Die bei einer Erweiterung hinzugenommenen Punkte (Punkte von $\mathfrak{R}^* - \mathfrak{R}$) unterscheiden wir als „uneigentliche Punkte von $\mathfrak{R}^*$" von den „eigentlichen", d. i. den Punkten von $\mathfrak{R}$. Wir betrachten im folgenden solche Räume $\mathfrak{R}$, die in jedem Punkt abgeschlossen-kompakt sind (s. o. Forderung 3) und solche „Erweiterungen" dieser Räume, die den Forderungen genügen (s. o. 2, 4):

a) $\mathfrak{R}$ ist in $\mathfrak{R}^*$ offen,

b) wenn $\mathfrak{R}$ zusammenhängend ist, ist es auch $\mathfrak{R}^*$.

6. Wir behaupten dann:

Satz 1. *Jeder zusammenhängende, in jedem Punkt abgeschlossen-kompakte Raum $\mathfrak{R}$, der selbst nicht absolut-kompakt ist, ist* (*wenigstens*) *einer Erweiterung zu einem absolut-kompakten Raum fähig, die den Forderungen* a), b) *genügt.*

Zum Beweise möge ein Raum $\mathfrak{R}^*$ gebildet werden aus den Punkten von $\mathfrak{R}$ und einem einzigen weiteren „uneigentlichen" Punkt x^*. Für jeden Punkt x von $\mathfrak{R}$ seien als umgebende Mengen $\bar{\mathfrak{U}}^*(x)$ in $\mathfrak{R}^*$ erklärt: einmal die x in $\mathfrak{R}$ umgebenden Mengen $\bar{\mathfrak{U}}(x)$, dann die durch Hinzunahme von x^* zu einer $\bar{\mathfrak{U}}(x)$ entstehenden Mengen. Für x^* seien als umgebende Mengen $\bar{\mathfrak{U}}^*(x^*)$ erklärt alle Mengen, die aus $\mathfrak{R}^*$ durch Weglassung einer Menge entstehen, die Teilmenge einer in $\mathfrak{R}$ kompakten und abgeschlossenen Teilmenge von $\mathfrak{R}$ ist.

Wir beweisen zunächst, daß die $\bar{\mathfrak{U}}^*$ den Axiomen $(\bar{A})$ bis $(\bar{D})$ genügen, $\mathfrak{R}^*$ also ein topologischer Raum ist. Falls die in diesen Axiomen

[11]) Vgl. Beiträge I, Nr. 5.

genannten Punkte x, y zu $\mathfrak{R}$ gehören, genügt hierzu der Hinweis auf die Gültigkeit der Axiome für $\mathfrak{R}$. Was ferner die Existenz den Punkt x^* umgebender Mengen, die $(\bar{\mathrm{A}})$ erfüllen, anlangt, so ist sie aus unserer Definition der $\bar{\mathfrak{U}}^*(x^*)$ klar, und da $\mathfrak{R}$ selbst nicht absolut-kompakt, also auch nicht „in $\mathfrak{R}$ kompakt und abgeschlossen" ist, so ist zugleich ersichtlich, daß jede $\bar{\mathfrak{U}}^*(x^*)$ Punkte von $\mathfrak{R}$ enthält. Die Gültigkeit von $(\bar{\mathrm{B}}, \mathrm{b})$ ist einleuchtend, jene von $(\bar{\mathrm{B}}, \mathrm{a})$ für zwei x^* umgebende Mengen $\bar{\mathfrak{U}}^*(x^*)$, $\bar{\mathfrak{B}}^*(x^*)$ folgt daraus, daß die Vereinigung $\mathfrak{A} \dotplus \mathfrak{B}$ von zwei in $\mathfrak{R}$ kompakten und abgeschlossenen Mengen $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ selbst in $\mathfrak{R}$ kompakt und abgeschlossen ist. Ist nun

$$\mathfrak{R} - \mathfrak{R}\cdot\bar{\mathfrak{U}}^*(x^*) = \mathfrak{A}_1 \subseteq \mathfrak{A} \tag{1}$$

und

$$\mathfrak{R} - \mathfrak{R}\cdot\bar{\mathfrak{B}}^*(x^*) = \mathfrak{B}_1 \subseteq \mathfrak{B}, \tag{2}$$

so ist $\mathfrak{R} - \mathfrak{R}\cdot(\bar{\mathfrak{U}}^*(x^*)\cdot\bar{\mathfrak{B}}^*(x^*)) = \mathfrak{A}_1 \dotplus \mathfrak{B}_1 \subseteq \mathfrak{A} \dotplus \mathfrak{B}$, also der Durchschnitt $\bar{\mathfrak{U}}^*(x^*)\cdot\bar{\mathfrak{B}}^*(x^*)$ selbst eine x^* umgebende Menge. Ferner folgt $(\bar{\mathrm{C}})$ für eine Menge $\bar{\mathfrak{U}}^*(x^*)$ daraus, daß für $\bar{\mathfrak{U}}^*(x^*)$ eine Relation (1) bestehen muß, in der $\mathfrak{A}$ in $\mathfrak{R}$ kompakt und abgeschlossen, also $\mathfrak{R} - \mathfrak{A}$ in $\mathfrak{R}$ offen und daher $\bar{\mathfrak{U}}^*(x^*) \supset \mathfrak{R} - \mathfrak{A}$ umgebende Menge jedes Punktes von $\mathfrak{R} - \mathfrak{A}$ ist. Demnach ist die durch Hinzunahme von x^* zu $\mathfrak{R} - \mathfrak{A}$ gebildete Menge $\{x^*\} \dotplus (\mathfrak{R} - \mathfrak{A}) = \mathfrak{M}$, da sie auch eine umgebende Menge von x^* ist, in $\mathfrak{R}^*$ offen. Die Existenz einer in $\mathfrak{R}^*$ offenen, x^* enthaltenden Teilmenge $\mathfrak{M}$ von $\bar{\mathfrak{U}}^*(x^*)$ ist aber gleichbedeutend mit $(\bar{\mathrm{C}})$. Schließlich folgt daraus, daß $\mathfrak{R}$ in jedem Punkt x abgeschlossen-kompakt ist, daß $(\bar{\mathrm{D}})$ auch für $y = x^*$, $x \neq x^*$ erfüllt ist.

Weiter ist $\mathfrak{R}^*$ zusammenhängend, denn wäre $\mathfrak{R}^* = \mathfrak{A} \dotplus \mathfrak{B}$ eine Zerlegung in zwei punktfremde, nicht leere und in $\mathfrak{R}^*$ abgeschlossene Mengen $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, so müßte $\mathfrak{R}$ als zusammenhängende Teilmenge von $\mathfrak{R}^*$ ganz in einer dieser Mengen, etwa in $\mathfrak{A}$ enthalten sein; da aber jede $\bar{\mathfrak{U}}^*(x^*)$ Punkte von $\mathfrak{R}$ enthält, x^* also Häufungspunkt von $\mathfrak{R}$ ist, so müßte $\mathfrak{A}$ auch x^* enthalten und $\mathfrak{B}$ leer sein, gegen die Annahme.

Daß $\mathfrak{R}$ in $\mathfrak{R}^*$ offen ist, folgt daraus, daß die Komplementärmenge $\mathfrak{R}^* - \mathfrak{R} = \{x^*\}$ in $\mathfrak{R}^*$ abgeschlossen ist. Ferner liegen von jeder unendlichen Teilmenge $\mathfrak{M}$ von $\mathfrak{R}^*$, die keinen Häufungspunkt in $\mathfrak{R}$ hat, in jeder in $\mathfrak{R}$ kompakten und abgeschlossenen Menge $\mathfrak{A}$ nur endlich viele und daher in jeder $\bar{\mathfrak{U}}^*(x^*)$ unendlich viele Punkte, so daß $\mathfrak{M}$ den Häufungspunkt x^* hat. Daraus folgt, daß $\mathfrak{R}^*$ absolut-kompakt ist, und Satz 1 ist in allen Teilen bewiesen.

§ 3.

7. Gemäß Satz 1 ist die Eigenschaft eines Raumes $\mathfrak{R}$, selbst *nicht* absolut-kompakt zu sein, als eine (neben den sonstigen dabei gemachten Voraussetzungen) hinreichende Bedingung für die Möglichkeit einer Erweiterung zu einem absolut-kompakten Raum festgestellt. Wir fragen, ob diese Bedingung hierfür auch notwendig ist. In dieser Hinsicht wollen wir zeigen, daß in der Tat wenigstens für eine gewisse Klasse von absolut-kompakten Räumen eine unseren Forderungen genügende Erweiterung zu einem absolut-kompakten Raum nicht möglich ist. (Daß es andererseits auch erweiterungsfähige absolut-kompakte Räume gibt, wird in Nr. 13 gezeigt.) Wir wollen nämlich diejenigen Räume $\mathfrak{R}$ betrachten, denen die Eigenschaft zukommt, daß $\mathfrak{R}$ in jedem $\mathfrak{R}$ enthaltenden Raum $\mathfrak{R}^*$ abgeschlossen ist; ein solcher Raum ist sicher absolut-kompakt, da er andernfalls nach § 2 (vgl. auch [27])) einer Erweiterung zu einem Raum $\mathfrak{R}^*$ fähig wäre, in dem $\mathfrak{R}$ nicht abgeschlossen ist. Für derartige Räume gilt

Satz 2. *Wenn ein zusammenhängender topologischer Raum $\mathfrak{R}$ der „Voraussetzung* $\mathfrak{a}$)“ *genügt, daß $\mathfrak{R}$ in jedem $\mathfrak{R}$ enthaltenden Raum abgeschlossen ist, so ist $\mathfrak{R}$ einer* a), b) *erfüllenden Erweiterung zu einem absolut-kompakten Raum nicht fähig.*

Wäre nämlich eine solche Erweiterung möglich und $\mathfrak{R} + \mathfrak{Q} = \mathfrak{R}^*$ der ergänzte Raum ($\mathfrak{Q} \supset 0$), so wäre $\mathfrak{R}$ (und daher auch $\mathfrak{Q}$) wegen $\mathfrak{a}$) und a) in $\mathfrak{R}^*$ zugleich abgeschlossen und offen, es wäre also $\mathfrak{R}^* = \mathfrak{R} + \mathfrak{Q}$ eine Zerlegung von $\mathfrak{R}^*$ in zwei in $\mathfrak{R}^*$ abgeschlossene, nicht leere Mengen, $\mathfrak{R}^*$ also nicht zusammenhängend, entgegen Forderung b).

Aus Satz 2 werden wir weitere Sätze erhalten durch Aufzeigung von Klassen von Räumen, die $\mathfrak{a}$) genügen.

8. Eine hinreichende Bedingung dafür, daß ein Raum in jedem ihn enthaltenden Raum abgeschlossen ist, stellt nun, wie wir sogleich sehen werden, eine von Hausdorff[12]) als *„zweites Abzählbarkeitsaxiom* (F)“ eingeführte Forderung, bzw. die Gültigkeit des daraus folgenden[12]) *Borelschen Überdeckungsatzes*“ für den betreffenden Raum dar. Jenes Axiom (F) ist gleichwertig dem folgenden für umgebende Mengen ausgesprochenen:

($\overline{\mathrm{F}}$) Es gibt eine abzählbare Menge von Teilmengen $\overline{\mathfrak{U}}$ des topologischen Raumes $\mathfrak{R}$, so daß es zu jedem Punkt x von $\mathfrak{R}$ und zu jeder x umgebenden Menge $\overline{\mathfrak{U}}(x)$ eine in $\overline{\mathfrak{U}}(x)$ enthaltene Menge $\overline{\mathfrak{U}}$ gibt, die selbst eine x umgebende Menge ist[13]),

---

[12]) l. c. [6]), S. 263, 272. Das „erste Abzählbarkeitsaxiom (E)“, das eine schwächere Forderung als (F) darstellt, kann hier übergangen werden.

[13]) Z. B. wird in der ξ-η-Ebene eine solche Menge von Mengen $\overline{\mathfrak{U}}$ gebildet von der Menge aller Kreisflächen $(\xi - \xi_0)^2 + (\eta - \eta_0)^2 - \varrho_0^2 < 0$ mit rationalen ξ_0, η_0, ϱ_0. Vgl. Hausdorff, l. c. [6]), S. 262.

und aus (F) folgt der

Überdeckungssatz von Borel[14]) (B. Ü): Ist $\mathfrak{M}$ eine in $\mathfrak{R}$ kompakte und abgeschlossene Teilmenge von $\mathfrak{R}$ und ist $\mathfrak{M}$ in der Vereinigung eines beliebigen Systems offener Mengen enthalten, so ist $\mathfrak{M}$ in der Vereinigung endlich vieler offener Mengen des Systems enthalten.

9. Dieser Satz ist für einen Raum $\mathfrak{R}$, der selbst absolut-kompakt ist, gleichwertig mit der Aussage:

(K) Zu jedem System offener Mengen, deren Vereinigung gleich dem Raum $\mathfrak{R}$ ist, gibt es ein endliches Teilsystem gleicher Eigenschaft.

Denn wenn $\mathfrak{R}$ der Forderung (K) genügt und wenn $\mathfrak{M}$ eine beliebige in $\mathfrak{R}$ abgeschlossene Menge $\subset \mathfrak{R}$ ist, ferner Σ ein System offener Mengen, in deren Vereinigung $\mathfrak{M}$ enthalten ist, dann ist $\mathfrak{R}$ in der Vereinigung aller offenen Mengen des Systems Σ' enthalten, das aus Σ durch Hinzunahme der Menge $\mathfrak{R} - \mathfrak{M}$ entsteht. Aus (K) folgt dann, daß $\mathfrak{R}$ gleich der Vereinigung eines endlichen Teilsystems T' von Σ' ist und also $\mathfrak{M}$ in der Vereinigung der endlich vielen sowohl zu Σ als zu T' gehörenden Mengen enthalten ist. Es gilt also (B. Ü). Umgekehrt, wenn $\mathfrak{R}$ absolut-kompakt ist und es gilt (B. Ü), so folgt daraus (K), indem man $\mathfrak{M} = \mathfrak{R}$ setzt.

10. Wir beweisen nun (in Nr. 11) den

Satz 3. *Ein der Forderung* (K) *genügender Raum* $\mathfrak{R}$ *hat die Eigenschaft, in jedem ihn enthaltenden Raum* $\mathfrak{R}^*$ *abgeschlossen*[15]) *zu sein*; womit dann zugleich der „Zusatz zu Satz 3" gezeigt ist: daß diese Eigenschaft jedem absolut-kompakten, dem zweiten Abzählbarkeitsaxiom ($\overline{\mathrm{F}}$) genügenden Raum zukommt und daher zufolge Satz 2 der Satz gilt:

Satz 4. *Ein zusammenhängender absolut-kompakter Raum* $\mathfrak{R}$, *der dem zweiten Abzählbarkeitsaxiom* ($\overline{\mathrm{F}}$) *oder zumindest der Forderung* (K) *genügt, ist keiner* a), b) *erfüllenden Erweiterung zu einem absolut-kompakten Raum fähig.*

Als eine Folgerung von Satz 3 nebst Zusatz sei noch angeführt:

Satz 3*. *Ein absolut-kompakter Raum* $\mathfrak{R}$ *ist in jedem ihn enthaltenden Raum* $\mathfrak{R}^*$, *der dem Axiom* ($\overline{\mathrm{F}}$) *genügt*[16]), *abgeschlossen.*

[14]) In einer der letzten Arbeiten des, als ein Opfer der Kriegszeit, allzu früh der Wissenschaft entrissenen W. Groß (Sitzungsber. d. Wiener Akad. **123** (1914), S. 810) wird die Gültigkeit dieses Satzes, ohne Heranziehung eines Abzählbarkeitsaxiomes, für *beliebige metrische* Räume bewiesen. Vgl. hierzu, sowie bezüglich Nr. 9, Aussage (K) bei H. Hahn, Theorie der reellen Funktionen, I (1921), die Sätze I (S. 89) und II (S. 90).

[15]) $\mathfrak{R}$ ist dann absolut-kompakt (s. Nr. 7) und also auch in $\mathfrak{R}^*$ kompakt.

[16]) Statt des Axioms ($\overline{\mathrm{F}}$) genügt es, das weniger fordernde Hausdorffsche „erste Abzählbarkeitsaxiom (E)" für $\mathfrak{R}^*$ vorauszusetzen. Vgl. Hausdorff, l. c. [9]), S. 264.

Denn aus der Gültigkeit von $(\overline{\mathrm{F}})$ für $\mathfrak{R}^*$ folgt die Gültigkeit von $(\overline{\mathrm{F}})$ und damit von (K) für $\mathfrak{R}$.

11. Beweis von Satz 3. Nehmen wir an, der Satz sei nicht erfüllt, es gebe also wenigstens einen Punkt x^* in $\mathfrak{R}^* - \mathfrak{R}$, der Häufungspunkt von $\mathfrak{R}$ ist. Als eine „Menge $\overline{\mathfrak{U}}(x^*)$" werde dann der Durchschnitt $\mathfrak{R} \cdot \overline{\mathfrak{U}}^*(x^*)$ von $\mathfrak{R}$ mit einer x^* in $\mathfrak{R}^*$ umgebenden Menge $\overline{\mathfrak{U}}^*(x^*)$ bezeichnet, ferner jede in $\mathfrak{R}$ abgeschlossene Menge $\overline{\mathfrak{U}}(x^*)$ als eine „Menge $\overline{\mathfrak{U}}_\alpha(x^*)$" [17]) und ihre in $\mathfrak{R}$ offene Komplementärmenge $\mathfrak{R} - \overline{\mathfrak{U}}_\alpha(x^*)$ als eine „Menge $\mathfrak{O}$". Da x^* Häufungspunkt von $\mathfrak{R}$ ist, so ist keine Menge $\overline{\mathfrak{U}}(x^*)$, also auch keine $\overline{\mathfrak{U}}_\alpha(x^*)$ leer und es ist keine Menge $\mathfrak{O}$ gleich $\mathfrak{R}$, also jede Menge $\mathfrak{O} \subset \mathfrak{R}$. Da $\mathfrak{R}^*$ als topologischer Raum dem Axiom $(\overline{\mathrm{B}})$ genügt, so ist der Durchschnitt zweier Mengen $\overline{\mathfrak{U}}(x^*)$ wieder eine solche Menge, also im besonderen der Durchschnitt zweier $\overline{\mathfrak{U}}_\alpha(x^*)$ wieder eine $\overline{\mathfrak{U}}_\alpha(x^*)$ und die Vereinigung zweier (und daher endlich vieler) $\mathfrak{O}$ wieder eine $\mathfrak{O}$. Aus $(\overline{\mathrm{D}})$ folgt, daß es zu jedem Punkt y von $\mathfrak{R}$ eine Menge $\overline{\mathfrak{U}}(x^*)$ und eine zu ihr punktfremde, y in $\mathfrak{R}$ umgebende Menge $\overline{\mathfrak{U}}(y)$ gibt. Nach $(\overline{\mathrm{C}})$ gibt es in $\overline{\mathfrak{U}}(y)$ eine offene, y in $\mathfrak{R}$ umgebende Menge $\mathfrak{U}(y)$ und die aus $\overline{\mathfrak{U}}(x^*)$ gemäß Anm. [17]) abzuleitende Menge $\overline{\mathfrak{U}}_\alpha(x^*)$ ist dann zu $\mathfrak{U}(y)$ punktfremd, $\mathfrak{U}(y)$ also in der Menge $\mathfrak{O} = \mathfrak{R} - \overline{\mathfrak{U}}_\alpha(x^*)$ enthalten. Die Vereinigung aller $\mathfrak{O}$ umfaßt also alle Punkte y von $\mathfrak{R}$. Wenden wir nun (K) auf die Gesamtheit der offenen Mengen $\mathfrak{O}$ an, so müßte $\mathfrak{R}$ gleich der Vereinigung endlich vieler Mengen $\mathfrak{O}$, also selbst eine Menge $\mathfrak{O}$ sein, im Widerspruch dazu, daß jede Menge $\mathfrak{O} \subset \mathfrak{R}$ ist. Damit ist Satz 3 bewiesen.

§ 4.

12. Wenn ein Raum $\mathfrak{R}$ in irgendeinem ihn enthaltenden Raum $\mathfrak{R}^*$ $(\mathfrak{R}^* \supseteqq \mathfrak{R})$ zugleich abgeschlossen und kompakt ist, dann ist $\mathfrak{R}$ absolut-kompakt. Umgekehrt ist ein absolut-kompakter Raum $\mathfrak{R}$ in *jedem* ihn enthaltenden Raum $\mathfrak{R}^*$ kompakt. Ferner ist ein absolut-kompakter Raum $\mathfrak{R}$ nach den Sätzen 3 und 3* sicher auch in jedem $\mathfrak{R}^* \supseteqq \mathfrak{R}$ abgeschlossen, wenn $\mathfrak{R}$ dem zweiten Abzählbarkeitsaxiom $(\overline{\mathrm{F}})$, bzw. der Forderung (K) genügt. Es gilt dies aber keineswegs für beliebige absolut-kompakte Räume $\mathfrak{R}$, wie sich ersehen läßt (vgl. Nr. 13) im Anschluß an folgendes *Beispiel eines absolut-kompakten, jedoch dem zweiten Abzählbarkeitsaxiom nicht genügenden Raumes*, ein Beispiel, das ich einer freundlichen Mitteilung von Herrn F. Hausdorff verdanke [18]).

---

[17]) Es gibt Mengen $\overline{\mathfrak{U}}_\alpha(x^*)$. Denn aus jeder $\overline{\mathfrak{U}}(x^*)$ erhält man durch Hinzunahme ihrer Häufungspunkte in $\mathfrak{R}$ eine $\overline{\mathfrak{U}}_\alpha(x^*)$. ($\overline{\mathfrak{U}}_\alpha(x^*)$ ist dann die abgeschlossene Hülle von $\overline{\mathfrak{U}}(x^*)$ in $\mathfrak{R}$, also in $\mathfrak{R}$ abgeschlossen: vgl. Beiträge I, Nr. 2 und Hausdorff, l. c. [9]), S. 223).

[18]) Vgl. auch L. Vietoris, Monatshefte f. Math. u. Phys. 31 (1921), S. 183.

(Beispiel $\mathfrak{B}_8$.) Es bezeichne[19]) ω_1 die Anfangszahl der dritten Cantorschen Zahlklasse, d. h. den Ordnungstypus der Menge aller Ordnungszahlen von abzählbarer Mächtigkeit. Man bilde dann die Menge $\mathfrak{R}$ der Paare (α, z), unter α eine Ordnungszahl $< \omega_1$ und unter z eine der Ungleichung $0 \leqq z < 1$ genügende reelle Zahl verstanden. Man ordne diese Menge (lexikographisch) nach dem Grundsatz $(\alpha, z_1) < (\alpha, z_2)$, wenn $z_1 < z_2$, $(\alpha_1, z_1) < (\alpha_2, z_2)$ wenn $\alpha_1 < \alpha_2$. Man definiere als Umgebung eines „Punktes" $x_0 = (\alpha, z) \neq (0, 0)$ des „Raumes" $\mathfrak{R}$ jede durch eine Ungleichung $a < x < b$ definierte Menge, falls $a < x_0 < b$ gilt; analog für den allen anderen vorangehenden Punkt $x_0 = (0, 0)$ jede durch eine Ungleichung $x_0 \leqq x < b$ definierte Menge. — Zu jeder abzählbaren geordneten Menge gibt es[20]) eine ihr ähnliche Teilmenge T der Menge Y der reellen Zahlen $0 \leqq y \leqq 1$. Das gilt daher insbesondere für die Menge der Ordnungszahlen $\alpha \leqq \alpha_0$, wenn α_0 eine Ordnungszahl $< \omega_1$ ist. Sei $y(\alpha)$ der der Zahl α zugeordnete Punkt von T und hierbei im besonderen $y(0) = 0$, dann werde für $\alpha < \alpha_0$ die Strecke $0 \leqq z < 1$ und damit die Menge der Punkte (α, z) (wobei α fest, z variabel) *ähnlich* auf die Strecke $y(\alpha) \leqq y < y(\alpha + 1)$ abgebildet. Sei ferner z_0 eine Zahl $\geqq 0$ und < 1, so kann und soll $y(\alpha_0) < 1$ bzw. $= 1$ angenommen werden, je nachdem $z_0 > 0$ bzw. $= 0$ ist. Wenn $z_0 > 0$ ist, werde die Strecke $0 \leqq z \leqq z_0$ und damit die Menge der Punkte $(\alpha_0, 0) \leqq x \leqq (\alpha_0, z_0)$ ähnlich auf die Strecke $y(\alpha_0) \leqq y \leqq 1$ abgebildet. Wenn $z_0 = 0$ ist, werde der Punkt (α_0, z_0) auf den Punkt $y = 1$ abgebildet. Hieraus ist ersichtlich, daß für jeden Punkt $x_0 = (\alpha_0, z_0) \neq (0, 0)$ die Menge der Punkte $x \leqq x_0$ auf die Strecke Y so eineindeutig abbildbar ist, daß dem Umgebungsbegriff jener Menge in $\mathfrak{R}$ der gewöhnliche Umgebungsbegriff auf der Strecke entspricht. — Sei nun $\mathfrak{X}$ eine abzählbar-unendliche Menge von Punkten x aus $\mathfrak{R}$ und $\mathfrak{A}$ die endliche oder abzählbare Menge jener Ordnungszahlen α, die bei den Punkten $x = (\alpha, z)$ von $\mathfrak{X}$ auftreten. Dann gibt es[21]) eine Ordnungszahl $\alpha_0 < \omega_1$, so daß $\alpha < \alpha_0$ für jede Zahl α aus $\mathfrak{A}$. Die Abbildung aller Punkte $x \leqq (\alpha_0, z_0)$ auf $0 \leqq y \leqq 1$ zeigt dann, daß die Menge $\mathfrak{X}$ wenigstens einen Häufungspunkt hat. Unter Berufung auf den Satz, daß jede unendliche Menge eine abzählbare Teilmenge hat, folgert man daraus, daß $\mathfrak{R}$ absolut-kompakt ist. Zugleich ist ersichtlich keine abzählbare Menge $\mathfrak{X}$ in $\mathfrak{R}$ dicht, woraus schon folgt, daß $\mathfrak{R}$ das zweite Abzählbarkeitsaxiom nicht erfüllt[22]). Man erkennt dies auch unmittelbar: Wäre $(\overline{\mathrm{F}})$ erfüllt, so müßte es eine abzählbare Menge offener Mengen $\mathfrak{G}$ geben, so daß für jedes α eine in der Menge $(\alpha, 0) < x < (\alpha, 1)$ enthaltene Menge $\mathfrak{G}$ vorhanden ist, was ersichtlich der Nichtabzählbarkeit der Menge aller $\alpha < \omega_1$ widerspricht.

13. Aus Beispiel $\mathfrak{B}_8$ gewinnen wir das folgende Beispiel $\mathfrak{B}_9$ eines Raumes $\mathfrak{R}^*$ durch Hinzunahme eines weiteren Punktes x^* zu $\mathfrak{R}$, wobei für jeden Punkt x aus $\mathfrak{R}$ gelten soll: $x < x^*$; als Umgebung von x^* gelte demgemäß jede Menge $a < x \leqq x^*$, für welche $a < x^*$ ist. Dann ist x^* Häufungspunkt der in $\mathfrak{R}^*$ gelegenen Menge $\mathfrak{R}$, sonach die absolut-kompakte Menge $\mathfrak{R}$ *nicht* abgeschlossen in $\mathfrak{R}^*$. Da auch $\mathfrak{R}^*$ absolut-kompakt, ferner $\mathfrak{R}$ in $\mathfrak{R}^*$ offen und jeder der Räume $\mathfrak{R}$, $\mathfrak{R}^*$ zusammenhängend ist, so ist damit zugleich ein Beispiel einer die Forderungen a), b) erfüllenden Erweiterung eines Raumes $\mathfrak{R}$ zu einem absolut-kompakten $\mathfrak{R}^*$ gegeben, obwohl $\mathfrak{R}$ selbst schon absolut-kompakt ist.

---

[19]) Vgl. Hausdorff, l. c., S. 125.

[20]) Vgl. Hausdorff, l. c., Kap. IV, § 7, S. 99.

[21]) Vgl. Hausdorff, l. c., Kap. V, § 5, Satz II, S. 129.

[22]) Vgl. Hausdorff, l. c., S. 273.

Gelegentlich[33]) habe ich „absolut-kompakt" (= insichkompakt) und „in einem umfassenden Raum abgeschlossen und kompakt" (wofür man bisweilen nach Fréchet auch „extremal" sagt) als gleichwertig bezeichnet. Dies gilt für die dort behandelten metrischen Räume, hingegen nach dem Gesagten nicht im Transfiniten. Die a. a. O. betonte Forderung, die erstgenannte absolute Eigenschaft eines Raumes dort, wo sie allein maßgebend ist, als solche zur Geltung zu bringen und von bloß relativen Eigenschaften abzugrenzen, bleibt natürlich allgemein zu Recht bestehen.

14. Hierbei noch ein Wort zur Terminologie! Das Wort „abgeschlossen" wird in der Literatur nicht überall zur Bezeichnnng desselben Begriffs verwendet, andererseits liegt für den hier mit „absolut-kompakt" bezeichneten Begriff bisher keine einheitliche Bezeichnung vor: In der Punktmengentheorie (und Funktionentheorie) bezeichnet „abgeschlossen" fast ausnahmslos den auch von uns so bezeichneten *Relativ*begriff, der sich auf eine Menge und einen sie enthaltenden Raum (Bereich) bezieht (vgl. Beiträge I, Nr. 2, 6); hingegen trifft man in der geometrischen Literatur, zumal bei Fragen der Einführung uneigentlicher Elemente, „abgeschlossen" für jenen Begriff verwendet, der in der Punktmengentheorie (unter Zurückführung auf den *Relativ*begriff „kompakt") mit „insichkompakt" bezeichnet wurde[34]). Wenn ich dafür „absolut-kompakt" sage, so geschieht es, weil mir für diesen *Absolut*begriff, der in der Bezeichnung „in sich kompakt" liegende Umweg über den Relativbegriff „kompakt" nicht sachgemäß erscheint. Andererseits tritt das Bedürfnis nach einer selbständigen Bezeichnung immer mehr zutage, wenn man beachtet, daß für viele Sätze, die für „beschränkte und abgeschlossene" oder für „kompakte und abgeschlossene" Mengen ausgesprochen werden, das Wesentliche eben darin liegt, daß diesen Mengen die absolute topologische Eigenschaft „absolut-kompakt" zukommt. Leider sind fast alle Ausdrücke, die sprachlich auf eine innere Vollendung und Geschlossenheit hinweisen (wie: abgeschlossen, perfekt, kompakt) für Relativbegriffe verbraucht worden!

15. Wir wollen einen Raum „im Punkte x absolut-kompakt" nennen, wenn es eine absolut-kompakte umgebende Menge $\overline{\mathfrak{U}}(x)$ gibt. Nach dem in Nr. 13 Gesagten — wonach eine absolut-kompakte Menge nicht in jedem sie enthaltenden Raum abgeschlossen zu sein braucht — ist die in § 1 aufgestellte Forderung 3 nicht gleichwertig mit der bloßen Forderung, daß $\mathfrak{R}$ in jedem seiner Punkte absolut-kompakt sei, sondern sie ist schärfer und wurde tatsächlich (in Nr. 6 beim Beweise von $(\overline{\mathrm{C}})$) als solche herangezogen. — Wir beweisen noch, wie in Nr. 3 angekündigt, daß ein absolutkompakter Raum $\mathfrak{R}^*$ dem „zweiten Trennbarkeitsaxiom (G)" nicht genügt, wenn ein in $\mathfrak{R}^*$ offener Teilraum $\mathfrak{R}$ nicht in jedem Punkt abgeschlossenkompakt ist. Denn sei x_0 ein Punkt von $\mathfrak{R}$, der in $\mathfrak{R}$ keine abgeschlossene und kompakte umgebende Menge hat, dann sind in jeder abgeschlossenen $\overline{\mathfrak{U}}(x_0)$ unendliche Teilmengen mit wenigstens einem Häufungspunkt in $\mathfrak{R}^* - \mathfrak{R}$ vorhanden. Bildet man aber zu einer beliebigen $\overline{\mathfrak{U}}(x_0)$ wie in

---

[33]) Vgl. Hahn, l. c. [14]), S. 61, sowie Math. Zeitschr. 5 (1919), S. 288, Anm. 9.

[34]) Vgl. Study, Geometrie der Dynamen (1903), S. 248. Im gleichen Sinne wird „abgeschlossen" verwendet bei L. E. J. Brouwer, Math. Ann. 71 (1911), S. 98. Ebenda das Wort „offen" für nicht-absolutkompakt; desgleichen bei Weyl, l. c.[25]), S. 24 („offene Fläche").

Anm. 17 die zugehörige abgeschlossene Hülle $\overline{\mathfrak{U}}_a(x_0)$ und ist y ein in $\mathfrak{R}^* - \mathfrak{R}$ gelegener Häufungspunkt von $\overline{\mathfrak{U}}_a(x_0)$, so ist y auch Häufungspunkt von $\overline{\mathfrak{U}}(x_0)$. Da somit jede $\overline{\mathfrak{U}}(x_0)$ unendliche Teilmengen mit wenigstens einem Häufungspunkt in $\mathfrak{R}^* - \mathfrak{R}$ hat, so kann es nicht zwei punktfremde umgebende Mengen $\overline{\mathfrak{U}}(x_0)$ und $\overline{\mathfrak{U}}(\mathfrak{R}^* - \mathfrak{R})$ geben. Dabei ist $\mathfrak{R}^* - \mathfrak{R}$ in $\mathfrak{R}^*$ abgeschlossen, also (G) nicht erfüllt.

16. Bisher haben wir bei Erweiterung eines Raumes $\mathfrak{R}$ zu einem absolut-kompakten stets $\mathfrak{R}$ als zusammenhängend vorausgesetzt. Zum Fall eines nicht zusammenhängenden $\mathfrak{R}$ übergehend, wollen wir die Frage behandeln, inwieweit aus der Möglichkeit einer solchen Erweiterung für jede der Komponenten von $\mathfrak{R}$ auf die gleiche Möglichkeit für $\mathfrak{R}$ geschlossen werden kann. (In Nr. 17 behandeln wir die umgekehrte Frage.) Dabei wollen wir uns auf Räume beschränken, die *in jedem Punkt zusammenhängend*[25]) sind, und werden beweisen:

Satz 5. *Ist der in jedem Punkt zusammenhängende Raum $\mathfrak{R}$ nicht absolut-kompakt und ist jede seiner Komponenten entweder selbst absolut-kompakt oder einer den Forderungen* a), b) *genügenden Erweiterung zu einem absolut-kompakten Raum fähig, so ist auch $\mathfrak{R}$ einer solchen Erweiterung fähig.*

Wir stellen zunächst hierfür und für späteres einige Hilfssätze zusammen. Es gilt:

α) Jede Komponente $\mathfrak{K}$ eines Raumes $\mathfrak{R}$ ist in $\mathfrak{R}$ abgeschlossen. (Denn hätte $\mathfrak{K}$ einen Häufungspunkt in einer anderen Komponente $\mathfrak{H}$, so wäre $\mathfrak{K} + \mathfrak{H}$ eine zusammenhängende Menge $\supset \mathfrak{K}$, also $\mathfrak{K}$ keine Komponente.)

Nun gilt der an anderer Stelle[26]) bewiesene Satz:

β) Wenn der Raum $\mathfrak{R}$ in jedem Punkte zusammenhängend ist, dann ist jede Komponente von $\mathfrak{R}$ in $\mathfrak{R}$ offen (und umgekehrt).

Nach α) und β) ist also jede Komponente eines in jedem Punkte zusammenhängenden Raumes $\mathfrak{R}$ in $\mathfrak{R}$ zugleich offen und abgeschlossen, m. a. W. es gilt:

γ) Ein in jedem Punkt zusammenhängender Raum ist der *„Summenraum" seiner Komponenten* in dem früher (l. c. [25])) erklärten Sinn.

Unmittelbar ersichtlich sind die Sätze:

δ) Jede in einem absolut-kompakten Raum $\mathfrak{R}$ abgeschlossene Menge ist selbst absolut-kompakt, speziell also jede Komponente von $\mathfrak{R}$ (vgl. α)).

ε) Der Summenraum $\Sigma\mathfrak{R}_i$ einer Menge absolut-kompakter Räume $\mathfrak{R}_i$

[25]) Beiträge I, Nr. 6.

[26]) Vgl. Satz 1 der „Beiträge III", Monatshefte f. Math. u. Physik 33 (1923).

ist dann (und nur dann) absolut-kompakt, wenn die Menge der $\mathfrak{R}_i$ endlich ist.

ζ) Man betrachte zwei Mengen von Räumen $\mathfrak{R}_i$ bzw. $\mathfrak{R}_i^*$, hierbei die $\mathfrak{R}_i^*$ untereinander punktfremd vorausgesetzt; ist dann jeder Raum $\mathfrak{R}_i$ als offene Menge in $\mathfrak{R}_i^*$ enthalten, dann ist der Summenraum $\mathfrak{R}$ aller $\mathfrak{R}_i$ offen im Summenraum $\mathfrak{R}^\circ$ aller $\mathfrak{R}_i^*$.

Ferner gilt:

η) Ist $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{C}$ und $\mathfrak{A}$ offen in $\mathfrak{C}$, so ist $\mathfrak{A}$ offen in $\mathfrak{B}$. (Denn für jeden Punkt x von $\mathfrak{A}$ ist $\mathfrak{A}$ eine $\overline{\mathfrak{U}}(x \mid \mathfrak{C})$, also $\mathfrak{A} \cdot \mathfrak{B} = \mathfrak{A}$ eine $\overline{\mathfrak{U}}(x \mid \mathfrak{B})$.)[26a])

ϑ) Ist $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{C}$ und $\mathfrak{A}$ abgeschlossen in $\mathfrak{C}$, so ist $\mathfrak{A}$ abgeschlossen in $\mathfrak{B}$. (Denn für jeden Punkt x von $\mathfrak{B} - \mathfrak{A}$ ist, weil $\mathfrak{C} - \mathfrak{A}$ in $\mathfrak{C}$ offen, $\mathfrak{C} - \mathfrak{A}$ eine $\overline{\mathfrak{U}}(x \mid \mathfrak{C})$, also $\mathfrak{B} \cdot (\mathfrak{C} - \mathfrak{A}) = \mathfrak{B} - \mathfrak{A}$ eine $\overline{\mathfrak{U}}(x \mid \mathfrak{B})$, also $\mathfrak{B} - \mathfrak{A}$ in $\mathfrak{B}$ offen.)

ι) Der Durchschnitt $\mathfrak{D}$ einer Komponente $\mathfrak{K}$ eines Raumes $\mathfrak{R}$ mit einer in $\mathfrak{R}$ kompakten Menge $\mathfrak{M}$ ist in $\mathfrak{K}$ kompakt. (Denn jede unendliche Teilmenge $\mathfrak{T}$ aus $\mathfrak{D}$ besitzt, weil $\mathfrak{T}$ zu $\mathfrak{M}$ gehört, in $\mathfrak{R}$ wenigstens einen Häufungspunkt; und weil $\mathfrak{T}$ zu $\mathfrak{K}$ gehört und $\mathfrak{K}$ nach α) abgeschlossen ist, so liegt jeder solche Häufungspunkt in $\mathfrak{K}$.)

$\varkappa$) Der Raum $\mathfrak{R}$ sei in jedem Punkt zusammenhängend; wenn dann $\mathfrak{R}$ in jedem Punkt abgeschlossen-kompakt ist, dann ist auch jede Komponente $\mathfrak{K}$ von $\mathfrak{R}$ in jedem Punkt abgeschlossen-kompakt (und natürlich auch umgekehrt).

Denn ist x ein Punkt von $\mathfrak{K}$, so ist $\mathfrak{K}$ nach β), γ) eine x in $\mathfrak{R}$ umgebende Menge $\overline{\mathfrak{U}}_1(x \mid \mathfrak{R})$, die gemäß α) in $\mathfrak{R}$ abgeschlossen ist. Sei ferner $\overline{\mathfrak{U}}_2(x \mid \mathfrak{R})$ in $\mathfrak{R}$ kompakt und abgeschlossen, so ist der Durchschnitt $\mathfrak{B} = \overline{\mathfrak{U}}_1(x \mid \mathfrak{R}) \cdot \overline{\mathfrak{U}}_2(x \mid \mathfrak{R})$ gleichfalls in $\mathfrak{R}$ abgeschlossen und daher wegen $\mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{K} \subseteq \mathfrak{R}$ auch in $\mathfrak{K}$ abgeschlossen (nach ϑ). Nach ι) aber ist $\mathfrak{B} = \mathfrak{K} \cdot \overline{\mathfrak{U}}_2(x \mid \mathfrak{R})$ in $\mathfrak{K}$ kompakt; $\mathfrak{B}$ ist also eine in $\mathfrak{K}$ kompakte und abgeschlossene $\overline{\mathfrak{U}}(x \mid \mathfrak{K})$.

Wir wollen Satz 5 beweisen. Sei $\mathfrak{R}$ ein den Voraussetzungen dieses Satzes genügender Raum. Jede seiner Komponenten $\mathfrak{R}_i$ ist entweder einer a), b) genügenden Erweiterung zu einem absolut-kompakten Raum $\mathfrak{R}_i^*$ fähig (der gemäß b) zusammenhängend ist), oder es ist $\mathfrak{R}_i$ selbst absolut-kompakt, in welchem Falle wir $\mathfrak{R}_i^* = \mathfrak{R}_i$ setzen. Nach γ) ist $\mathfrak{R} = \Sigma \mathfrak{R}_i$. Ist die Anzahl der Komponenten $\mathfrak{R}_i$ endlich, also nicht alle $\mathfrak{R}_i$ absolut-kompakt (da sonst nach ε) auch $\mathfrak{R}$ gegen die Voraussetzung absolut-kompakt wäre), so ist $\mathfrak{R}^\circ = \Sigma \mathfrak{R}_i^* \supset \Sigma \mathfrak{R}_i = \mathfrak{R}$. Wir setzen $\mathfrak{R}^* = \mathfrak{R}^\circ$.

[26a]) Zur Abkürzung bezeichnen wir mit $\overline{\mathfrak{U}}(x \mid \mathfrak{R})$ eine den Punkt x im Raum $\mathfrak{R}$ umgebende Menge.

Nach ε) ist $\mathfrak{R}^*$ absolut-kompakt; nach ζ) ist $\mathfrak{R}$ offen in $\mathfrak{R}^*$; wenn $\mathfrak{R}$ zusammenhängend ist ($\mathfrak{R} = \mathfrak{R}_1$), ist es auch $\mathfrak{R}^* = \mathfrak{R}_i^*$. Die Erweiterung von $\mathfrak{R}$ zu dem absolut-kompakten Raum $\mathfrak{R}^*$ genügt also a), b), und Satz 5 ist im Falle endlich vieler Komponenten von $\mathfrak{R}$ bewiesen. Ist die Anzahl der Komponenten $\mathfrak{R}_i$ unendlich, so bilden wir aus $\mathfrak{R}^\circ = \Sigma \mathfrak{R}_i^*$ durch Hinzunahme eines Punktes x^* einen Raum $\mathfrak{R}^*$, wobei als x^* umgebende Menge $\overline{\mathfrak{U}}^*(x^*)$ jede Menge erklärt wird, die x^* enthält und in der alle $\mathfrak{R}_i^*$, höchstens endlich viele ausgenommen, als Teilmengen enthalten sind; andererseits wird in $\mathfrak{R}^*$ als umgebende Menge $\overline{\mathfrak{U}}^*(x)$ irgendeines Punktes $x \neq x^*$ jede Menge erklärt, in der eine x in $\mathfrak{R}^\circ$ umgebende Menge enthalten ist. Die Axiome ($\overline{\text{A}}$, $\overline{\text{B}}$, $\overline{\text{C}}$, $\overline{\text{D}}$) sind für $\mathfrak{R}^*$ erfüllt. $\mathfrak{R}^*$ ist absolut-kompakt und $\supset \mathfrak{R}$. $\mathfrak{R}$ ist offen in $\mathfrak{R}^\circ$ (nach ζ)), ebenso $\mathfrak{R}^\circ$ in $\mathfrak{R}^*$ (nach Satz (d), Beiträge I, Nr. 2), also auch $\mathfrak{R}$ in $\mathfrak{R}^*$ (nach dem in Beiträge I, Nr. 6 bewiesenen Satz: Wenn $\mathfrak{B}$ in $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{C}$ in $\mathfrak{B}$ offen ist, so auch $\mathfrak{C}$ in $\mathfrak{A}$). $\mathfrak{R}$ ist nicht zusammenhängend, so daß Forderung b) inhaltlos wird. Satz 5 ist damit auch im Falle unendlich vieler Komponenten bewiesen.

Wendet man auf jede nicht absolut-kompakte Komponente eines Raumes, der in jedem Punkte zusammenhängend und in jedem Punkte abgeschlossen-kompakt ist, $\varkappa$) und Satz 1 an, so folgt aus Satz 5:

Satz 6. *Ein nicht absolut-kompakter Raum, der in jedem Punkte zusammenhängend und in jedem Punkte abgeschlossen-kompakt ist, gestattet* (*wenigstens*) *eine den Forderungen* a), b) *genügende Erweiterung zu einem absolut-kompakten Raum*[27]).

Wie Satz 6 zeigt, kann man sich bei der Frage nach der Erweiterungsfähigkeit eines Raumes $\mathfrak{R}$ zu einem absolut-kompakten (wenigstens, wenn $\mathfrak{R}$ in jedem Punkte zusammenhängend ist) auf den Fall eines zusammenhängenden $\mathfrak{R}$ beschränken. Dabei ist jeder zusammenhängende $\mathfrak{R}$, der einer der Forderung a) genügenden Erweiterung zu einem absolut-kompakten Raum $\mathfrak{R}^*$ fähig ist, stets auch einer a) und b) genügenden Erweiterung fähig. Ist nämlich $\mathfrak{K}^*$ die $\mathfrak{R}$ enthaltende Komponente von $\mathfrak{R}^*$, so ist $\mathfrak{K}^*$ gemäß α), δ) absolut-kompakt; und gemäß η) ist $\mathfrak{R}$ in $\mathfrak{K}^*$ offen. Die Erweiterung von $\mathfrak{R}$ zu $\mathfrak{K}^*$ genügt also a) und b). — Durch das Gesagte sind die Bemerkungen in Nr. 4 (Forderung 4a, b) gerechtfertigt.

17. Die Frage, die die Umkehrung der in Nr. 16 behandelten ist, wird erledigt durch folgenden

[27]) Satz 6 läßt sich auch direkt beweisen, indem man genau wie beim Beweis von Satz 1 verfährt, auch $\mathfrak{R}^*$ wie dort konstruiert, und nur, wenn $\mathfrak{R}$ nicht zusammenhängend ist, den Teil des Beweises streicht, der das Zusammenhängendsein von $\mathfrak{R}^*$ betrifft. (Bei solcher Erweiterung kann die Voraussetzung, $\mathfrak{R}$ sei in jedem Punkt zusammenhängend, entbehrt werden.)

Satz 7. *Wenn der Raum $\mathfrak{R}$ einer den Forderungen* a), b) *genügenden Erweiterung zu einem absolut-kompakten Raum $\mathfrak{R}^*$ fähig ist, so ist jede Komponente $\mathfrak{K}$ von $\mathfrak{R}$ entweder ebenfalls einer solchen Erweiterung fähig, oder selbst absolut-kompakt*[28]).

Beweis. Es ist $\mathfrak{K}$ abgeschlossen in $\mathfrak{R}$ (nach α)); also ist $\mathfrak{R} - \mathfrak{K}$ offen in $\mathfrak{R}$; und da $\mathfrak{R}$ offen in $\mathfrak{R}^*$, so ist (nach dem schon herangezogenen Satz, Beiträge I, Nr. 6) $\mathfrak{R} - \mathfrak{K}$ offen in $\mathfrak{R}^*$; also ist $\mathfrak{H} = \mathfrak{R}^* - (\mathfrak{R} - \mathfrak{K}) = \mathfrak{K} + (\mathfrak{R}^* - \mathfrak{R})$ abgeschlossen in $\mathfrak{R}^*$ und daher absolut-kompakt (nach δ)). Da ferner $\mathfrak{U} = \mathfrak{R}^* - \mathfrak{R}$ abgeschlossen in $\mathfrak{R}^*$, und $\mathfrak{U} \subset \mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{R}^*$, so ist gemäß ϑ) $\mathfrak{U}$ abgeschlossen in $\mathfrak{H}$, also $\mathfrak{K} = \mathfrak{H} - \mathfrak{U}$ offen in $\mathfrak{H}$. Sei nun $\mathfrak{K}^*$ jene Komponente von $\mathfrak{H}$, die $\supseteq \mathfrak{K}$ ist. Dann ist $\mathfrak{K}^*$ abgeschlossen in $\mathfrak{H}$, also *absolut-kompakt* (nach δ)). Da nun $\mathfrak{K} \subseteq \mathfrak{K}^* \subseteq \mathfrak{H}$ und $\mathfrak{K}$ offen in $\mathfrak{H}$, so ist $\mathfrak{K}$ *offen in* $\mathfrak{K}^*$ (nach η)). Endlich ist $\mathfrak{K}^*$ *zusammenhängend* (als Komponente). Ist $\mathfrak{K}^* = \mathfrak{K}$, so ist $\mathfrak{K}$ selbst absolut-kompakt, ist $\mathfrak{K}^* \supset \mathfrak{K}$, so liegt eine a), b) genügende Erweiterung von $\mathfrak{K}$ zu einem absolut-kompakten Raum $\mathfrak{K}^*$ vor und Satz 7 ist bewiesen.

§ 5.

18. Zu den in § 1 dargelegten allgemeinen Gesichtspunkten für die Einführung uneigentlicher Elemente tritt zumeist — von den besonderen Gesichtspunkten einer speziellen, zu dieser Einführung veranlassenden Theorie ganz abgesehen — ein weiterer. Voraussetzung ist dabei, daß in dem zu ergänzenden Raum $\mathfrak{R}$ die *Umgebungen* beliebiger Punkte x, y *„von gleicher Art"* sind, d. h. daß es aufeinander topologisch abbildbare Umgebungen $\mathfrak{U}(x)$, $\mathfrak{U}(y)$ gibt, und zwar derart abbildbare, daß dabei x und y einander entsprechen[29]). Man wird in einem solchen Falle eines „(topologisch) homogenen" Raumes $\mathfrak{R}$ an eine Einführung uneigentlicher Elemente meist die Forderung stellen (Forderung 5), daß der *ergänzte Raum* $\mathfrak{R}^*$ gleichfalls *homogen* ausfällt, daß also in $\mathfrak{R}^*$ die Umgebungen aller neu eingeführten Punkte von derselben Art sind, wie die offenbar[30]) unverändert bleibende Art der Umgebungen der Punkte von $\mathfrak{R}$. Schließlich ist in manchen Fällen die Forderung naheliegend, daß jeder Punkt aus $\mathfrak{R}^* - \mathfrak{R}$ (jeder uneigentliche Punkt) Häufungspunkt von Punkten aus $\mathfrak{R}$ (also von eigentlichen Punkten) sein soll (Forderung 6). In den beiden im Text der Nr. 1 genannten Beispielen sind ersichtlich auch diese Forderungen 5, 6

---

[28]) Die Beschränkung auf Räume $\mathfrak{R}$, die in jedem Punkt zusammenhängend sind, kann hier entfallen, da der folgende Beweis, bei dem ich von einer freundlichen Mitteilung von Herrn Hahn Gebrauch mache, keine solche beschränkende Annahme benutzt.

[29]) Vgl. Jahresber. Deutsch. Math. Ver. 29 (1920), S. 103.

[30]) Weil $\mathfrak{R}$ in $\mathfrak{R}^*$ offen sein soll.

erfüllt[31]). Dabei erkennt man leicht die große Mannigfaltigkeit der auch bei Einhaltung dieser Forderungen immer noch möglichen Einführungen uneigentlicher Punkte der Ebene $\mathfrak{R} = \mathfrak{E}$. Denn wenn auf irgendeiner geschlossenen, orientierbaren oder nicht-orientierbaren Fläche $\mathfrak{F}$ endlichen Zusammenhangs[32]) eine abgeschlossene nirgendsdichte[33]) Punktmenge $\mathfrak{M}$ so gewählt wird, daß die Restmenge $\mathfrak{F} - \mathfrak{M}$ einfach-zusammenhängend, also mit $\mathfrak{E}$ topologisch gleichwertig ist, so stellen die Punkte von $\mathfrak{M}$ uneigentliche Punkte vor, deren Einführung allen von uns genannten Forderungen genügt. Die Frage, ob damit die Gesamtheit aller, den Forderungen 1—6 genügenden, topologisch wesentlich verschiedenen Einführungen uneigentlicher Punkte der Ebene erschöpft ist, soll hier unerörtert bleiben, wo die Betrachtung spezieller Gebilde nur der Erläuterung der *allgemeinen* Topologie dienen sollte.

Zusatz. Wenn ich mit der Einsendung dieses Beitrages zögerte, dessen Manuskript bis auf geringe Änderungen schon vor mehr als Jahresfrist fertiggestellt und nahestehenden Fachkollegen vorgelegen war, so geschah es in der Absicht, vorerst über ausländische Literatur über allgemeine Topologie mich besser zu unterrichten. Einiges darüber ist mir inzwischen, z. T. durch freundliches Entgegenkommen der Verfasser, bekannt geworden. Aber von wirklicher Übersicht ist bei den gegenwärtigen Verhältnissen nicht die Rede. Ich muß mich daher damit begnügen, — zugleich in Ergänzung des Zusatzes zu „Beiträge I", — speziell auf die Bearbeitungen hinzuweisen, die die „Überdeckungssätze" gefunden haben. Als eine neuere Publikation hierüber sei eine Arbeit von Robert L. Moore angeführt: On the most general class L of Fréchet in which the Heine-Borel-Lebesgue Theorem holds true. Proceedings National Acad. of Sciences **5** (1919), p. 206. Ich möchte noch beifügen, daß die oben, Nr. 7ff., behandelten Fragen Berührungspunkte mit Untersuchungen der Herren P. Alexandroff und P. Urysohn haben, — Untersuchungen, von denen ich durch freundliche Mitteilung der Herren Kenntnis erhielt und deren Veröffentlichung in Vorbereitung ist.

Erlangen, Mathematisches Seminar, im Oktober 1923.

---

[31]) Im Beispiel Anm. [8]) nur Forderung 5, nicht aber 6.

[32]) D. h. auf einer Fläche, die aus einer endlichen Anzahl von Dreiecken durch paarweise Zuordnungen der Dreiecksseiten entsteht, wobei jede Seite genau einer anderen zugeordnet ist; vgl. etwa Weyl, Die Idee der Riemannschen Fläche (1913), S. 23, 24.

[33]) D. h. eine abgeschlossene Menge, die keine offene Menge als Teil enthält.

(Eingegangen am 12. 10. 1923.)

Über S. Lies Geometrie der Kreise und Kugeln.

Von

E. Study in Bonn.

(Schluß.)

Inhalt.

16. Reelle Figuren.

Bis hierher haben wir den Standpunkt der Geometrie im komplexen Gebiete eingenommen. Abgesehen davon, daß wir die betrachtete Mannigfaltigkeit M_3^2 in einer *speziellen* Gleichungsform und für die Figuren auf ihr eine *spezielle* Parameterdarstellung erhalten hatten, haben wir damit den bei gegebener Dimensionenzahl höchsten möglichen Grad analytischer Allgemeinheit erreicht. *Alles Vorgetragene gilt für alle nicht-singulären Mannigfaltigkeiten* M_3^2. Dabei konnte aber den Besonderheiten, die reellen quadratischen Mannigfaltigkeiten zukommen, nicht Rechnung getragen werden. Hiermit erwächst uns nun eine neue, und, wie sich zeigen wird, sehr interessante Aufgabe, deren Lösung einen bisher ganz ungeahnten Reichtum geometrischer Tatsachen zutage fördern wird.

Vorausschicken muß ich noch die Bemerkung, daß die entwickelte Theorie nicht nur insofern abgeändert werden kann, als auch andere Gleichungsformen und andere Parameterdarstellungen in unendlicher Menge mit genau gleichem Erfolg benutzt werden können, sondern daß ihre Gestaltung auch noch in anderer Beziehung, übrigens *unvermeidlicherweise*, von Definitionen abhängt, die der Willkür unterliegen. Wir hatten ja über die Werte gewisser Wurzelgrößen zum Teil *willkürlich* entschieden. Treffen wir andere Entscheidungen, ersetzen wir z. B. eine Wurzelgröße $\sqrt{\mathfrak{R}}$ durch $\frac{1}{c}\cdot\sqrt{c^2\cdot\mathfrak{R}}$, wo c eine komplexe Konstante bedeutet, so erhalten

wir andere Formeln. Aber wir erhalten dann nichts wirklich Neues, abgesehen von dem einzigen Umstande, daß die neue Festsetzung unter Umständen den Übergang in einen neuen Rationalitätsbereich bedeuten wird. Sehen wir von solchen feineren Unterscheidungen ab, auf die eine spätere Forschung Rücksicht nehmen mag, so können wir Theorien, die sich nur in dieser Weise unterscheiden — *parallele Theorien*, wie wir sagen wollen — als *äquivalent* betrachten. Das eine Formelsystem geht ja aus dem anderen durch eine ganz einfache Transformation hervor.

Diese Äquivalenz paralleler Theorien hört nun auf, sobald es sich um reelle Figuren handelt.

Reelle Figuren nämlich wird man auch durch reelle Koordinaten darzustellen suchen. Z. B. ist es üblich und meistens auch sachgemäß, reelle Punkte durch reelle Werte *auch der homogenen Koordinaten* darzustellen, was dann ein reelles Koordinatensystem voraussetzt. Wo nun die vorhandenen reellen Koordinaten durch Hinzufügung von Wurzelwerten erweitert werden sollen, da kann es geschehen, daß diese Irrationalitäten imaginär werden. Das so erweiterte Größensystem werden wir dann nicht mehr als System von Koordinaten einer *reellen* Figur (z. B. eines reellen orientierten Flachs oder eines reellen Blattes) betrachten dürfen. Aber eine Transformation der Form

$$\sqrt{\mathfrak{R}} = \pm \frac{1}{i}\sqrt{-\mathfrak{R}}$$

wird uns dann (in den Fällen, um die allein es sich hier handelt) wieder *reelle* Figuren liefern.

Wir werden also unter Umständen „reelle" Figuren auf verschiedene Arten erklären können. Die auf solche Figuren bezüglichen Aussagen können nicht als äquivalent erachtet werden. Es ist zu unterscheiden zwischen komplexer und reeller Äquivalenz.

Wenn wir uns nicht ungerechtfertigte Beschränkungen auferlegen und auch nicht zu schleppenden Umschreibungen genötigt sein wollen, so müssen wir weiterhin mit C. Segre erklären: *Reell heißt jede Figur, die mit der konjugiert-komplexen Figur zusammenfällt.* Reell ist hiernach z. B. ein Paar konjugiert-imaginärer Punkte, deren Zusammenfassung ja zu einer Gleichung mit reellen Koeffizienten führt; reell ist, in der ebenen projektiven Geometrie, die Kurve $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0$, mit der ein reelles Polarsystem verbunden ist. Zwischen den reellen und den imaginären Polarsystemen geht der tiefere Schnitt durch, nicht zwischen Kegelschnitten, die einen reellen Zug haben, und solchen, die keinen haben. In Lehrbüchern der analytischen Geometrie wird das häufig verkannt.

Stellen wir uns auf diesen Standpunkt, den einzigen meines Erachtens, der der Natur der Sache entspricht, so erkennen wir alsbald, daß in unserem Falle nicht weniger als *sechs* verschiedene Möglichkeiten der Erklärung reeller Figuren vorliegen. Denn zuerst werden wir die drei Arten reeller M_3^2 in R_4 zu unterscheiden haben, die bei Darstellung einer solchen M_3^2 durch eine gleich Null gesetzte Summe von fünf Quadraten mit reellen Koeffizienten, und zwar durch eine quadratische Form von positiver Diskriminante, den Vorzeichenkombinationen $\{+++++\}$, $\{+----\}$, $\{--+++\}$ entsprechen. Wir unterscheiden also, in üblicher Weise, diese M_3^2 durch die zu jeder von ihnen gehörige *Charakteristik* $\{0\}$, $\{1\}$ oder $\{2\}$, entsprechend der kleineren Zahl gleicher Vorzeichen in den genannten Ausdrücken.

In jedem der drei Fälle haben wir nun die Mannigfaltigkeit der $\infty^{2\cdot 3}$ Geraden auf der M_3^2 zweimal gesetzt, wir haben sie mit zwei *Schichten* überdeckt. *Konjugiert-komplex zu einer solchen Geraden kann dann aber ebensowohl eine Gerade derselben Schicht als auch eine solche der anderen Schicht sein.* Sich dogmatisch für die eine oder andere dieser Annahmen zu entscheiden, halte ich nicht für empfehlenswert, wir würden dann unter allen Umständen eine lückenhafte Theorie erhalten. Vielmehr scheint es mir wichtig, die zwei Möglichkeiten *neben*einander in Betracht zu ziehen, so daß wir also im ganzen der Reihe nach *sechs* verschiedene Annahmen zu untersuchen haben werden. Hinterher mag man, wenn man will, dem einen Fall ein höheres Interesse zuschreiben als dem anderen, und vielleicht einige von ihnen auch ganz zur Seite schieben — doch wird man sich bewußt bleiben müssen, daß damit ein starkes subjektives Moment in die mathematischen Überlegungen hineingetragen wird. Wir wollen auch wirklich nicht alle diese Möglichkeiten genauer betrachten. Übrigens findet sich, daß zweimal zwei von ihnen schon durch reelle Transformationen ineinander übergehen, so daß nur *vier* wesentlich verschiedene Fälle übrig bleiben[98]).

---

[98]) In Lies Kugelgeometrie ist unter diesen vier Fällen tatsächlich nur einer zum Vorschein gekommen. In ähnlicher Weise pflegt man, in der Theorie von Cayleys projektiver Maßbestimmung, sich auf eine Untersuchung der zwei Fälle zu beschränken, die durch Flächen 2. Ordnung der Gleichungsformen

$$x_0^2+x_1^2+x_2^2+x_3^2=0, \quad x_0^2-x_1^2-x_2^2-x_3^2=0$$

bestimmt werden, während die dritte, wenn auch nicht physikalisch, so doch *mathematisch* gleichberechtigte Möglichkeit

$$x_0^2+x_1^2-x_2^2-x_3^2=0$$

gewöhnlich ganz von der Betrachtung ausgeschaltet wird. Zufolge der so entstandenen Gewöhnung ist von Lie und anderen gerade der einfachste Fall nicht beachtet worden, der nämlich, in dem eine Zuordnung von Geraden und „Kugeln“ sich schon im Reellen abspielt.

In jedem der sechs Fälle werden andere Figuren *reell*. Wir reden daher, bei jeder der drei Annahmen $\{0\}$, $\{1\}$, $\{2\}$, von zwei verschiedenen *Realitätsbereichen*, in ähnlicher Weise, wir man in der Algebra *Rationalitätsbereiche* unterscheidet, unter deren Begriff der Begriff des Realitätsbereiches dann teilweise fallen wird. Und wir beginnen mit den beiden Fällen, in denen wir unseren bisherigen analytischen Apparat ohne oder fast ohne formale Änderung werden benutzen können. Offenbar werden alle unsere Formeln *reelle* Figuren dann darstellen, wenn wir erstens im Raume der M_3^2 ein *reelles* Koordinatensystem wählen, und zweitens im Bildraume nur *reelle* Figuren zulassen. Unter diesen Voraussetzungen gehört dann unsere Mannigfaltigkeit M_3^2 zur Charakteristik $\{2\}$: Auf diese werden wir dann die M_3^2 der Charakteristiken $\{1\}$ und $\{0\}$ folgen lassen.

Schränken wir die zuvor benutzten Parameter auf reelle Werte ξ_i und φ_k ein, so erhalten wir eine M_3^2 der Charakteristik $\{2\}$, und auf ihr ausschließlich Figuren, die ebenfalls reell sind. Wir erhalten dann nämlich:

1. *Alle* reellen Geraden X und Y auf M_3^2.

2. Unter den reellen Berührungsebenen von M_3^2 *nur solche*, aber auch *alle* solchen, die die M_3^2 in zwei reellen Geraden schneiden oder sie, im Grenzfall, längs einer Geraden berühren. Wir erhalten folglich als „reelle" Blätter nur solche, die zu diesen Berührungsebenen gehören.

3. Unter den reellen Flachen erhalten wir *nur* solche, aber auch *alle* solchen, die die M_3^2 in einer reell-geradlinigen Fläche schneiden, und dann natürlich auch *nur* die zu solchen Flächen gehörigen orientierten Flache. Darunter befinden sich die berührenden Flache, deren Schnittfigur sich auf einen Kegel mit ∞^1 reellen Erzeugenden reduziert.

Diese Figuren bestimmen nun einen zur M_3^2 der Charakteristik $\{2\}$ gehörigen Realitätsbereich. Zu diesem Bereiche rechnen wir *erstens* die genannten orientierten Blätter und alle Vereine von solchen — also auch die reellen Geraden X und Y —, *zweitens* aber auch alles, was sich, nach Fortsetzung dieser Mannigfaltigkeiten ins komplexe Gebiet, aus Paaren konjugiert-imaginärer Figuren solcher Art zusammensetzt und also Paaren von konjugiert-imaginären Figuren des Bildraumes entspricht. Von einzelnen, d. h. nicht zu Paaren zusammengefaßten Figuren derart aber werden wir sagen, *sie seien im ersten Realitätsbereich imaginär*.

Nennen wir, mit C. Segre, *Konjugium* die involutorische *antikollineare* Transformation, die jedem Punkt den konjugiert-komplexen Punkt, jeder Figur überhaupt die konjugiert-komplexe zuordnet, so können wir kurzweg sagen:

In der benutzten Abbildung entspricht dem Konjugium auf M_3^2, im ersten Realitätsbereich, das Konjugium des Bildraumes.

Hierin liegt schon der weitere Satz:

Im ersten Realitätsbereich auf einer reellen M_2^2 der Charakteristik $\{2\}$ *gehören konjugiert-komplexe Geraden immer zur selben Schicht.*

Also nur zwei Gerade X und X' oder Y und Y' können konjugiert-komplex sein,

$$X' = \bar{X}, \quad Y' = \bar{Y},$$

niemals ist in diesem Zusammenhang

$$X' = \bar{Y}, \quad Y' = \bar{X}.$$

Das würde nämlich bedeuten, daß zu einem Punkt des Bildraumes eine Ebene konjugiert-komplex wäre.

Das Konjugium des Bildraumes bleibt bei allen $2 \cdot \infty^{15}$ reellen Kollineationen und allen $2 \cdot \infty^{15}$ reellen Korrelationen in Ruhe, und nur bei diesen. Also folgt:

Jede der beiden Scharen oder Schichten G_{15}, H_{15} *von eindeutigen Berührungstransformationen auf* M_3^2 *hat im ersten zugehörigen Realitätsbereich zwei reelle Züge.*

Jeder solche „reelle" Zug ist natürlich eine Transformationenschicht, die durch 16 homogene *reelle* Parameter dargestellt werden kann. Eine dieser vier kontinuierlichen Scharen von je ∞^{15} reellen Transformationen reeller *und* imaginärer Figuren enthält die identische Transformation und bildet für sich eine Gruppe, die *Hauptschicht* reeller Transformationen von G_{15}, H_{15}. Setzt man alle vier Transformationenschichten ins komplexe Gebiet hinein fort, so erhält man wieder die Gruppe G_{15}, H_{15}, und zwar jede ihrer beiden Schichten von je $\infty^{2 \cdot 15}$ Transformationen zweimal.

Das Konjugium des Bildraumes kann auch erklärt werden als die Antikollineation, die alle reellen Punkte, oder auch alle reellen Ebenen in Ruhe läßt. Diese beiden Figuren von je ∞^3 Dingen im komplexen Gebiet bilden, nach Segres Terminologie, ein Paar von reziproken dreidimensionalen Ketten[99]). Das Konjugium kann dann auch erklärt werden als die antianalytische Spiegelung[100]), kürzer als *die Spiegelung an diesem Paar reziproker Ketten.* Durch irgendeine Kollineation (oder Korrelation, oder Antikollineation, oder Antikorrelation) aber entsteht aus dem Konjugium immer wieder eine involutorische Antikollineation, die als *Spiegelung* zu einem Paar reziproker Ketten gehört, und es entsteht so jede beliebige Antikollineation dieser Art. Hiermit haben wir den dieser ganzen

---

[99]) Siehe hier und im folgenden: C. Segre, *Un nuovo campo di ricerche geometriche.* Atti di Torino 1890.

[100]) Wegen dieses Begriffs siehe des Verfassers Abhandlung: *Sugli enti analitici.* Circolo di Palermo 21 (1906).

Betrachtung zugrunde liegenden Gedanken, losgelöst von Zufälligkeiten des analytischen Apparats, in seiner wahren Allgemeinheit. Wir haben folgenden Lehrsatz begründet:

XXXIIa. *In der Beziehung einer reellen M_3^2 der Charakteristik* $\{2\}$ *zu ihrem Bildraume entspricht dem Konjugium des zugehörigen ersten Realitätsbereiches immer eine involutorische Antikollineation, die als Spiegelung zu einem Paar von reziproken dreidimensionalen Ketten gehört. Den reellen Geraden X und Y auf M_3^2 entsprechen die Punkte ξ und Ebenen φ dieser beiden Ketten. Ferner entsprechen den ∞^4 reellen orientierten Flachen des genannten Bereiches die ∞^4 geraden Linien des Bildraumes, die mit je ∞^1 solchen Punkten ξ und Ebenen φ vereinigt liegen, und den reellen Blättern entsprechen die vereinigten Paare, die Flächenelemente (ξ, φ). Alle diese Flache durchdringen die M_4^2 in reell-geradlinigen Flächen 2. Ordnung.*

Zu diesen gehört auch unsere absolute Fläche, und zwar zweimal, da ihre Erzeugenden sowohl Geraden X und Y als auch Geraden Y und X sein können. Die Projektionen der übrigen genannten Flächen zweiter Ordnung liegen alle *auf derselben Seite der absoluten Fläche* — im selben Halbraum (oder, mit je zwei ihrer orientierten Geraden, an dessen Grenze)[101]. ∞^4 sind gewöhnliche Regelflächen, die die absolute Fläche in je einem Kegelschnitt berühren. ∞^3 sind *Kegel*, andere ∞^3 sind *abgeplattet* (Platten), doppelt überdeckte Tangentenbüschel irreduzibler Kegelschnitte, die als Punktörter auf der absoluten Fläche liegen. ∞^2 weitere Grenzfälle endlich sind doppelt überdeckte ebene Halbbüschel. (Vgl. § 1, S. 49.)

Konjugiert-komplexen Figuren des ersten Realitätsbereichs entsprechen hier immer Figuren im Bildraume, die durch die involutorische Antikollineation gespart werden, usw. Erscheint, wie zuvor, auch im Bildraume das Konjugium, so erhält man besonders bequem zu gebrauchende Formeln, muß sich aber gegenwärtig halten, daß es sich dann um Tatsachen handelt, die gegenüber der Gesamtgruppe G_{15}, H_{15} von $2 \cdot \infty^{2 \cdot 15}$ Transformationen nicht invariant sind. *Nur invariante Beziehungen erscheinen in unserem Lehrsatz.* Zu beachten ist auch, daß schon bei Zuordnung ausschließlich *reeller* Figuren keine gewöhnlichen Berührungstransformationen vorliegen (vgl. § 15, S. 107—109).

Wir betrachten jetzt *zweitens* das Gebiet des Raumes R_4, in dem die zur Definition der Blätter und orientierten Flache dienenden Wurzelgrößen

---

[101]) Das im anderen Halbraum gelegene Spiegelbild unserer Figur entsteht durch Projektion einer anderen M_3^2,

$$y_0 y_1 - y_2 y_3 - y_4^2 = 0.$$

(Vertausche x_0, x_1, x_2, x_3, x_4 mit y_2, y_3, y_0, y_1, y_4).

rein-imaginäre Werte haben (einschließlich der Null), während ihre übrigen Koordinaten reell sind.

Damit erhalten wir eine neue Reihe *reeller* Figuren, die nun, ähnlich wie oben, das definieren, was wir *den zweiten zur M_3^2 der Charakteristik* $\{2\}$ *gehörigen Realitätsbereich* nennen wollen.

Das Konjugium, d. i. die Transformation, die konjugiert-komplexe Figuren vertauscht, ist in diesem Falle

$$X' = \overline{Y}, \quad Y' = \overline{X}.$$

nicht

$$X' = \overline{X}, \quad Y' = \overline{Y}.$$

Als *reell* zu bezeichnen sind nunmehr

1. Die *Paare* von Geraden X und Y, deren Koordinaten konjugiert-komplex sind. Sind diese Koordinaten insbesondere reell, was zur Folge hat, daß die Geraden X und Y einander überdecken, *so ist auch dann nur das Paar X, Y als eine reelle Figur zu bezeichnen, nicht etwa die einzelne Gerade X oder Y*: Geraden aus verschiedenen Schichten sind ja in dieser ganzen Theorie als durchaus verschieden zu betrachten, als ebenso verschieden, wie im Bildraume Punkte und Ebenen, die wir auch nicht als miteinander identisch ansehen, wenn sie gleiche Koordinaten haben. Man kann also nicht sagen, daß einander überdeckende Geraden *identisch* sind, wie reelle Figuren, die mit ihren konjugiert-komplexen *identisch* sind.

2. Unter den Blättern sind jetzt reell alle solchen und *nur* solche, die zwei der unter 1. genannten konjugiert-komplexen Geraden verbinden. Die Ebene eines solchen Blattes enthält *einen* reellen Punkt auf M_3^2, oder, im Grenzfall, alle reellen Punkte der einander überdeckenden Geraden X und Y. Zwei einander überdeckende Blätter, oder also entgegengesetzt-orientierte Berührungsebenen von M_3^2, haben verschiedene Flächenelemente zu Bildern, nur im Grenzfall, wo die Geraden X und Y einander überdecken, und die beiden Orientierungen der Berührungsebene zusammenfallen, fallen auch die Bilder zusammen. *Kein Paar von verschiedenen im Sinne der Theorie des ersten Realitätsbereiches „reellen" Geraden X, Y auf M_3^2 bestimmt ein nunmehr „reelles" Blatt.*

3. Gewisse orientierte Flache sind jetzt reell, und zwar *alle* solchen und *nur* solche, deren ebener Schnitt *reell und nicht reell-geradlinig, oder, im Grenzfall, ein Kegel* ist. Die zweimal gesetzten Erzeugenden dieses Kegels sind, wie gesagt, hier als konjugiert-imaginäre Figuren zu betrachten. Berührt aber ein nunmehr *reelles* Flach die M_3^2 nicht, so durchsetzt es sie in einer Fläche 2. Ordnung mit ∞^2 reellen Punkten, die *nur* sogenannte nieder-imaginäre Geraden enthält. Jede dieser Geraden hat die zu ihr

konjugiert-imaginäre Gerade in der *anderen* Schar von Erzeugenden und in der *anderen* Schicht.

Alle hier außer Blättern in Betracht kommenden Figuren — Geraden X erster Schicht, Geraden Y zweiter Schicht, Flache — werden am besten als Örter von *Blättern* aufgefaßt.

Reelle *orientierte Flache* ergeben sich jetzt aus solchen reellen (aber noch nicht orientierten) Flachen, für die

$$4(w_0 w_1 - w_2 w_3) + w_4^2 \leqq 0$$

ausfällt (während im ersten Realitätsbereich

$$4(w_0 w_1 - w_2 w_3) + w_4^2 \geqq 0$$

sein mußte). Wir substituieren dementsprechend in unseren früheren Formeln etwa

(1) $$w_5 = -i w_5^*,$$

so daß allgemein (auch im komplexen Gebiet)

(2) $$w_5^* = \sqrt{4(w_2 w_3 - w_0 w_1) - w_4^2} = i(\Xi_{01} + \Xi_{23})$$

wird (siehe § 14, Nr. 16). Es folgt dann (siehe ebenda Nr. 17)

(3) $$\boxed{\begin{array}{lll} \Xi_{01} = -\frac{1}{2}(w_4 + i w_5^*), & \Xi_{02} = -w_1, & \Xi_{03} = w_3, \\ \Xi_{23} = \frac{1}{2}(w_4 - i w_5^*), & \Xi_{31} = w_0, & \Xi_{12} = w_2, \end{array}}$$

und im Falle eines *reellen* Flachs

(4) $$\Xi_{01} : \Xi_{02} : \Xi_{03} : \Xi_{23} : \Xi_{31} : \Xi_{12} = -\bar{\Xi}_{23} : \bar{\Xi}_{02} : \bar{\Xi}_{03} : -\bar{\Xi}_{01} : \bar{\Xi}_{31} : \bar{\Xi}_{12}.$$

Ein solches orientiertes Flach enthält Geraden X und Geraden Y mit konjugiert-komplexen Koordinaten $X_{ik} = \bar{Y}_{ik}$, $Y_{ik} = \bar{X}_{ik}$. Auf diese Art gepaarte Geraden haben nach dem zuvor Gesagten einzeln als *imaginär* zu gelten, auch wenn ihre Koordinaten reell ausfallen. Ihre Parameter genügen den miteinander gleichbedeutenden Gleichungen

(5) $$\begin{array}{l} \varphi_0 : \varphi_1 : \varphi_2 : \varphi_3 = -\bar{\xi}_1 : \bar{\xi}_0 : -\bar{\xi}_3 : \bar{\xi}_2, \\ \xi_0 : \xi_1 : \xi_2 : \xi_3 = \bar{\varphi}_1 : -\bar{\varphi}_0 : \bar{\varphi}_3 : -\bar{\varphi}_2. \end{array}$$

Je zwei solche Geraden definieren nach bestimmter Zuordnung zu Zeichen X, Y *ein reelles Blatt*. Unter der Voraussetzung (5) werden nämlich, wenn man die Proportionen durch die entsprechenden Gleichungen ersetzt, die Ausdrücke (2) in § 15 sämtlich reell, und die Ausdrücke (5) ebenda rein-imaginär.

Wir machen dann ähnliche Substitutionen, wie unter (1), nämlich

$$U_{k5} = -i\,U_{k5}^{*} \qquad (k = 0, 1, 2, 3, 4), \tag{6}$$

und erhalten dann die *reellen* Blätter entsprechend *reellen* Koordinatenwerten

$$U_{01}, U_{02}, \ldots, U_{34}, U_{05}^{*}, U_{15}^{*}, \ldots, U_{45}^{*}.$$

Für die singulären Blätter — die keine bestimmten Berührungspunkte haben — ist nach wie vor

$$\varphi_0 : \varphi_1 : \varphi_2 : \varphi_3 = -\xi_1 : \xi_0 : -\xi_3 : \xi_2 ; \tag{7}$$

ist ein Blatt singulär und reell, so müssen die Gleichungen (5) uud (7) zusammen bestehen.

Die gefundenen Formeln lassen sich nun unschwer deuten. Eliminiert man aus den Gleichungen (5) und der hier überall vorausgesetzten Gleichung

$$\varphi_0\xi_0 + \varphi_1\xi_1 + \varphi_2\xi_2 + \varphi_3\xi_3 = 0$$

die Größen φ oder ξ, so erhält man die Gleichungen

$$\boxed{\begin{aligned} \xi_0\bar{\xi}_1 - \xi_1\bar{\xi}_0 + \xi_2\bar{\xi}_3 - \xi_3\bar{\xi}_2 &= 0, \\ \varphi_0\bar{\varphi}_1 - \varphi_1\bar{\varphi}_0 + \varphi_2\bar{\varphi}_3 - \varphi_3\bar{\varphi}_2 &= 0. \end{aligned}} \tag{8}$$

Von diesen stellt die erste einen Ort (ein quasi-algebraisches Kontinuum) von ∞^5 Punkten, die zweite einen ebensolchen Ort von ∞^5 Ebenen dar, und beide zusammen bilden — nach des Verfassers Terminologie — *ein Paar zueinander reziproker Hermitescher Mannigfaltigkeiten*[102]).

Diese gehören, da die Substitutionen

$$\xi_0 = \frac{\eta_0 + \eta_1}{\sqrt{2}}, \qquad \xi_1 = i\,\frac{\eta_0 - \eta_1}{\sqrt{2}}, \qquad \xi_2 = \frac{\eta_2 + \eta_3}{\sqrt{2}}, \qquad \xi_3 = i\,\frac{\eta_2 - \eta_3}{\sqrt{2}}$$

die Gleichung

$$i\,\{\xi_0\bar{\xi}_1 - \xi_1\bar{\xi}_0 + \xi_2\bar{\xi}_3 - \xi_3\bar{\xi}_2\} = \eta_0\bar{\eta}_0 - \eta_1\bar{\eta}_1 + \eta_2\bar{\eta}_2 - \eta_3\bar{\eta}_3$$

nach sich ziehen, zur *Charakteristik* $\{2\}$.

Sie sind (gegenüber Kollineationen, Korrelationen, Antikollineationen und Antikorrelationen) invariant-verbunden mit einer involutorischen Antikorrelation, die im vorliegenden Falle in Punkt- und Ebenenkoordinaten durch die Gleichungen

$$\begin{aligned} \varphi_0' : \varphi_1' : \varphi_2' : \varphi_3' &= -\bar{\xi}_1 : \bar{\xi}_0 : -\bar{\xi}_3 : \bar{\xi}_2, \\ \xi_0' : \xi_1' : \xi_2' : \xi_3' &= \bar{\varphi}_1 : -\bar{\varphi}_0 : \bar{\varphi}_3 : -\bar{\varphi}_2, \end{aligned} \tag{9}$$

[102]) Die Hermiteschen Mannigfaltigkeiten und die zugehörigen Hermiteschen *Polarsysteme* (*antipolarità*) sind von C. Segre untersucht worden: *Un nuovo campo di ricerche geometriche*, Torino 1890. Vgl. auch A. Loewy, *Über bilineare Formen mit konjugiert-imaginären Variablen*, Nova Acta Leopoldina **71** (1898), Nr. 8; und E. Study, *Kürzeste Wege im komplexen Gebiet*, Math. Ann. **60** (1905), (bes. S. 323, 324).

und in Linienkoordinaten durch die Gleichungen

$$(10)\quad \Xi'_{01}:\Xi'_{02}:\Xi'_{03}:\Xi'_{23}:\Xi'_{31}:\Xi'_{12} = -\bar{\Xi}_{23}:\bar{\Xi}_{02}:\bar{\Xi}_{03}:-\bar{\Xi}_{23}:\bar{\Xi}_{31}:\bar{\Xi}_{12}$$

dargestellt wird. In eben dieser Antikorrelation — oder also in dem mit dem Gleichungspaar (8) verbundenen Hermiteschen Polarsystem — entsprechen sich dann die Bilder konjugiert-komplexer Figuren unseres zweiten Realitätsbereiches; z. B. entsprechen die Bilder der reellen orientierten Flache sich selbst, wie eine Vergleichung der Formeln (4) und (10) unmittelbar erkennen läßt.

Wir haben hiermit, als Seitenstück zu unserem Satze XXXIIa, den

Satz XXXIIb. *In der Beziehung einer reellen M_3^2 der Charakteristik* {2} *zu ihrem Bildraume entspricht dem Konjugium des zugehörigen zweiten Realitätsbereichs die involutorische Antikorrelation, die mit einem Paar von reziproken Hermiteschen Mannigfaltigkeiten verbunden ist. Diese gehören ebenfalls zur Charakteristik* {2} *und sind also „geradlinig", d. h. es gibt ∞^4 gerade Linien, die der einen von ihnen als Örter von Punkten, der anderen als Örter von Ebenen angehören. Diese Geraden sind die Bilder der ∞^4 im zweiten Realitätsbereich reellen orientierten Flache. Alle diese Flache durchdringen die M_4^2 in Flächen 2. Ordnung mit reellen Punkten, aber ohne reelle gerade Linien, oder sie durchdringen sie in Kegeln. Den ∞^5 reellen Blättern aber entsprechen solche Flächenelemente (ξ, φ), die in der Antikorrelation mit sich selbst gepaart sind, deren Punkte also der einen und deren Ebenen folglich der anderen Hermiteschen Mannigfaltigkeit angehören.*

Hierin liegt schon, daß die Punkte (Ebenen) der ersten (zweiten) Hermiteschen Mannigfaltigkeit Bilder solcher Geraden $X\,(Y)$ sind, die wenigstens einen reellen Punkt haben. Die Geraden X, die sich mit den zu ihnen konjugiert-imaginären Geraden Y überdecken, und also mit ihnen zusammen im gewöhnlichen Sinne „reelle" Geraden $X = Y$ bilden, haben zu Bildern die Punkte einer dreidimensionalen Kette, und die Geraden Y haben zu Bildern die Ebenen der reziproken Kette. Die erste dieser Ketten liegt ganz auf der ersten, die zweite ganz auf der zweiten Hermiteschen Mannigfaltigkeit. Die zu beiden Ketten gehörige involutorische Antikollineation (in unseren *Formeln* das Konjugium) ist vertauschbar mit der Antikorrelation des Hermiteschen Polarsystems, und beide erzeugen, zusammengesetzt, die involutorische Korrelation des absoluten Komplexes der Abbildung. ∞^3 Geraden aus diesem Komplex — die ein einziges Kontinuum bilden — liegen also auf den zwei Hermiteschen Mannigfaltigkeiten, und haben zu Bildern die reellen Punkte der M_3^2. Diese ∞^3 Geraden, die unter ∞^{30} Figuren derart willkürlich angenommen werden können, be-

stimmen für sich allein schon die ganze Abbildung; sie bestimmen den linearen Komplex, dem sie angehören, ihre Schnittpunkte und Verbindungsebenen bilden die zwei reziproken Ketten; die zu zu diesen gehörige Spiegelung gibt mit dem Nullsystem des Komplexes zusammengesetzt die Hermitesche Antikorrelation. Da diese, oder also die Figur der zwei Hermiteschen Mannigfaltigkeiten $2\cdot\infty^{15}$ automorphe Kollineationen zuläßt, so sehen wir noch:

Jede der beiden Transformationenscharen der Gruppe $G_{15}\,H_{15}$ hat auch im zweiten der zur M_3^2 der Charakteristik $\{2\}$ gehörigen Realitätsbereiche zwei reelle Züge[103]).

Betrachten wir wieder die Projektion unserer M_4^3, so sehen wir, *daß die absolute Fläche im vorliegenden Falle nicht zu den reellen Figuren gehört.* Sie ist ja reell-geradlinig. Ihre Geraden können, auch im komplexen Gebiete, nicht Gleichungen der Form $X = \overline{Y}$ genügen. Im übrigen ist alles ähnlich wie zuvor, nur daß die Projektionen der Schnitte reeller Flache nicht reell-geradlinig sind, abgesehen von ∞^3, ∞^3 und ∞^2 Grenzlagen: Alle diese Figuren liegen in dem Halbraum, der den zuvor betrachteten ergänzt.

Schließlich werden auch noch einige Bemerkungen über die auf Hermiteschen Mannigfaltigkeiten gelegenen Geraden hier Platz finden dürfen.

Die Hermiteschen Mannigfaltigkeiten der Charakteristik $\{2\}$ sind unter allen nicht-singulären Hermiteschen Mannigfaltigeiten eines quaternären Gebietes dadurch ausgezeichnet, daß sie gerade Linien ganz enthalten. Diese sind in ∞^4 Exemplaren vorhanden, und sie können, unter Entsprechen der zugehörigen Kollineationsgruppen von je 15 wesentlichen Parametern, umkehrbar-eindeutig und überall-stetig den reellen Punkten einer M_4^2 der Charakteristik $\{2\}$ zugeordnet werden[104]). *Alle solchen Geraden, die durch denselben Punkt gehen oder in derselben Ebene liegen, bilden eine eindimensionale* (*Staudtsche*) *Kette. Diese Geraden sind die einzigen analytischen Kurven, die auf der Hermiteschen Punkt-* (*oder Ebenen-*) *Mannigfaltigkeit liegen.*

Eines besonderen Beweises bedarf wohl nur noch der letzte Satz.

Angenommen, es liege auf einer Hermiteschen Punktmannigfaltigkeit

$$\eta_0\overline{\eta}_0 + \varepsilon_1\eta_1\overline{\eta}_1 + \varepsilon_2\eta_2\overline{\eta}_2 + \varepsilon_3\eta_3\overline{\eta}_3 = 0 \qquad (\varepsilon_k = \pm 1;\ \varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3 \neq 1, 1, 1)$$

eine analytische Kurve, die ganz oder in einem gewissen Bereich ihrer

[103]) Auch im vorliegenden Falle lassen sich diese $4\cdot\infty^{15}$ *reellen* Berührungstransformationen explizite aufstellen. Vgl. Math. Ann. 60, S. 323, 324.

[104]) Also den reellen Punkten einer Mannigfaltigkeit des Typus

$$x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 - x_4^2 - x_5^2 - x_6^2 = 0.$$

Punkte in Parameterdarstellung gegeben sei, $\eta = \eta(t)$. Diesem Ort von $\infty^{2\cdot 1}$ Punkten entspricht dann in der Antikorrelation ein Ort von Ebenen $\psi = \psi(\bar{t})$, deren Koordinaten analytische Funktionen des Parameters $\bar{t}$ sind. Wenn nun nicht alle Ebenen $\psi(t')$ mit allen Punkten $\xi(t)$ vereinigt lägen, wenn also die angenommene Kurve keine Gerade wäre, so erhielte man einen Widerspruch: Da jedenfalls die Ebene $\psi(t') = \psi(\bar{t})$ mit dem Punkt $\eta(t)$ vereinigt liegt, so müßte neben der antianalytischen Abhängigkeit $t' = \bar{t}$ auch noch eine analytische $t' = f(t)$ bestehen, also $\bar{t} = f(t)$ sein, was unmöglich ist. Leicht zeigt man dann noch, daß auch die Annahme $\varepsilon_1 \cdot \varepsilon_2 \cdot \varepsilon_3 = -1$ unmöglich ist, so daß nur Hermitesche Mannigfaltigkeiten der Charakteristik $\{2\}$ übrigbleiben.

17. Reelle Figuren (Fortsetzung).

Wir wenden uns jetzt zum Studium einer reellen M_3^2 der Charakterisik $\{1\}$, also einer solchen, die der Vorzeichenkombination $\{+----\}$ oder $\{-++++\}$ entspricht. Wir führen dazu in die Formeln der allgemeinen Theorie neue Veränderliche ein (andere als zuvor)

$$
(1)\qquad
\begin{aligned}
2x_0^* &= x_2 - x_3, & w_0^* &= w_2 - w_3,\\
2x_1^* &= x_1 - x_0, & w_1^* &= w_1 - w_0,\\
2x_2^* &= i(x_1 + x_0), & w_2^* &= -i(w_1 + w_0),\\
2x_3^* &= -x_2 - x_3, & w_3^* &= -w_2 - w_3,\\
2x_4^* &= 2ix_4, & w_4^* &= -iw_4,
\end{aligned}
$$

so daß

$$[w^* x^*] = [w x]$$

wird, und für die *neuen* Punktkoordinaten, die wir schließlich wieder so bezeichnen wollen, wie die alten, die Gleichung

$$(2)\qquad x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 - x_4^2 = 0$$

besteht, wenn der Punkt x auf der zu untersuchenden M_3^2 liegt. Hierauf setzen wir das neue Koordinatensystem wieder als *reell* voraus.

Die hiermit erklärte M_3^2 enthält ∞^3 reelle Punkte, aber keine reellen Geraden. Von ihren $\infty^{2\cdot 3}$ Geraden sind ∞^5 nieder-imaginär, und diese bestimmen, zu reellen Paaren zusammengefaßt, die ∞^3 reellen Berührungsebenen der M_3^2, deren jede die M_3^2 in dem einen reellen Punkt berührt, den beide miteinander gemein haben. Durch die M_3^2 werden (wie übrigens natürlich auch im vorigen Falle) die reellen Punkte von R_4, soweit sie nicht der M_3^2 selbst angehören, auf zwei Kontinua verteilt; man kann in bekannter Weise von „inneren" und „äußeren" Punkten reden. Die inneren sind, wenn man *reelle* Koordinaten benutzt, die, für die

$$(3)\qquad x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 - x_4^2 > 0$$

ist. Nur die reellen Flache, für die

$$(4)\qquad w_0^2 - w_1^2 - w_2^2 - w_3^2 - w_4^2 < 0$$

ist, also die Polaren der *äußeren* Punkte in bezug auf die M_3^2, dringen in das innere Gebiet ein und haben ∞^2 reelle Punkte auf der M_3^2 selbst. Wir wollen zunächst den Orientierungsprozeß so ausführen, daß *diese* Flache und ihre Grenzfälle mit *reellen* „orientierten Flachen" überlagert werden. Dann müssen wir festsetzen, daß konjugiert-imaginäre Geraden auf M_3^2 zu *verschiedenen* Schichten unserer doppelten Überdeckung des Geradenkomplexes von M_3^2 gehören sollen; *reell* werden dann solche Blätter, die konjugiert-imaginäre (und zwar „*nieder-imaginäre*", nämlich einander schneidende) Geraden

$$X \text{ und } Y' = \bar{X} \quad \text{oder} \quad X' = \bar{Y} \text{ und } Y$$

verbinden; und hiermit ist ein *erster Realitätsbereich* auf unserer M_3^2 der Charakteristik $\{1\}$ bestimmt. Dieser Bereich enthält alle reellen Blätter und alle Vereine von solchen, darunter ∞^4 orientierte Flächen 2. Ordnung, die Schnittfiguren der reellen *orientierten* Flache. Ferner gehören zu diesem Realitätsbereich aber auch alle Paare von Figuren, die, nach Fortsetzung der Mannigfaltigkeit der ∞^5 reellen Blätter ins komplexe Gebiet, als *Paare* konjugiert-komplexer Örter von imaginären Blättern, besonders als Paare solcher Vereine erscheinen, *darunter die Paare von konjugiert-imaginären Geraden X und Y*.

Unsere Substitutionen (1) liefern uns nun für die Verhältnisgrößen, die zur Darstellung der Geraden X und Y dienen, die Wertsysteme

$$(5)\qquad \boxed{\begin{array}{ll}
X_{01} = \{\xi_0^2 - \xi_1^2 - \xi_2^2 + \xi_3^2\}, & Y_{01} = -\{\varphi_0^2 - \varphi_1^2 - \varphi_2^2 + \varphi_3^2\}, \\
X_{02} = -i\{\xi_0^2 + \xi_1^2 - \xi_2^2 - \xi_3^2\}, & Y_{02} = -i\{\varphi_0^2 + \varphi_1^2 - \varphi_2^2 - \varphi_3^2\}, \\
X_{03} = 2\{\xi_0\xi_1 - \xi_2\xi_3\}, & Y_{03} = -2\{\varphi_0\varphi_1 - \varphi_2\varphi_3\}, \\
X_{04} = -2i\{\xi_0\xi_3 - \xi_1\xi_2\}, & Y_{04} = -2i\{\varphi_0\varphi_3 - \varphi_1\varphi_2\}, \\
X_{12} = -2i\{\xi_0\xi_1 + \xi_2\xi_3\}, & Y_{12} = 2i\{\varphi_0\varphi_1 + \varphi_2\varphi_3\}, \\
X_{13} = \{\xi_0^2 + \xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2\}, & Y_{13} = \{\varphi_0^2 + \varphi_1^2 + \varphi_2^2 + \varphi_3^2\}, \\
X_{14} = 2i\{\xi_0\xi_2 - \xi_1\xi_3\}, & Y_{14} = -2i\{\varphi_0\varphi_2 - \varphi_1\varphi_3\}, \\
X_{23} = -i\{\xi_0^2 - \xi_1^2 + \xi_2^2 - \xi_3^2\}, & Y_{23} = i\{\varphi_0^2 - \varphi_1^2 + \varphi_2^2 - \varphi_3^2\}, \\
X_{24} = 2\{\xi_0\xi_2 + \xi_1\xi_3\}, & Y_{24} = 2\{\varphi_0\varphi_2 + \varphi_1\varphi_3\}, \\
X_{34} = 2i\{\xi_0\xi_3 + \xi_1\xi_2\}; & Y_{34} = -2i\{\varphi_0\varphi_3 + \varphi_1\varphi_2\}.
\end{array}}$$

Zwei solche Geraden erster und zweiter Schicht werden konjugiert-imaginär, d. h., sie erhalten konjugiert-imaginäre Koordinatenverhältnisse, wenn

$$(6)\qquad \boxed{\varphi_0 : \varphi_1 : \varphi_2 : \varphi_3 = \bar{\xi}_2 : \bar{\xi}_3 : \bar{\xi}_0 : \bar{\xi}_1}$$

ist. Wenn sie überdies einander schneiden, wenn also $(\varphi\xi) = 0$ ist, so haben sie zu Bildern ξ und φ Punkte und Ebenen eben der Hermiteschen Mannigfaltigkeiten der Charakteristik $\{2\}$, die mit der involutorischen Antikorrelation (6) verbunden sind, die nämlich ihre Inzidenzstellen enthalten:

$$(7)\quad \begin{aligned} (\xi_0\bar{\xi}_2 + \xi_2\bar{\xi}_0) + (\xi_1\bar{\xi}_3 + \xi_3\bar{\xi}_1) &= 0, \\ (\varphi_0\bar{\varphi}_2 + \varphi_2\bar{\varphi}_0) + (\varphi_1\bar{\varphi}_3 + \varphi_3\bar{\varphi}_1) &= 0; \end{aligned}$$ [105])

Allgemein schneiden sich zwei Geraden, deren Parameter der Bedingung $(\varphi\xi) = 0$ genügen, in einem Punkte x, dessen Koordinatenverhältnisse den folgenden Formeln zu entnehmen sind:

$$(8)\quad \boxed{\begin{aligned} x_0 &= \{\xi_0\varphi_2 + \xi_1\varphi_3 + \xi_2\varphi_0 + \xi_3\varphi_1\}, \\ x_1 &= \{\xi_0\varphi_3 + \xi_1\varphi_2 - \xi_2\varphi_1 - \xi_3\varphi_0\}, \\ x_2 &= -i\{\xi_0\varphi_3 - \xi_1\varphi_2 - \xi_2\varphi_1 + \xi_3\varphi_0\}, \\ x_3 &= -\{\xi_0\varphi_2 - \xi_1\varphi_3 - \xi_2\varphi_0 + \xi_3\varphi_1\}, \\ x_4 &= i\{\xi_0\varphi_0 + \xi_1\varphi_1 - \xi_2\varphi_2 - \xi_3\varphi_3\}. \end{aligned}}$$

Unter der Voraussetzung (6) wird dieser Punkt reell. Ferner bestimmen zwei Gerade X, Y, die einander schneiden, eine Ebene mit den Verhältnisgrößen

$$(9)\quad \boxed{\begin{aligned} U_{01} &= U_{234} = -i\{\xi_0\varphi_1 + \xi_1\varphi_0 - \xi_2\varphi_3 - \xi_3\varphi_2\}, \\ U_{02} &= -U_{134} = -\{\xi_0\varphi_1 - \xi_1\varphi_0 - \xi_2\varphi_3 + \xi_3\varphi_2\}, \\ U_{03} &= U_{124} = i\{\xi_0\varphi_0 - \xi_1\varphi_1 - \xi_2\varphi_2 + \xi_3\varphi_3\}, \\ U_{04} &= -U_{123} = \{\xi_0\varphi_2 + \xi_1\varphi_3 - \xi_2\varphi_0 - \xi_3\varphi_1\}, \\ U_{12} &= U_{034} = -\{\xi_0\varphi_0 - \xi_1\varphi_1 + \xi_2\varphi_2 - \xi_3\varphi_3\}, \\ U_{13} &= -U_{024} = i\{\xi_0\varphi_1 - \xi_1\varphi_0 + \xi_2\varphi_3 - \xi_3\varphi_2\}, \\ U_{14} &= U_{023} = -\{\xi_0\varphi_3 + \xi_1\varphi_2 + \xi_2\varphi_1 + \xi_3\varphi_0\}, \\ U_{23} &= U_{014} = \{\xi_0\varphi_1 + \xi_1\varphi_0 + \xi_2\varphi_3 + \xi_3\varphi_2\}, \\ U_{24} &= -U_{013} = i\{\xi_0\varphi_3 - \xi_1\varphi_2 + \xi_2\varphi_1 - \xi_3\varphi_0\}, \\ U_{34} &= U_{012} = \{\xi_0\varphi_2 - \xi_1\varphi_3 + \xi_2\varphi_0 - \xi_3\varphi_1\} \end{aligned}}$$

als Koordinaten, die, als Koordinaten einer Tangentialebene der Mannig-

---

[105]) Setzt man

$$\xi_0 = \frac{\eta_0 + \eta_1}{\sqrt{2}}, \qquad \xi_1 = \frac{\eta_2 + \eta_3}{\sqrt{2}}, \qquad \xi_2 = \frac{\eta_0 - \eta_1}{\sqrt{2}}, \qquad \xi_3 = \frac{\eta_2 - \eta_3}{\sqrt{2}},$$

so wird

$$\xi_0\bar{\xi}_2 + \xi_1\bar{\xi}_3 + \xi_2\bar{\xi}_0 + \xi_3\bar{\xi}_1 = \eta_0\bar{\eta}_0 - \eta_1\bar{\eta}_1 + \eta_2\bar{\eta}_2 - \eta_3\bar{\eta}_3.$$

faltigkeit (2), außer den fünf Plückerschen Gleichungen der quadratischen Gleichung

$$(10)\quad U_{01}^2 + U_{02}^2 + U_{03}^2 + U_{04}^2 - U_{12}^2 - U_{13}^2 - U_{14}^2 - U_{23}^2 - U_{24}^2 - U_{34}^2 = 0$$

Genüge leisten. Diese Ebene wird unter der Voraussetzung (6) ebenfalls reell. Ihre Koordinaten können aus den Koordinaten X_{ik} auch durch den Polarenprozeß erhalten werden, so nämlich, daß man erst die Koordinaten X_{ik} polarisiert, dann an Stelle der neuen Veränderlichen η_k die entsprechenden Veränderlichen φ_k einführt, und schließlich bei allen denen, die den Index 0 nicht enthalten, das Vorzeichen wechselt. Sie wird (auch im komplexen Gebiete) dadurch orientiert, in ein Blatt verwandelt, daß man neben die Verhältnisgrößen (9) die folgenden voneinander abhängigen Wurzelwerte stellt, die im Falle einer reellen Ebene ebenfalls reell werden:

$$(11)\quad \boxed{\begin{aligned}
U_{05} &= \sqrt{U_{01}^2 + U_{02}^2 + U_{03}^2 + U_{04}^2} \\
&= \{\xi_0\varphi_2 + \xi_1\varphi_3 + \xi_2\varphi_0 + \xi_3\varphi_1\}, \\
U_{15} &= \sqrt{-U_{01}^2 + U_{12}^2 + U_{13}^2 + U_{14}^2} \\
&= -\{\xi_0\varphi_3 + \xi_1\varphi_2 - \xi_2\varphi_1 - \xi_3\varphi_0\}, \\
U_{25} &= \sqrt{-U_{02}^2 + U_{12}^2 + U_{23}^2 + U_{24}^2} \\
&= i\{\xi_0\varphi_3 - \xi_1\varphi_2 - \xi_2\varphi_1 + \xi_3\varphi_0\}, \\
U_{35} &= \sqrt{-U_{03}^2 + U_{13}^2 + U_{23}^2 + U_{34}^2} \\
&= \{\xi_0\varphi_2 - \xi_1\varphi_3 - \xi_2\varphi_0 + \xi_3\varphi_1\}, \\
U_{45} &= \sqrt{-U_{04}^2 + U_{14}^2 + U_{24}^2 + U_{34}^2} \\
&= -i\{\xi_0\varphi_0 + \xi_1\varphi_1 - \xi_2\varphi_2 - \xi_3\varphi_3\}.
\end{aligned}}$$

Sind die Größen $U_{01} \dots U_{34}$ gegeben, so daß neben den Plückerschen Gleichungen die Gleichung (10) erfüllt ist, so gibt es *zwei* Wertsysteme der Größen $U_{05} \dots U_{45}$, für die die Gleichungen (9) und (11) miteinander und mit der Gleichung

$$0 = \xi_0\varphi_0 + \xi_1\varphi_1 + \xi_2\varphi_2 + \xi_3\varphi_3$$

verträglich werden. Alle 15 Größen U_{ik} genügen dann 15 Gleichungen der Plückerschen Form

$$U_{ik}U_{lm} + U_{il}U_{mk} + U_{im}U_{lk} = 0.$$

Man hat so im ganzen 16 Gleichungen, die linear sind für die 16 Produkte $\xi_i\varphi_k$, und also, in jedem der zwei Fälle, die beiden Systeme von Verhältnisgrößen

$$\xi_0 : \xi_1 : \xi_2 : \xi_3, \qquad \varphi_0 : \varphi_1 : \varphi_2 : \varphi_3$$

eindeutig bestimmen. Vgl. § 15, Nr. 5, 6.

Schließlich können wir auch noch die unter (1) eingeführten Flache w^* orientieren. Wir ergänzen zu diesem Zwecke die Formeln (1) durch die Definitionsgleichung

$$(12) \qquad w_5^* = -iw_5,$$

derzufolge, wenn wir schließlich auch hier wieder die einfacheren Zeichen w_k an Stelle von w_k^* gebrauchen,

$$(13) \qquad w_0^2 - w_1^2 - w_2^2 - w_3^2 - w_4^2 + w_5^2 = 0$$

wird. Diese *orientierten* Flache entsprechen dann umkehrbar-eindeutig geraden Linien des Bildraumes; die früher (§ 14 Nr. 17) abgeleiteten Formeln nehmen jetzt die folgende Gestalt an:

$$(14) \qquad \boxed{\begin{array}{lll} \Xi_{01} = -i(w_4 - w_5), & \Xi_{02} = -w_1 - iw_2, & \Xi_{03} = -w_0 - w_3, \\ \Xi_{23} = i(w_4 + w_5), & \Xi_{31} = -w_1 + iw_2, & \Xi_{12} = w_0 - w_3, \end{array}}$$

oder, in aufgelöster Form

$$(15) \qquad \boxed{\begin{array}{lll} 2w_0 = -\Xi_{03} + \Xi_{12}, & 2w_2 = i(\Xi_{02} - \Xi_{31}), & 2w_4 = i(\Xi_{01} - \Xi_{23}), \\ 2w_1 = -\Xi_{02} - \Xi_{31}, & 2w_3 = -(\Xi_{03} + \Xi_{12}), & 2w_5 = -i(\Xi_{01} + \Xi_{23}). \end{array}}$$

Ist das orientierte Flach w *reell*, d. h. sind die Verhältnisse der *sechs* Größen $w_0 \ldots w_5$ reell, so ist die Gerade Ξ in der involutorischen Antikorrelation (6) sich selbst zugeordnet. Sie gehört dann als Ort von Punkten und Ebenen den beiden durch die Gleichungen (7) definierten Hermiteschen Mannigfaltigkeiten an, die eben die Antikorrelation (6) bestimmen. Allgemein aber werden konjugiert-komplexe Figuren zu Bildern Figuren haben, die durch dieselbe Antikorrelation gepaart werden; für Flache w, $\bar{w}$ derart z. B. ist

$$(16) \qquad \Xi'_{01} : \Xi'_{02} : \Xi'_{03} : \Xi'_{23} : \Xi'_{31} : \Xi'_{12} = \bar{\Xi}_{01} : -\bar{\Xi}_{31} : -\bar{\Xi}_{03} : \bar{\Xi}_{23} : -\bar{\Xi}_{02} : -\bar{\Xi}_{12}.$$

Mit alledem ist der folgende Lehrsatz begründet:

XXXIIIa. *Auch in der Beziehung einer reellen M_3^2 der Charakteristik $\{1\}$ zu ihrem Bildraume entspricht dem Konjugium des zugehörigen ersten Realitätsbereiches eine involutorische Antikorrelation, die mit einem Paar von reziproken Hermiteschen Mannigfaltigkeiten der Charakteristik $\{2\}$ verbunden ist.*

Die $2 \cdot \infty^5$ nieder-imaginären Geraden X und Y haben zu Bildern die Punkte und Ebenen dieser zwei Hermiteschen Mannigfaltigkeiten. Die ∞^4 im ersten Realitätsbereich reellen orientierten Flache haben zu Bildern die Geraden, die auf diesen Mannigfaltigkeiten liegen. Endlich haben die ∞^5 reellen Blätter zu Bildern die Flächenelemente, deren Punkte und Ebenen

die beiden Hermiteschen Mannigfaltigkeiten erfüllen, und durch die zugehörige Antikorrelation gepaart sind.

Hierin liegt ein vielleicht etwas überraschendes Resultat: Die ∞^5 im vorliegenden Falle *reellen* Blätter haben genau dieselben gegenseitigen Beziehungen (dieselbe „innere Geometrie") wie die reellen Blätter, die zum *zweiten* Realitätsbereich einer M_3^2 der Charakteristik $\{2\}$ gehören. Um diese beiden Blättermannigfaltigkeiten aufeinander zu beziehen, braucht man nur die beiden Hermiteschen Mannigfaltigkeiten, unsere frühere

$$\xi_0\bar{\xi}_1 - \xi_1\bar{\xi}_0 + \xi_2\bar{\xi}_3 - \xi_3\bar{\xi}_2 = 0$$

und die jetzige

$$\eta_0\bar{\eta}_2 + \eta_2\bar{\eta}_0 + \eta_3\bar{\eta}_3 + \eta_1\bar{\eta}_1 = 0$$

ineinander überzuführen, was zum Beispiel bewirkt wird, wenn man

$$(17) \qquad \eta_0 = i\xi_0, \quad \eta_1 = i\xi_2, \quad \eta_2 = \xi_1, \quad \eta_3 = \xi_3$$

setzt. Nach XXXII b und XXXIII a werden damit die reellen Blätter der zwei Realitätsbereiche eindeutig und natürlich auch überall stetig einander zugeordnet, und damit werden diese Realitätsbereiche selbst ebenfalls eindeutig und stetig aufeinander abgebildet, und zwar durch eine reelle Berührungstransformation.

Die Gruppen $G_{15}^{(2)}, H_{15}^{(2)}$ und $G_{15}^{(1)}, H_{15}^{(1)}$ von Berührungstransformationen, die zu zwei M_3^2 der Charakteristiken $\{2\}$ und $\{1\}$ gehören, können durch birationale Berührungstransformationen einander so zugeordnet werden, daß die im zweiten Bereich der ersten M_3^2 und die im ersten Bereich der zweiten M_3^2 reellen Transformationen einander entsprechen[106]). *Dabei gehen die reellen aber nicht reell-geradlinigen zweidimensionalen ebenen Schnitte (Schnitte mit orientierten Flachen) der ersten M_3^2, samt ihren singulären Grenzlagen*[107]), *über in die reellen und nicht reell-geradlinigen orientierten ebenen Schnitte der zweiten M_3^2.*

Natürlich umfassen dann auch die Scharen $G_{15}^{(1)}, H_{15}^{(1)}$ je zwei Scharen von ∞^{15} *reellen* Transformationen, und die Überführung der reellen Transformationen beider Gruppen ineinander ist auf $4\cdot\infty^{15}$ Arten möglich. Die Aufstellung von Formeln hierzu wollen wir in der Hauptsache dem Leser überlassen; doch seien wenigstens Formeln angeführt, die eine nach (16) zu bestimmende Zuordnung von Geraden X und X^* der zu den Charakteristiken $\{2\}$ und $\{1\}$ gehörigen Mannigfaltigkeiten darstellen:

---

[106]) Nach Lies Terminologie sind also diese beiden Gruppen zueinander *reell-ähnlich.*

[107]) Diese Grenzlagen sind nach der üblichen Definition, reell-geradlinig, nach der hier in Betracht kommenden Definition aber nicht.

$$
(18)\qquad \{1\}\qquad
\begin{aligned}
X_{01}^{*} &= -\{X_{02} - X_{03} + X_{12} - X_{13}\},\\
X_{02}^{*} &= i\{X_{02} + X_{03} - X_{12} - X_{13}\},\\
X_{03}^{*} &= 2\{X_{04} + X_{14}\},\\
X_{04}^{*} &= -2\{X_{24} - X_{34}\},\\
X_{12}^{*} &= -2i\{X_{04} - X_{14}\},\\
X_{13}^{*} &= -\{X_{02} + X_{03} + X_{12} + X_{13}\},\\
X_{14}^{*} &= 2X_{23},\\
X_{23}^{*} &= i\{X_{02} - X_{03} - X_{12} + X_{13}\},\\
X_{24}^{*} &= 2iX_{01},\\
X_{34}^{*} &= 2\{X_{24} + X_{34}\}.
\end{aligned}
\qquad \{2\}
$$

Ersetzt man hier i, X und X^* durch $-i$, Y und Y^*, so erhält man die entsprechende Zuordnung der Geraden zweiter Schicht. Die Formeln (17) allein schon aber bestimmen die ganze Berührungstransformation.

Es werden also (zum Beispiel) durch die Transformation (18) *die auf einer reellen M_3^2 von der Charakteristik* $\{2\}$ *gelegenen Geraden X so in die Geraden X^* übergeführt, die auf einer reellen M_3^2 von der Charakteristik* $\{1\}$ *liegen, daß der Sekantenkongruenz irgendeiner Geraden Y der ersten M_3^2 die Sekantenkongruenz einer Geraden Y^* der zweiten M_3^2 entspricht. Den Geraden Y werden dann die Geraden Y^* durch eine zweite Transformation derart zugeordnet.*

Diese gepaarten Transformationen sind beide so beschaffen, daß sie nieder-imaginäre Geraden X, Y auf der ersten M_3^2 und auch deren Grenzlagen, nämlich einander überdeckende Geraden X, Y, in (natürlich ausnahmslos) nieder-imaginäre Geraden X^*, Y^* der zweiten M_3^2 überführen.

Hervorgehoben zu werden verdient noch eine an sich selbstverständliche Bemerkung:

Die $4\cdot\infty^{15}$ analytischen Berührungstransformationen, die im hier betrachteten Falle die reellen Blätter der M_3^2 untereinander vertauschen, — also die reellen Transformationen der Gruppe $G_{15}^{(1)}$, $H_{15}^{(1)}$ — sind, soweit ihre Objekte eben nur reelle Blätter sind, Berührungstransformationen auch im gewöhnlichen Sinne des Wortes. Denn die singulären Blätter, die unendlich viele ($\infty^{2\cdot 1}$) Berührungspunkte haben, sind ja hier sämtlich imaginär. Hierauf beruht das besondere Interesse des vorliegenden Falles, der sich eben *im Reellen* besonders einfach verhält. Will man aber von hier aus den Übergang zur Plückerschen Liniengeometrie vollziehen — was durch das Vorgehende vollständig geleistet ist — so wird die Einführung imaginärer Figuren, die zum Teil ganz andere Eigenschaften haben,

unerläßlich: Die Gruppen $G_{15}^{(1)}$, $H_{15}^{(1)}$ und Γ_{15}, H_{15} sind zueinander *ähnlich*, in dem Sinne, den S. Lie mit diesem Wort verbunden hat, die reellen Transformationen beider Gruppen aber sind es nicht. Die hier eingeführten neuen Begriffsbildungen lassen sich also nicht umgehen, wenn man nicht auf eine wesentliche Seite der Sache Verzicht leisten will.

In der *Projektion* unserer Figuren auf das Flach $x_4 = 0$ erscheinen Figuren, die, soweit sie reell sind, ausschließlich dem Inneren der absoluten Fläche oder dessen Grenze angehören. Dieses Innere,

$$x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 > 0,$$

wird mit orientierten Punkten, Örtern reeller Blätter, doppelt überdeckt, wobei die Punkte der absoluten Fläche selbst als Verzweigungsfiguren fungieren. In diesem („sphärischen") Kontinuum sind die reellen konformen Transformationen (die reellen Transformationen der Gruppe G_{10}^{*}) durchweg eindeutig und stetig. Als Projektionen der reellen orientierten ebenen Schnitte der M_3^2 erscheinen „orientierte Kugeln", deren in der Regel *vier* dieselbe nicht orientierte Kugel (Kugel der *„hyperbolischen"* Geometrie) überdecken. Nicht singuläre „Kugeln" derart haben ihre Mittelpunkte innerhalb oder außerhalb der absoluten Fläche (im zugänglichen oder im unzugänglichen Gebiet), oder sie sind „Grenzkugeln", die die absolute Fläche in einem einzigen Punkte berühren. Ausnahmefälle sind:

(α) ∞^3 Nullkugeln (orientierte Punkte);

(β) ∞^3 Platten;

(α, β) ∞^2 singuläre Grenzkugeln, solche nämlich, die Nullkugeln und Platten zugleich sind;

(γ) die absolute Fläche selbst, *die als orientierte reelle Kugel hier zweimal erscheint.*

In dem, was nun folgt, wollen wir uns kürzer fassen, und zwar deshalb, weil in den nunmehr zu betrachtenden Fällen die elementaren Figuren, mit denen allein wir uns beschäftigt haben, einzeln genommen zumeist oder alle imaginär sind.

Wir lassen jetzt die zu einer Geraden $X(Y)$ auf M_3^2 konjugierte komplexe Gerade derselben Schicht angehören, und erklären dadurch den zu einer M_3^2 von der Charakteristik $\{1\}$ gehörigen *zweiten Realitätsbereich.* Das zu diesem gehörige *Konjugium* wird also dargestellt durch die Gleichungen

$$X = \overline{X}, \quad Y' = \overline{Y}. \tag{19}$$

Reell sind jetzt solche Transformationen der Gruppe (G_{15}, H_{15}), die mit

der Transformation (19) vertauschbar sind. Als *Bild* unseres nunmehrigen Konjugiums erscheint, nach Nr. (5), die involutorische Antikollineation

$$(20)\qquad \boxed{\begin{aligned} \xi_0' : \xi_1' : \xi_2' : \xi_3' &= \bar{\xi}_3 : -\bar{\xi}_2 : \bar{\xi}_1 : -\bar{\xi}_0, \\ \varphi_0' : \varphi_1' : \varphi_2' : \varphi_3' &= \bar{\varphi}_3 : -\bar{\varphi}_2 : \bar{\varphi}_1 : -\bar{\varphi}_0, \end{aligned}}$$

die in Linienkoordinaten durch die Gleichungen

$$(21)\qquad \Xi_{01}' : \Xi_{02}' : \Xi_{03}' : \Xi_{23}' : \Xi_{31}' : \Xi_{12}' = \bar{\Xi}_{23} : \bar{\Xi}_{31} : \bar{\Xi}_{03}\, \bar{\Xi}_{01} : \bar{\Xi}_{02} : \bar{\Xi}_{12}'$$

dargestellt werden kann. Sie ist eine der im quaternären Gebiet vorhandenen ∞^{15} involutorischen Antikollineationen zweiter Art, die keine Inzidenzpunkte und Inzidenzebenen, wohl aber je ∞^4 Inzidenzgeraden haben (deren Koordinaten man, in unserem Falle, dem Gleichungssystem (21) entnimmt).

Die Flache, die nunmehr aus der M_3^2 reelle orientierte Flächen 2. Ordnung ausschneiden, verlaufen ganz außerhalb der M_3^2, abgesehen von denen, die sie in einem einzigen Punkte berühren. Wir erhalten den Lehrsatz:

XXXIIIb. *In der Beziehung einer reellen M_3^2 der Charakteristik $\{1\}$ zu ihrem Bildraume entspricht dem Konjugium des zugehörigen zweiten Realitätsbereiches eine involutorische Antikollineation ohne Inzidenzpunkte und Inzidenzebenen. Es gibt in diesem Falle weder reelle Geraden X oder Y, noch auch reelle Blätter, wohl aber reelle orientierte Flache. Diese haben zu Bildern die ∞^4 Inzidenzgeraden der Antikollineation.*

Die Koordinaten dieser Flache, die entweder gar keine reellen Punkte von M_3^2 enthalten, oder nur einen einzigen, werden gefunden, wenn man an Stelle der Gleichung (12) diese andere treten läßt:

$$(22)\qquad w_5^* = w_5.$$

Es folgt dann

$$(23)\qquad w_0^2 - w_1^2 - w_2^2 - w_3^2 - w_4^2 - w_5^2 = 0,$$

$$(24)\qquad \boxed{\begin{aligned} \Xi_{01} &= -i w_4 + w_5, & \Xi_{02} &= -w_1 - i w_2, & \Xi_{03} &= -w_0 - w_3, \\ \Xi_{23} &= i w_4 + w_5, & \Xi_{31} &= -w_1 + i w_2, & \Xi_{12} &= w_0 - w_3, \end{aligned}}$$

$$(25)\qquad \boxed{\begin{aligned} 2w_0 &= -\Xi_{03} + \Xi_{12}, & 2w_2 &= i(\Xi_{02} - \Xi_{31}), & 2w_4 &= i(\Xi_{01} - \Xi_{23}), \\ 2w_1 &= -\Xi_{02} - \Xi_{31}, & 2w_3 &= -(\Xi_{03} + \Xi_{12}), & 2w_5 &= (\Xi_{01} + \Xi_{23}). \end{aligned}}$$

Die zu einer M_3^2 der Charakteristik $\{1\}$ gehörige Gruppe (G_{15}, H_{15}) hat im zweiten Realitätsbereich der M_3^2 $2\cdot\infty^{15}$ reelle Transformationen[108]).

[108]) Diese sind durch sechzehn homogene Parameter mit bilinearer Zusammensetzung reell-darstellbar. Vgl. Mathem. Zeitschrift 18 (1923), S. 81.

Ebenso viele Transformationen gibt es übrigens auch in den beiden folgenden Fällen.

Wir betrachten in Kürze noch die M_3^2 von der Charakteristik $\{0\}$. Ein „erster" Realitätsbereich sei jetzt definiert durch die Gleichungen

$$X' = \overline{X}, \qquad Y' = \overline{Y}.$$

XXXIVa. *In der Beziehung einer reellen M_3^2 der Charakteristik $\{0\}$ zu ihrem Bildraume entspricht dem Konjugium des zugehörigen ersten Realitätsbereichs wiederum eine involutorische Antikollineation zweiter Art.*

Der Satz XXXIVa verhält sich zu dem Satz XXXIIIb gerade so, wie der Satz XXXIIIa zu dem Satz XXXIIb.

Die Geraden X, Y und Blätter (X, Y) sind alle imaginär, nicht aber alle orientierten Fläche.

Einen zweiten Realitätsbereich erhalten wir durch die Zuordnung

$$X' = \overline{Y}, \qquad Y' = \overline{X}.$$

XXXIVb. *In der Beziehung einer reellen M_3^2 der Charakteristik $\{0\}$ zu ihrem Bildraume entspricht dem Konjugium des zugehörigen zweiten Realitätsbereichs das Polarsystem einer Hermiteschen Form von der Charakteristik $\{0\}$.*

In diesem Falle sind alle betrachteten Figuren, auch die Fläche, einzeln genommen, imaginär.

Es sind also in unserer Untersuchung alle im R_3 der projektiven Geometrie vorhandenen involutorischen Antikollineationen und Antikorrelationen aufgetreten, *mit Ausnahme der Hermiteschen Polarsysteme von der Charakteristik* $\{1\}$[109]).

In der vorausgehenden Untersuchung ist die M_3^2 nicht auf alle möglichen Arten in einen Raum von drei Dimensionen projiziert worden. Wir haben daher auch noch nicht alle möglichen Arten des „Einbaus" einer Geometrie reeller Kugeln in die verschiedenen Arten reeller Nicht-Euklidischer Geometrie gefunden. Es wird deshalb nicht überflüssig sein, den ganzen zuletzt behandelten Stoff nochmals vorzuführen (unter Hervorhebung nur des Wesentlichsten). Dabei wollen wir nunmehr auch den verschie-

---

[109]) Fügen wir auch in diesem Falle noch die ∞^{15} mit der Hermiteschen Antikorrelation vertauschbaren Transformationen der Gruppe Γ_{15} hinzu, so erhalten wir alle möglichen Arten der „Zusammensetzung" *reeller* Transformationsgruppen, die mit der Gruppe Γ_{15} gleichzusammengesetzt sind. Es gibt ihrer also im ganzen fünf. Die zu den vorigen hier hinzugekommenen Gruppen sind, als Gruppen *reeller* Transformationen, erst in Mannigfaltigkeiten M_6 lebensfähig.

denen Arten reeller Kugelgeometrie selbst „Charakteristiken" [3], [2], [1], [0] zuordnen[110]).

XXXV. *Es gibt vier Arten reeller „Kugelgeometrie", gehörig zu Transformationsgruppen* (G_{15}, H_{15}). *Diese lassen sich wie folgt kennzeichnen:*

[3] Die M_3^2 gehört zur Charakteristik $\{2\}$. Auf ihr gibt es $2\cdot\infty^3$ reelle Geraden X und Y, daher ∞^5 reelle Blätter, ∞^4 reelle orientierte Kugeln. *Das Bild des Konjugiums* ($X'=\overline{X}$, $Y'=\overline{Y}$) *ist eine involutorische Antikollineation erster Art.* $4\cdot\infty^{15}$ reelle Transformationen in G_{15}, H_{15}.

[2] Die M_3^2 gehört *entweder* zur Charakteristik $\{2\}$ *oder* zur Charakteristik $\{1\}$. Es gibt auf ihr keine reellen Geraden X und Y[111]), wohl aber ∞^5 reelle Blätter und ∞^4 reelle orientierte Kugeln. *Bild des Konjugiums* ($X'=\overline{Y}$, $Y'=\overline{X}$) *ist eine involutorische Antikorrelation* der Charakteristik $\{2\}$. $2\cdot\infty^{15}$ reelle Transformationen in G_{15}, H_{15}.

[1] Die M_3^2 gehört *entweder* zur Charakteristik $\{1\}$ *oder* zur Charakteristik $\{0\}$. Es gibt weder reelle Geraden X, Y, noch reelle Blätter, wohl aber ∞^4 reelle orientierte Kugeln. *Bild des Konjugiums* ($X'=\overline{X}$, $Y'=\overline{Y}$) *ist eine involutorische Antikollineation zweiter Art.* $2\cdot\infty^{15}$ reelle Transformationen.

[0] Die M_3^2 gehört zur Charakteristik $\{0\}$. Die Geraden X, Y, die Blätter und auch die *orientierten* Kugeln sind imaginär. *Bild des Konjugiums* ($X'=\overline{Y}$, $Y'=\overline{X}$) *ist eine involutorische Antikorrelation der Charakteristik* $\{0\}$. $2\cdot\infty^{15}$ reelle Transformationen.

In die auf eine reelle Fläche 2. Grades der Charakteristik $\{2\}$, $\{1\}$ *oder* $\{0\}$ *zu gründenden Arten der Maßgeometrie lassen sich diese vier Arten reeller Kugelgeometrie so einordnen:*

$$\{2\} \qquad x_0^2 - x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 0.$$

(Cayleysche Geometrie.)

[3] *kommt zweimal vor* (*einmal auf jeder Seite der absoluten Fläche*), (+).
[2] *kommt ebenso zweimal vor.* (−).

$$\{1\} \qquad x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 = 0.$$

(Hyperbolische Geometrie.)

[3] *kommt einmal vor* (*außerhalb der absoluten Fläche*). (−).
[2] *kommt zweimal vor* (*außerhalb wie innerhalb der absoluten Fläche*). (+).
[1] *kommt einmal vor.* (−).

$$\{0\} \qquad x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0.$$

(Elliptische Geometrie.)

[1], (+), *und* **[0]**, (−), *je einmal.*

---

110) Entsprechend den vier Arten reeller M_4^2 in einem R_5. Vgl. die Anmerkungen Nr. 90, 91.

111) Auch im Falle der Charakteristik $\{2\}$ nicht. Siehe S. 231.

Die dieser Aufzählung beigefügten *Zeichen* (+) *und* (−) beziehen sich auf das Verhalten der absoluten Fläche. (+) heißt: Sie geht durch den Orientierungsprozeß in eine im Sinne der entwickelten Theorie *reelle* Figur (orientierte Kugel) über, (−) bedeutet, sie wird dadurch imaginär.

Mit dieser etwas summarischen Aufzählung muß ich mich hier begnügen. Behufs genauerer Schilderung würde es nötig sein, erst noch auf die *Unterarten der sphärischen Geometrie* (des komplexen Gebietes), die durch verschiedene Verfügungen über den Begriff des Reellen entstehen, näher einzugehen. Dies behalte ich mir für eine besondere Darstellung vor, in der die — bis jetzt nur unvollständig bekannten — verschiedenen Arten reeller Nicht-Euklidischer Geometrie im Zusammenhang betrachtet werden sollen.

Zwischen $\{2\}$ und $\{1\}$, sowie zwischen $\{1\}$ und $\{0\}$ schalten sich Grenzfälle ein, in denen die absolute Fläche in einen irreduzibelen Kegelschnitt (oder Kegel) übergeht. Der zweite dieser Grenzfälle ist der der Euklidischen Geometrie des reellen Gebietes. Zur Abrundung des Vorgetragenen füge ich noch hinzu:

XXXVI. *Innerhalb der Euklidischen Geometrie des dreidimensionalen Raumes treten zwei der vier Arten reeller Kugelgeometrie auf, entsprechend den Charakteristiken* $[2]$ *und* $[1]$. *In beiden Fällen haben die nichtsingulären reellen Kugeln reelle Mittelpunkte, im ersten haben sie reelle, im zweiten rein-imaginäre Radien. Die Orientierung einer solchen Kugel erfolgt durch Entscheidung über das Vorzeichen ihres Radius.*

Im zweiten Falle gehen die $2\cdot\infty^{15}$ *reellen Transformationen der Gruppe* (G_{15}, H_{15}) *aus den reellen konformen Transformationen im* R_4 *(besser: „im Möbiusschen Kontinuum"* M_4*) durch das Chaslessche Abbildungsverfahren hervor, das jedem Punkt mit orthogonalen kartesischen Koordinaten* x_0, x_1, x_2, x_3 *eine (orientierte) reelle Kugel mit dem Mittelpunkt* (x_1, x_2, x_3) *und dem Radius* ix_0 *zuordnet.*

Nur im zweiten Falle ist (nach einem Satze von Cartan) eine erschöpfende Darstellung der reellen Transformationen von (G_{15}, H_{15}) durch $2\cdot 16$ homogene *reelle* Parameter möglich[112]).

Die Tatsachen, von denen im Satze XXXVI die Rede ist, sind übrigens längst bekannt[113]). Man hat aber die dabei auftretenden zweierlei Begriffe des „Reellen" nicht zum Vorschein gebracht, und das ist der Punkt, auf den es hier ankommt. Übrigens soll, wie gelegentlich schon bemerkt, der hier nur sehr stiefväterlich behandelte Euklidische Grenzfall noch besonders dargestellt werden. Natürlich haben auch im Nicht-Euklidischen Falle die

---

[112]) Siehe die Anmerkung [109]).

[113]) Wegen des Chaslesschen Abbildungsverfahrens siehe J. Coolidge, *A Treatise on the Circle and the Sphere* (Oxford, 1916), Theorem 6, p. 414.

metrischen Tatsachen Interesse. Wer sich über diese zu unterrichten wünscht, muß vorläufig auf den bei Coolidge dargestellten älteren Stand der Theorie verwiesen werden. Es wird eine weitere allerdings umfangreiche Aufgabe sein, diesen Stoff mit dem hier Vorgetragenen zu einem einheitlichen Ganzen zu verschmelzen[114]).

(Eingegangen am 10. 7. 1921.)

Nachträge und Berichtigungen.

Die Untersuchung, die nunmehr einen allerdings nur sehr relativen Abschluß erreicht hat, ist, wie gesagt, schon im Jahre 1916 von der Redaktion der Mathematischen Annalen zum Druck angenommen worden. Sie hatte damals schon in allem Wesentlichen ihren heutigen Inhalt. Indessen habe ich aus Anlaß der Drucklegung eine Anzahl von Erläuterungen hinzugefügt und den ganzen mit S. 245 unten beginnenden Text, der verloren gegangen war, neu geschrieben. In der Numerierung meiner Lehrsätze ist ein Versehen vorgekommen. Es fehlt die Nummer XIV. Einige sachliche Irrtümer, die sich in den Beispielen zu meinem zweiten Abschnitt finden, hat Herr H. Mohrmann berichtigt [Math. Annalen 89 (1923), S. 315]. Einige weitere Berichtigungen und eine Ergänzung mögen hier Platz finden:

§ 10, S. 237, Zeile 10 v. o. lies: „irreduzibelen und nicht äquianharmonischen" statt „irreduzibelen".

§ 11, S. 302, Zeile 10 v. u. lies: $U^2+V^2+W^2$ statt $U+V+W$.

§ 13, S. 85, 87 lies Schichten statt Blättern.

§ 15. Bei Gelegenheit der Erörterung der orientierten Kugeln hätte das Analogon der Begriffe Einzähliger Verein, Zweizähliger Verein orientierter Linienelemente wenigstens kurz erwähnt werden sollen. Es lassen sich unterscheiden:

Vierzählige Vereine. Auf jedem solchen hängen vier übereinander liegende Blätter analytisch zusammen. Bild eines solchen Vereins ist ein Verein, der bei der Gruppe γ (§ 15, S. 115) in Ruhe bleibt.

Drei Arten zweizähliger Vereine. Immer nur zwei übereinander liegende Blätter hängen analytisch zusammen. Je zwei solche Vereine überdecken einander, und beide bleiben in Ruhe (nur) bei einer aus zwei Transformationen bestehenden Untergruppe von γ, was auf drei Arten stattfinden kann. Solche zwei Vereine haben zwei verschiedene Bilder.

Einzählige Vereine. Keine zwei übereinander liegenden Blätter hängen analytisch zusammen. Diese Vereine liegen zu vieren übereinander, und jedem entspricht ein anderes Bild.

Unter den orientierten Kugeln finden sich schon Beispiele für alle fünf Arten von Vereinen.

---

[114]) An das soeben genannte Werk schließen sich noch umfangreiche Abhandlungen des japanischen Mathematikers T. Takasu (früher Ôta) an, die allerlei enthalten, das mit der Lieschen Kugelgeometrie nahe zusammenhängt, auch — nach einer Andeutung ihres Verfassers — in der Richtung auf die Liesche Kugelgeometrie hin fortgesetzt werden sollen.

Gibt man einen Verein durch Potenzreihen für nicht-orientierte Elemente (x, u) (wozu beinahe immer schon Potenzreihen für x *oder* u genügen), so ist der sogenannte allgemeine Fall der erste, gibt man ihn durch Potenzreihen für Blätter (X, Y), oder was auf dasselbe hinauskommt, durch Potenzreihen für Elemente (ξ, φ), so ist der letzte der allgemeine Fall. So verhält es sich auch bei den Kugeln, die eben schon von vornherein stark spezialisierte Flächen sind.

Die allgemeine Theorie der Gruppe G_{15}, H_{15} hat es nur mit einzähligen Vereinen zu tun. Zweizählig oder vierzählig zu sein, ist für einen Verein eine nicht-invariante Eigenschaft, die erst Interesse gewinnt, wenn man die Kugelgeometrie in das Punktkontinuum R_3 einbaut. Beispiele lassen sich in großer Zahl leicht angeben — so sind alle Kurven im Kugelraume als Vereine zweizählig oder einzählig. Aber alle Vereine der fünf Arten erschöpfend aufzuzählen dürfte ein Problem von unüberwindlicher Schwierigkeit sein.

Auch das räumliche Analogon des Begriffs Dilatation hätte besprochen werden sollen. Hierauf denke ich bei anderer Gelegenheit zurückzukommen.

Seit dem Erscheinen meiner Kritik von Lies Kugelgeometrie, in der ich in Aussicht gestellt hatte, die Sache in Ordnung zu bringen, hat auch mein Bonner Kollege Herr H. Beck Aufsätze über Kugelgeometrie drucken lassen, in deren beiden letzten ich gegen mich gerichtete Angriffe gefunden habe [Sitzber. d. Bayr. Akademie d. Wissenschaften 1917, S. 51; Math. Zeitschr. **15** (1922), S. 159; Jahresber. d. D. M. V. **32** (1923), S. 132]. Meines Erachtens hätten diese Meinungsverschiedenheiten auf andere Art ausgetragen werden können. Da sie nun aber einmal in die Öffentlichkeit gekommen sind, so muß ich ja wohl erwidern. (Qui tacet consentire videtur.)

Auffallen muß zunächst, daß B. die Gesamtanlage meiner Bearbeitung der Geometrie *der Kugeln* kritisiert hat, ohne von dieser mehr vor Augen zu haben, als die Überschriften der Paragraphen 13—17. Er hätte mich doch wenigstens sollen ausreden lassen.

Beck „verbessert“ vor allem den Grundbegriff meiner Theorie, den *Begriff der orientierten Tangente* einer Fläche 2. Ordnung, der „absoluten Fläche“. Nach ihm ist das eine halb Nicht-Euklidische, halb Euklidische Mißgeburt. (Ohne Zweifel deshalb, weil ich in einem kleingedruckten Zusatz die absolute Fläche mit einer Euklidischen Kugel hatte zusammenfallen lassen!) Erst mit Hilfe einer von B. entdeckten Figur, des „Minimalkreises“, gelingt es, „die Schwierigkeiten restlos zu beseitigen“, „die Dinge aus dem rein-Formalen ins Wesenhafte zu übertragen“, und was weiß ich, was nicht. *Was ist nun dieses geometrische Wunder, der Minimalkreis? Nichts anderes als die orientierte Tangente!* Es geht das aus Becks eigenen Angaben mit voller Sicherheit hervor. Was B. unter einem Kreis verstehen will, erklärt er allerdings nicht. Aber gerade daraus ergibt sich, daß er eine Kurve 2. Ordnung meint, die entweder mit der auch sonst schon Kreis genannten Figur zusammenfällt oder eine evidente Grenzlage von ihr ist. Dazu gehören auch alle Geraden, jede doppelt gezählt, darunter die Tangenten der absoluten Fläche. Man mag daher wohl sagen, daß jede dieser Tangenten von einem Kreis „überlagert“ wird. B. jedoch behauptet, *daß sie von zwei zu unterscheidenden „Kreisen“ überlagert wird* (1923, S. 133, 134). In Wahrheit wird sie von zwei verschiedenen „orientierten Tangenten“ überlagert, mit deren Begriff eben (im Kontinuum R_3) der Begriff des fälschlich so genannten Minimalkreises trotz seiner Wesenhaftigkeit zusammenfällt.

Ebenso illusorisch ist der weitere Fortschritt, den B. durch Vermeidung gewisser Wurzelgrößen erzielt haben will. Was er wirklich vermieden hat, ist die Frage, zu

deren Beantwortung sie dienen. Man kann nicht aus den sechs Plückerschen Koordinaten einer Tangente der absoluten Fläche die vier weiteren Koordinaten der orientierten Tangente — die übrigens auch bei Beck vorkommen — rational ermitteln, und ebensowenig deren Parameter. B. behauptet das auch gar nicht. (Vgl. § 15, Nr. 5 und § 16, Nr. 11, wo eine gleichartige Frage in einer Dimension mehr auf ähnliche Art beantwortet wird.) Solche Fragen zu umgehen ist weder ein Kunststück noch wird dadurch eine sachliche Vertiefung bewirkt.

Irreleitend ist auch schon die Art, wie B. die Notwendigkeit seines Konkurrenzunternehmens einleuchtend zu machen sucht. Man lese:

(Beck, 1923, S. 132): „In einer früheren Arbeit [1917] hat der Verfasser gezeigt, daß die berühmte Liesche Transformation ... im N. E. Raum zwar *allgemein gültig* gemacht werden kann, aber *doppeldeutig* ist. Daß sie umgekehrt im Eukl. Raum *eindeutig* ist, aber *nicht allgemein gültig* wird. Dieser Darstellung bedient sich auch Herr Study ... [?!] Seitdem hat sich dem Verfasser die Überzeugung aufgedrängt, die Singularitäten der Eukl. Kugelgeometrie möchten nicht in der Sache begründet sein, sondern auf unzweckmäßiger Begriffsbildung beruhen. Es gelang in der Tat, zu zeigen, daß der bisherige Standpunkt [Becks bisheriger Standpunkt!!] zu eng gewesen war, und alle Schwierigkeiten zu lösen ..." (usw.)

(Study, 1916, S. 102): „Es zeigt sich also, ... daß es wenig Sinn ... hat, das zur projektiven Geometrie oder etwa zur Elementargeometrie gehörige Material von Begriffen und Formeln in andere geometrische Disziplinen zu übernehmen." (S. 104): „Die Wurzel des Übels liegt in der Umgrenzung der Grundbegriffe." (S. 110): „Ist nicht jene lange und langweilige Liste von Ausnahmen ... nur nötig zufolge falscher Anlage des Ganzen?" (S. 111): „In der Tat lassen sich die zunächst nur in einem beschränkten Gebiet [des Euklidischen Raumes] festgelegten Grundbegriffe so erweitern und umgrenzen, daß man es mit Transformationen zu tun bekommt, *die überall wohldefiniert, eindeutig und stetig sind.*"

[Vgl. auch Math. Annalen 86 (1922), S. 41 und S. 52 oben, wo die mit *wenn* eingeleiteten Nebensätze zu beachten sind.]

Es ist schwer, angesichts solcher Entstellungen Ruhe zu bewahren.

Ich muß Beck gegenüber auch betonen, daß es sich in der Kugelgeometrie (schon bei Lie) durchaus nicht nur um die sehr speziellen Flächen handelt, nach denen sie benannt ist. Eine Erklärung und Analyse der wirklichen Grundbegriffe dieser Disziplin — die bei mir *Blatt, Verein, Berührung* heißen — findet sich ebensowenig bei Beck, wie (meines Wissens) in der sonstigen Literatur.

Ich sehe den künftigen Entdeckungen Becks mit Interesse entgegen. Nur eingebildete Fortschritte und unbedachte Einwände jedoch darf ich fernerhin wohl auf sich beruhen lassen.

Die in der Anmerkung [114]) genannten Arbeiten von T. Takasu werden von Beck zitiert, und dadurch bin ich mit ihnen bekannt geworden. Es wird zur Aufhellung eines wohl nicht ohne weiteres durchsichtigen Sachverhalts dienen, wenn ich auch noch die wichtigsten Begriffsbildungen dieses Autors (soweit sie bis jetzt vorliegen) mit den meinigen vergleiche.

Nach den Definitionen von Takasu gehört die absolute Fläche $\{(xx) = 0,\ (uu) = 0\}$ nicht zu den „Kugeln". Im Rahmen der Theorie der Gruppe G_{15}, H_{15} ist aber die entgegengesetzte Festsetzung nötig, und zwar muß die absolute Fläche *zweimal* überdeckt sein, wenn die Transformationen der genannten Gruppe als singularitätenfrei dastehen sollen. Abgesehen hiervon decken sich die Begriffe *Split Sphere* (zu

deutsch etwa „halbe Kugel“, nicht Halbkugel) und *Oriented Sphere* mit meinen Begriffen Kugel als Ort orientierter Punkte, Ort orientierter Ebenen (wie man sagen könnte „halber Platten“). In gleichem Umfang deckt sich auch der Begriff *Doubly Oriented Sphere* zunächst mit dem Begriff Kugel als Ort orientierter Elemente, dann aber, wiewohl es zunächst anders scheinen kann, auch mit dem, was bei mir Kugel als Ort von Blättern oder orientierte Kugel heißt. Eine gewöhnliche reguläre Kugel wird hier wie dort viermal überdeckt, und zwar ohne Auftreten von Verzweigungsstellen. Nun funktionieren aber die Punkte und Ebenen der absoluten Fläche als Verzweigungsstellen sowohl für die beiden Schichten orientierter Punkte als auch für die beiden Schichten orientierter Ebenen. Daher erscheint die orientierte Fläche, wenn man die Definitionen Takasus unter sonstiger Erhaltung ihres Wortlauts auch auf sie ausdehnt, zunächst nur *einmal* als „doubly oriented sphere“. Daß es nicht vorteilhaft ist, Kugelradien schon in die grundlegenden Definitionen aufzunehmen, ergibt sich daraus, daß gar nicht alle „Kugeln“ bestimmte Radien haben.

Ernsthafte Schwierigkeiten kommen hinzu, wenn man nicht nur Kugeln, sondern Vereine überhaupt betrachten will. Der Begriff der Kugel — auch der der orientierten (*doubly oriented sphere*) — ist eben *nicht* der natürliche Grundbegriff der nach ihm benannten Disziplin. Er ist es so wenig, wie der Begriff der geraden Linie (statt der Begriffe Punkt, Ebene) der natürliche Grundbegriff in der projektiven Geometrie der Kurven und Flächen ist. Die Geraden X, Y, deren Bilder eben die Punkte und Ebenen sind, werden sich in einer von Künsteleien freien Darstellung des Stoffs der Kugelgeometrie nicht leicht umgehen lassen, und ebensowenig ihre Unterscheidung.

Eine Gerade X (oder Y) würde im Rahmen des Gedankengangs von Takasu als der eine Bestandteil („die Hälfte“) eines reduzibelen *halben* Kreises (*split cercle*) zu bezeichnen sein. Diese „halben“ Kreise selbst sind im wesentlichen dasselbe wie ebene Schnitte unserer M_3^2, also, wenn man etwa von der hyperbolischen Geometrie ausgeht, dasselbe wie die „Kreise“ der pseudosphärischen Geometrie, deren fast immer zwei dieselbe Projektion in den R_3, nämlich denselben „Kreis“ der hyperbolischen Geometrie liefern.

Bonn, im Dezember 1923.

(Eingegangen am 28. 12. 1923.)

Über das isoperimetrische Defizit ebener Figuren.

Von

T. Bonnesen in Kopenhagen.

Es sei O ein Oval, d. h. die Begrenzung eines konvexen, beschränkten Bereichs in der Ebene, und p und f seien der Umfang und der Flächeninhalt von O. Der klassischen Isoperimetrie zufolge ist dann

$$\frac{p^2}{4\pi} - f \geqq 0, \tag{1}$$

wobei das Gleichheitszeichen nur für den Kreis gilt.

Die Größe

$$D \equiv \frac{p^2}{4\pi} - f$$

soll das isoperimetrische Defizit des Ovals benannt werden, weil D angibt, um wie viel kleiner f ist als der Flächeninhalt des isoperimetrischen Kreises. Bekanntlich ist das Defizit einer nicht konvexen Figur kleiner als das Defizit der konvexen Hülle.

Es seien ferner C der kleinste Kreis, welcher O enthält, c der größte Kreis, welcher in O enthalten ist, R und r die Halbmesser von C und c. C und c sollen beziehungsweise als Umkreis und Innenkreis des Ovals bezeichnet werden. Dann gilt die schärfere Ungleichheit

$$\frac{p^2}{4\pi} - f \geqq \frac{\pi}{4}(R-r)^2. \tag{2}$$

Auch hier gilt das Gleichheitszeichen nur für den Kreis, d. h. wenn $R = r$.

Dieser Satz wurde in den Math. Annalen **84** (1921), S. 216–227 bewiesen. Der Gedankengang des Beweises war der folgende. Durch Dilatation um eine Strecke x geht aus O das äußere Paralleloval $O(x)$ hervor, dessen Umfang $p(x)$ und Flächeninhalt $f(x)$ mittels der Gleichungen

$$p(x) = 2\pi x + p, \tag{3}$$

$$f(x) = \pi x^2 + xp + f \tag{4}$$

bestimmt sind, was für Polygone unmittelbar ersichtlich und somit für alle Ovale richtig ist. Die Funktion zweiten Grades $f(x)$ ist für $x = 0$ positiv, ergibt sich aber für $x = -R$ und $x = -r$ negativ. Die Differenz der beiden Nullstellen von $f(x)$ ist somit größer als $R - r$, was eben die Ungleichheit (2) liefert. Die Wahl der beiden Negativwerte $x = -R$, $x = -r$ war insofern zufällig, als sie dadurch angeregt wurde, daß die Richtigkeit von $f(-R) < 0$ und $f(-r) < 0$ in die Augen fällt, wenn O ein Polygon ist, welches im gewöhnlichen Sinne C einbeschrieben oder c umschrieben ist.

Im folgenden soll ein zweiter, in gewisser Hinsicht einfacherer Beweis gegeben werden. Diesem Beweise liegt eine Betrachtungsweise zugrunde, welche zuerst von C. Crone[1]), später von G. Frobenius[2]) angewendet worden ist. Es wird gezeigt, daß $f(x)$ negativ ist für eine Reihe von x-Werten, deren Minimum und Maximum eben $-R$ und $-r$ sind. Diese Werte treten also hier als natürliche geometrische Grenzen hervor. Die Bedeutung der beiden Beweise ist darin zu sehen, daß die isoperimetrische Eigenschaft des Kreises — unter allen isoperimetrischen Figuren den größten Flächeninhalt zu besitzen — ohne besondere Konvergenzprozesse und ohne den Beweis der Existenz eines Maximalovals bewiesen wird.

Es entsteht jetzt die Frage, ob die Ungleichheit (2) die bestmögliche sei. Oder gibt es eine Konstante $k > \frac{\pi}{4}$ von der Beschaffenheit, daß die Ungleichheit $\frac{p^2}{4\pi} - f \geqq k(R - r)^2$ für alle Ovale richtig ist? Es soll gezeigt werden, daß (2) in zwei Richtungen verschärft werden kann. Erstens sind R und r — trotz des zweiten Beweises — nicht die besten Werte, die in (2) angewendet werden können. Jedes Oval kann in einen gewissen von zwei konzentrischen Kreisen C' und c' begrenzten Kreisring einbeschrieben werden. Das Oval verläuft im Inneren des Ringes, hat doch mit jedem der Kreise zum mindesten zwei Punkte gemein und zwar so, daß es auf C' ein Punktpaar gibt, welches auf dem Oval durch ein auf c' liegendes Punktpaar getrennt wird. Mit den Halbmessern R' und r' dieser Kreise statt R und r gilt immer (2), und im allgemeinen ist $R' > R$, $r' < r$.

Zweitens ist $\frac{\pi}{4}$ nicht die beste Konstante, diese ist vielmehr $k = 1$, und es gilt also für alle Ovale die Ungleichheit

$$(5) \qquad \frac{p^2}{4\pi} - f \geqq (R' - r')^2.$$

---

[1]) Om Prismatoidens Rumfang, Nyt Tidsskrift for Matematik B 1904, S. 73–75.

[2]) Über den gemischten Flächeninhalt zweier Ovale, Berlin. Sitzungsber. 1915, S. 387–404.

Das Verhältnis $\left(\frac{p^2}{4\pi} - f\right) : (R' - r')^2$ kann jeden Wert größer als 1 annehmen, kann aber gegen 1 konvergieren, wenn $r' \to R'$.

In einem Zusatz wird eine geometrische Repräsentation des Defizits und somit ein dritter, anschaulicher Beweis der Ungleichheit gegeben.

I. Beweis der Ungleichheit: $D > \frac{\pi}{4}(R - r)^2$.

1. Aus den Gleichungen (3) und (4) folgt

$$D(x) = \frac{p^2(x)}{4\pi} - f(x) = \frac{p^2}{4\pi} - f = D. \tag{6}$$

Wenn der Umkreis und der Innenkreis von O mit O dilatiert werden, gehen sie in den Umkreis und Innenkreis von $O(x)$ über mit den Halbmessern $R(x) = R + x$, $r(x) = r + x$; somit ist $R(x) - r(x) = R - r$.

Wir konstruieren jetzt ein neues Oval $O'(m)$, welches mit $O(x)$ ähnlich gelegen ist in bezug auf den Mittelpunkt M eines beliebigen Kreises Γ vom Halbmesser ϱ im Verhältnis $m = \frac{\varrho}{\varrho + x}$. Wenn x von 0 bis ∞, m von 1 bis 0 variiert, durchläuft $O'(m)$ eine Schar von Ovalen mit O und Γ als Grenzkurven. Diese Schar ist mit der aus O und Γ im Sinne von Brunn-Minkowski gebildeten linearen Schar identisch. Weil $D'(m) = m^2 D(x) = m^2 D$ und $R'(m) - r'(m) = m(R - r)$, ist

$$\frac{D'(m)}{(R'(m) - r'(m))^2} = \frac{D}{(R - r)^2}. \tag{7}$$

Wenn m von 0 bis 1 wächst, wird $D'(m)$ von 0 bis D wachsen.

Speziell kann man $\Gamma = c$ wählen, dann ist $r(m) = r$ und $r \leqq R'(m) \leqq R$. Für $\Gamma = C$ ist $R'(m) = R$, und $r \leqq r'(m) \leqq R$. Vorausgreifend, daß das Defizit positiv ist, kann man hieraus folgern: *Aus einem beliebigen Ovale kann man ein neues Oval mit kleinerem Defizit konstruieren, dessen Um- und Innenkreis Halbmesser haben von beliebiger Größe zwischen R und r.* Dieses Resultat soll später angewendet werden.

Man sieht leicht, daß die Stützpunkte dreier gleichsinnig paralleler Stützgeraden von O, Γ und $O'(m)$ auf einer Geraden liegen und daß der letzte den Abstand der ersten im Verhältnis $x : \varrho$ teilt.

Für $x = \varrho$, $m = \frac{1}{2}$ erhält man das Mitteloval $O'(\frac{1}{2})$ mit dem Flächeninhalt

$$S = \frac{1}{4}(\pi\varrho^2 + \varrho p + f). \tag{8}$$

2. Es sei dem Oval O ($\alpha_1 \alpha_2 \beta \gamma \alpha_1$ auf Fig. 1) ein Dreieck ABC von Stützgeraden umschrieben. Den Flächeninhalt f berechnen wir mit Crone und Frobenius als Differenz von $\triangle ABC$ und drei Sektoren, die wie $A\beta\gamma$

von zwei Strecken $A\beta$, $A\gamma$ und dem Bogen $\beta\gamma$ von O, dessen Konvexität sich gegen A wendet, begrenzt sind.

Auf O wird ein Umlaufssinn gewählt, und die von einem Punkt P auf O ausgehende Halbstützgerade mit dem entsprechenden Sinn schneidet dann den Perimeter von ABC in einem Punkt Q. Setzt man $PQ = t$, $\angle(PQ, AB) = v$, so ist t für den Bogen $\beta\gamma$ eine bestimmte Funktion $t(v)$ von v. Daß diese Funktion den Bogen $\beta\gamma$ eindeutig bestimmt, sieht man gleich in dem Falle, wo $\beta\gamma$ ein Streckenzug ist ($t(v)$ ist dann diskontinuierlich), und hieraus folgt die Eindeutigkeit im allgemeinen. Der Flächeninhalt des Sektors ist durch $\frac{1}{2}\int t^2 dv$ ausgedrückt.

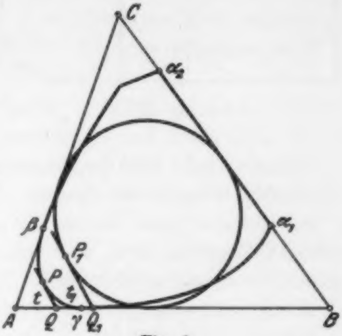

Fig. 1.

Wir konstruieren das Mitteloval $O'(\frac{1}{2})$ von O und dem Innenkreis Γ des Dreiecks ABC. O' ist auch in $\triangle ABC$ einbeschrieben. Wenn $PQ = t$, $P_1Q_1 = t_1$, $P'Q' = t'$ drei parallele und gleichsinnige Stützgeraden von O, Γ und $O'(\frac{1}{2})$ sind, ist $t' = \frac{1}{2}(t + t_1)$, und

$$(9)\qquad A\beta\gamma = \frac{1}{2}\int t^2 dv, \qquad A\beta_1\gamma_1 = \frac{1}{2}\int t_1^2 dv, \qquad A\beta'\gamma' = \frac{1}{2}\int\left(\frac{t+t_1}{2}\right)^2 dv,$$

$$\frac{1}{2}(A\beta\gamma + A\beta_1\gamma_1) - A\beta'\gamma' = \frac{1}{2}\int\left(\frac{t-t_1}{2}\right)^2 dv \geqq 0.$$

Das Gleichheitszeichen gilt nur für alle drei Sektoren A, B und C, wenn O ein Kreis ist, denn nur dann ist $t \equiv t_1$ für alle Sektoren. Aus (9) und den entsprechenden Ungleichheiten für die Sektoren B und C folgt, daß der Flächeninhalt des Mittelovals größer ist als die Mittelzahl der Flächeninhalte von O und Γ, d. h.

$$(10)\qquad \begin{aligned} \frac{1}{4}(\pi\varrho^2 + \varrho p + f) &\geqq \frac{1}{2}(\pi\varrho^2 + f), \\ \pi\varrho^2 - \varrho p + f &\leqq 0. \end{aligned}$$

Diese Ungleichheit ist also richtig mit dem Halbmesser ϱ des Innenkreises eines beliebigen Dreiecks, welches O umschrieben ist. Sie gilt also auch mit dem größten und dem kleinsten dieser Halbmesser, wenn ein Maximum und ein Minimum überhaupt vorhanden ist. Das braucht aber nicht der Fall zu sein, weil die umschriebenen Dreiecke keine abgeschlossene Menge bilden. Es wird deshalb notwendig, auch die Grenzformen dieser Dreiecke in Betracht zu ziehen, d. h. die um O umschriebenen Parallelstreifen. Auch mit diesen bleibt (10) richtig.

Wir zeichnen zwei parallele Stützgeraden von O und einen Kreis Γ, welcher diese berührt, und konstruieren dann das Mitteloval von O und Γ, welches auch die beiden Stützgeraden berührt. Alle drei Kurven werden mit Rechtecken umschrieben mit zwei Seiten auf den Parallelen. Die Flächeninhalte der Ovale werden wie oben berechnet. Und weil das Rechteck des Mittelovals die Mittelzahl der beiden andern ist, tritt (10) wieder hervor.

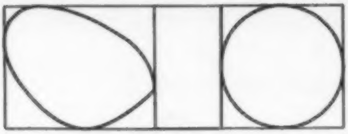

Fig. 2.

Es ist klar, daß der Umkreis C und der Innenkreis c von O sich unter den betrachteten Kreisen Γ finden, und es ist eben C der größte, c der kleinste dieser Kreise. Wäre z. B. der Innenkreis Γ eines Dreiecks ABC größer als C, so könnte man C so verschieben, daß er und also auch O innerhalb Γ fiele, wobei das verschobene Dreieck ABC innerhalb $\triangle ABC$ fiele!

Für $\varrho = R$ und $\varrho = r$ ist also (10) richtig, woraus folgt, daß die Differenz der Nullstellen von $\pi\varrho^2 - \varrho p + f$ größer ist als die Differenz $R - r$, oder daß

$$(2) \qquad \frac{p^2}{4\pi} - f \geqq \frac{\pi}{4}(R - r)^2.$$

Der ganzen Entwicklung zufolge gilt das Gleichheitszeichen hier nur für den Kreis, also für $R = r$.

Bemerkung über den gemischten Flächeninhalt zweier Ovale.

Es seien f und f_1 die Flächeninhalte zweier Ovale O und O_1, m der gemischte Flächeninhalt von O und O_1. Minkowski hat bewiesen, daß $m^2 \geqq ff_1$, wobei das Gleichheitszeichen nur gilt, wenn O und O_1 ähnlich und ähnlich gelegen sind. Die klassische isoperimetrische Ungleichheit (1) tritt dann als Spezialfall hervor, wenn das eine Oval ein Kreis ist. Frobenius hat in der zitierten Arbeit die Minkowskische Ungleichheit in einfacher Weise bewiesen. Man kann die Ungleichheit verschärfen in derselben Weise, wie (1) durch (2) verschärft wurde. Können die Ovale verschoben werden in der Weise, daß sie mit einem gemeinsamen Dreieck umschrieben sind, so erhält man wie früher für den Flächeninhalt s des Mittelovals, daß $s \geqq \frac{1}{2}(f + f_1)$ und somit $m \geqq \frac{1}{2}(f + f_1)$. Im allgemeinen kann man O und O_1 mit zwei Dreiecken ABC und $A_1B_1C_1$ mit gleichsinnig parallelen Seiten umschreiben. Wenn dann O_1 mit $AB : A_1B_1$ multipliziert wird, kann man dieses Resultat anwenden, und erhält dann eine (10) entsprechende Ungleichheit, welche zur Verschärfung führt. Diese hat aber für unsere Frage keine weitere Bedeutung, und wir beschränken uns deshalb auf die obige ganz elementare Betrachtung, um so mehr, weil das allgemeine Resultat schon von W. Blaschke veröffentlicht ist[3]).

[3]) Abh. aus dem Math. Sem. Hamburg 1 (1922), S. 205—209.

II. Der Kreisring eines Ovals.

3. *Jedes Oval O kann in einen von zwei konzentrischen Kreisen C und c begrenzten Kreisring in der Weise einbeschrieben werden, daß es zwischen den Kreisen liegt, jedoch mit jedem Kreis zumindest zwei Punkte gemein hat und zwar so, daß es auf C ein Punktpaar gibt, welches auf O von einem Punktpaar auf c getrennt ist. Für ein vorgelegtes Oval ist der Kreisring eindeutig bestimmt.*

Die Bedeutung des Satzes für das Folgende ist darin zu sehen, daß jeder mit C und c konzentrische Kreis Γ zwischen C und c das Oval zumindest in vier Punkte schneidet. Wir bemerken, daß O stückweise mit C oder c zusammenfallen kann und daß diese Kreise speziell Umkreis oder Innenkreis von O sein können.

Die Existenz des Ringes soll erst für den Fall eines Polygons O bewiesen werden. In diesem Fall ist der Ort (M) der Mittelpunkte M der inneren Kreise, welche O zweifach berühren, aus Strecken zusammengesetzt. Die Strecken liegen auf den Achsen der Polygonwinkel und auf den Achsen gewisser Winkel zwischen zwei nicht aneinander liegenden Seiten. Die Endpunkte von (M) sind die Winkelspitzen des Polygons, und die Strecken stoßen aneinander in Knotenpunkten, die Mittelpunkte von drei- oder mehrfach berührenden Kreisen sind. (Fig. 3.)

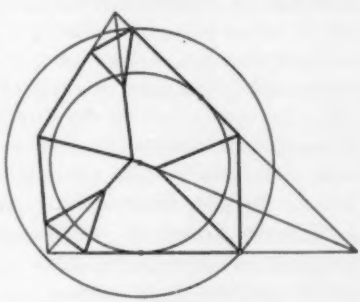

Fig. 3.

(M) ist eine zusammenhängende Linie, welche von jeder Spitze von O nach jeder anderen führt. Ein Streckenzug L, welcher zwei Punkte P und Q auf zwei verschiedene Seiten p und q verbindet, muß nämlich (M) schneiden. Um jeden Punkt S auf L gibt es einen O berührenden inneren Kreis. In der Nähe von P gibt es Kreise, die nur p berühren und entsprechend für Q. Wenn S sich auf L von P bis Q bewegt, wird der Kreis sich kontinuierlich ändern und muß deshalb einen doppeltberührenden Kreis passieren; d. h. L schneidet (M).

Wir betrachten jetzt einen Kreis, der O nur in zwei Punkten berührt, dessen Mittelpunkt M also ein innerer Punkt von einer Strecke von (M) ist. Der Perimeter O wird von den Berührungspunkten in zwei Teile a und b geteilt. Der Maximalabstand (a) zwischen M und a wird auf der Verbindungslinie von M und einer oder mehreren der Spitzen von a

gemessen. Entsprechend für b. M soll so bestimmt werden, daß $(a) = (b)$. Wenn M eine Strecke durchläuft, werden die Berührungspunkte sich kontinuierlich bewegen, und a und b erhalten dabei keine neuen Spitzen. (a) und (b) und somit $(b) - (a)$ variieren auch kontinuierlich. Die Spitze aber, an welcher der Maximalabstand (a) gemessen wird, kann während der Bewegung einen Sprung nach einer anderen Spitze machen. Wenn M die Bewegung in der Nähe einer Spitze beginnt, kann z. B. (a) beliebig klein sein, und $(b) - (a)$ wird also positiv sein. M bewegt sich auf einer Achse einem Knotenpunkte entgegen. Wenn die gewünschte Lage noch nicht hier erreicht ist, entsteht die Frage, welcher Weg von dem Knotenpunkte aus gewählt werden soll. Der Kreis um den Knotenpunkt hat $n > 2$ Berührungspunkte mit O, und das Innere von O wird von den entsprechenden Halbmessern in n Teile geteilt. Die Bewegung soll in denjenigen von diesen Teilen fortgesetzt werden, welcher den spätest gemessenen Maximalabstand (b) enthält. O wird von den diesem Teil entsprechenden zwei Berührungspunkten in zwei neue Teile a' und b' geteilt und zwar so, daß a' den früheren Teil a enthält. Es kann sein, daß der Maximalabstand (b) des Knotenpunkts nach zwei Spitzen von b gemessen werden kann und daß einer von diesen jetzt in a' aufgenommen wird. Dann ist $(a') = (b')$, und das Ziel erreicht. Wenn nicht, ist immer $(b') > (a')$ und eventuell $(b') - (a') < (b) - (a)$. Die Bewegung von M kann immer nach demselben Prinzip fortgesetzt werden, bis M zu guter letzt in irgendeiner Polygonspitze endet, und dann ist $(b) - (a)$ negativ geworden. Die Variation von $(b) - (a)$ war innerhalb der Strecken von (M) kontinuierlich. In einem Knotenpunkte konnte die Differenz einen Sprung machen, wurde dabei aber nicht negativ. Sie muß also unterwegs notwendigerweise 0 passiert haben. Es gibt somit einen Punkt M, der Mittelpunkt eines doppeltberührenden Kreises ist, und außerdem Mittelpunkt eines Kreises, welcher durch zwei Polygonspitzen geht, und diese Spitzen werden auf O von den Berührungspunkten getrennt.

Für ein Dreieck PQR kann man den Kreisring leicht konstruieren. Wenn $PQ \geqq PR \geqq QR$, wird auf PR die Strecke $PS = PQ$ abgetragen. C geht dann durch P, Q und S, und der konzentrische Kreis c berührt PQ und PR.

Wenn das Oval O kein Polygon ist, kann es als Grenze einer bestimmten Folge von Polygonen betrachtet werden. Für jedes Polygon wird der entsprechende Kreisring bestimmt, und diese Folge von Ringen konvergiert gegen einen Ring, welcher die gewünschte Lage in Beziehung zu O hat. Es kann nicht geschehen, daß die zwei Berührungspunkte von O und c in der Grenze zusammenfallen. Denn dann fällt auch einer von den Berührungspunkten von C in denselben Punkt und C und c

haben dann denselben Halbmesser, was nur der Fall ist, wenn O ein Kreis ist.

4. Es soll jetzt gezeigt werden, daß der Kreisring für ein vorgelegtes Oval eindeutig bestimmt ist. Denken wir uns, daß es zwei solche Ringe (C, c) und (C', c') gäbe.

C und C' haben dann ein Gebiet gemein, das O enthält, und weil sie beide O berühren, müssen sie einander in zwei Punkten P und Q schneiden. Die zwei Bögen von C und C', welche das Gebiet begrenzen, seien B und B' benannt.

c und c' haben zwei gemeinsame, äußere Tangenten, weil der eine Kreis nicht innerhalb des anderen liegen kann. Zwei Bögen b und b' von c und c' bilden mit den Tangenten eine konvexe Figur, die in O enthalten ist, und auf diesen Bögen liegen die Berührungspunkte mit O.

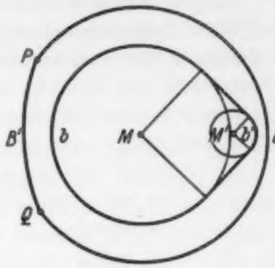

Fig. 4.

Wenn ein Punktpaar von b von einem Punktpaar von B auf O getrennt ist, müssen die Halbgeraden MP und MQ den Bogen b schneiden. Die Winkel $M(B)$ und $M(b)$ müssen nämlich einen gemeinsamen Winkel haben, und das geschieht nur, wenn MP und MQ in $M(b)$ liegen, weil die Halbgeraden von M nach den Mittelpunkten von B und b entgegengesetzt sind.

Für B' und b' soll das Entsprechende gelten. Wenn aber P und Q in $M(b)$ liegen, können $M'P$ und $M'Q$ sicher nicht b' schneiden, denn die Schenkel der beiden Winkel $M(B)$ und $M(b)$ sind parallel.

5. Es seien R und r die Halbmesser von C und c. Wird O um die Strecke $R - r$ dilatiert, dann wird die dadurch entstehende Parallelkurve den Kreis C in den Punkten berühren, welche den Berührungspunkten von O und c entsprechen. Der Satz 3 kann deshalb auch so ausgesprochen werden:

Für jedes Oval O kann eine äußere Parallelkurve O' eindeutig so bestimmt werden, daß es einen Kreis gibt, welcher zwischen O und O' verläuft und beide in Punktpaaren berührt, die einander auf dem Kreise trennen.

III. Symmetrisierung.

6. Bei der folgenden Untersuchung betrachten wir die Menge aller Ovale, welche in einem gegebenen Kreisring (C, c) mit dem Halbmesser R, r einbeschrieben sind im Sinne des Satzes 3. Wir beabsichtigen das-

jenige dieser Ovale zu bestimmen, dessen Defizit $D = \frac{p^2}{4\pi} - f$ möglichst klein ist. Weil $D > \frac{\pi}{4}(R - r)^2$ ist (12), hat D eine positive untere Grenze G, und es gibt innerhalb der Menge eine Folge von Ovalen, deren Defizit gegen G konvergiert; aus dieser Folge kann bekanntlich eine Teilfolge ausgewählt werden, die gegen ein Oval von Defizit $D = G$ konvergiert. Das minimierende Oval existiert.

Es soll gezeigt werden, daß das minimierende Oval Ω zwei aufeinander senkrechte Symmetrieachsen haben muß. Es sei O eine nicht doppelsymmetrische Kurve unserer Menge, dann ist es möglich, eine neue, doppelsymmetrische Kurve O' zu konstruieren mit demselben Flächeninhalt und mit kleinerem oder höchstens demselben Umfang wie O, so daß also $D' \leqq D$.

Ein beliebiger Kreis Γ zwischen C und c schneidet O zumindest in vier Punkten, und innerhalb O werden somit auf Γ zumindest zwei Bögen abgeschnitten, deren Gesamtlänge s sei (Fig. 5). Ein fester Halbmesser AB von C schneide Γ in α und β. Auf Γ wird zu beiden Seiten von α und β ein Bogen von der Länge $\frac{1}{4}s$ abgetragen. Wenn Γ variiert, wird von den vier Endpunkten dieser Bögen eine im Ring einbeschriebene, doppelsymmetrische Kurve O_1 erzeugt. O_1 hat denselben Flächeninhalt wie O. Denn die Flächen, welche zwischen zwei Nachbarkreisen Γ und Γ' mit dem Halbmesser ϱ und $\varrho + d\varrho$ liegen, haben denselben Repräsentanten (Differential) $s\,d\varrho$.

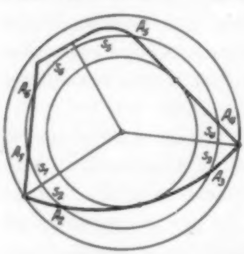

Fig. 5.

Wir untersuchen jetzt den Umfang von O_1. Es seien A_1A_2, $A_3A_4, \ldots$ die auf Γ innerhalb O abgeschnittenen Bögen. Ein solcher Bogen wird, wenn ϱ wächst, entweder schließlich ein Punkt werden oder einmal in getrennte Bögen geteilt werden oder auch auf C fallen. Für jeden Bogen auf Γ wird der Radius an den (oder einen von den) nächsten Teilpunkt gezogen, und A_1A_2, $A_3A_4, \ldots$ werden dann in zwei Bögen s_1 und s_2, s_3 und $s_4, \ldots$ geteilt, und diese sind bestimmte Funktionen von ϱ, bis die Teilung stattfindet. Bezeichnen wir die Schnittpunkte von O und dem Nachbarkreise Γ' von Γ mit $A_1'A_2'A_3'A_4' \ldots$, dann liegen auf O Bogenelemente A_iA_i' mit den Repräsentanten $\sqrt{d\varrho^2 + \varrho^2 dv_i^2}$, wo $s_i = \varrho v_i$ gesetzt ist. Die Summe dieser Repräsentanten ist $\sum\limits_1^{2n} \sqrt{d\varrho^2 + \varrho^2 dv_i^2}$, wo $n \geqq 2$. Auf O_1 liegen zwischen Γ und Γ' vier Bögen mit dem Repräsentanten $\sqrt{d\varrho^2 + \varrho^2(\sum \frac{1}{4} dv_i)^2}$. Nun ist bekanntlich

$$\sum_1^{2n} \sqrt{d\varrho^2 + \varrho^2 dv_i^2} \geqq \sqrt{(2n\,d\varrho)^2 + \varrho^2 (\Sigma\, dv_i)^2}$$

und also auch (und um so viel mehr, wenn $n > 2$)

$$(11) \quad \sum_1^{2n} \sqrt{d\varrho^2 + \varrho^2 dv_i^2} \geqq \sqrt{(4\,d\varrho)^2 + \varrho^2 (\Sigma\, dv_i)^2} = 4\sqrt{d\varrho^2 + \varrho^2 (\Sigma \tfrac{1}{4} dv_i)^2}.$$

Das Gleichheitszeichen trifft nur zu, wenn $n = 2$ und außerdem alle dv_i für jedes ϱ gleich sind. O braucht dann nicht symmetrisch zu sein. Die vier Bögen aber, welche zwischen C und c verlaufen, müssen symmetrisch sein, und O kann außerdem zwei Bögen von C und zwei von c enthalten. Die Symmetrisierung bewirkt in diesem Fall einfach eine Drehung der einen Hälfte der Figur. Das einfachste Beispiel ist das von C und zwei Tangenten von c begrenzte Oval, welches eine Symmetrieachse besitzt. Durch Doppelsymmetrisierung werden die Tangenten parallel.

Das Defizit der doppelsymmetrischen Kurve O_1 ist also jedenfalls nicht größer als das Defizit von O. Wenn O_1 nicht konvex sein sollte, kann man die konvexe Hülle O' von O_1 bilden, wobei das Defizit verkleinert wird.

O' ist in dem gegebenen Ring einbeschrieben, und C und c sind gerade Umkreis und Innenkreis von O'. Das erste ist klar, das letzte sieht man so ein. O und c haben zwei Punkte gemein, deren Tangenten entweder parallel sind oder sich außerhalb C schneiden, weil die Punkte von einem Punktpaar auf C getrennt sind. Diese Tangenten begrenzen mit C ein Oval, welches O enthält. Durch Symmetrisierung wird dieses Oval in das aus C und den parallelen Tangenten von c in den Endpunkten der einen Symmetrieachse bestehende Oval übergeführt. Und O' muß folglich in diesem Ovale enthalten sein. c ist somit der größte in O' enthaltene Kreis.

Hieraus folgt, daß die Ungleichheit (2) auf O' anwendbar ist, und sie gilt also um so viel mehr für O. Wir haben also den folgenden Satz bewiesen:

Für ein Oval vom Flächeninhalt f und Umfang p gilt die Ungleichheit

$$(12) \qquad \frac{p^2}{4\pi} - f \geqq \frac{\pi}{4}(R - r)^2,$$

wo R und r die Halbmesser des Kreisringes des Ovals sind.

Bei dem Beweise ist nicht von dem im Anfang erwähnten Minimaloval Gebrauch gemacht.

7. In Math. Ann. **84**, S. 223–225 habe ich für eine konvexe Figur auf der Kugeloberfläche vom Halbmesser 1 die Ungleichheiten

$$(13) \qquad (2\pi)^2 \geqq (2\pi - f)^2 + p^2 - (2\pi)^2 \geqq (2\pi)^2 \operatorname{tg}^2 \frac{R - r}{2}$$

bewiesen, wobei R und r die Halbmesser des Um- und Innenkreises bedeutete. Die Überlegungen der vorigen §§ 3—6 lassen sich aber unmittelbar auf die Kugeloberfläche übertragen, und die Ungleichheiten (13) gelten also auch, wenn R und r die Halbmesser des Kreisringes der konvexen Figur sind. Die Ungleichheit kann nicht verschärft werden, das heißt, es gibt keine Ungleichheit von dieser Form, wo das Glied $\mathrm{tg}^2 \frac{R-r}{2}$ einen größeren Koeffizienten als $(2\pi)^2$ hat für alle Figuren auf der ganzen Kugeloberfläche.

IV. Das Minimaldefizit im Kreisring.

8. Die Aufgabe, das in einem gegebenen Kreisring (C, c) einbeschriebene Oval Ω, dessen Defizit Minimum ist, zu bestimmen, kann also auf doppelsymmetrische Ovale beschränkt werden. Zwei parallele Tangenten t und t' an c begrenzen mit C ein konvexes Gebiet G, und Ω soll innerhalb oder auf der Grenze dieses Gebietes liegen. Ein Viertel von Ω kann aus einem inneren Bogen I, einem Bogen auf C und entweder einem Bogen auf c oder einer Strecke von t bestehen.

Wir werden erst zeigen, daß I entweder eine Strecke oder ein Kreisbogen sein muß. Es seien P, Q und R drei aufeinander folgende innere Punkte von I. Wenn PQR nicht eine Strecke oder ein Kreisbogen ist, werden wir PQR durch den Kreisbogen (PR) ersetzen, welcher dieselbe Länge hat wie PQR. Es ist bekanntlich eine Folge der isoperimetrischen Eigenschaft des Vollkreises, daß (PR) mit der Sehne PR einen größeren Flächeninhalt einschließt als PQR. (PR) bildet deshalb mit dem übrigen Teil des Ovals zusammen eine Kurve mit kleinerem Defizit als das des betrachteten Ovals. Diese Kurve ist allerdings nicht konvex. Die konvexe Hülle der Kurve wird aber ein noch kleineres Defizit haben, und P und R können so dicht an Q gewählt werden, daß die Hülle im Gebiet G liegt.

Zweitens kann Ω keinen Bogen von C enthalten. Um das zu sehen, betrachten wir ein Oval, welches einen Bogen von C enthält, der an I in einem Punkt Q stößt. P sei ein innerer Punkt von I, R ein innerer Punkt des Bogens auf C. Der zusammengesetzte Bogen PQR wird in bezug auf die Achse der Sehne PR im Sinne Steiners symmetrisiert, und wird dabei durch einen Bogen ersetzt, welcher mit dem übrigen Teil des Ovals eine Kurve mit kleinerem Defizit gibt. Diese Kurve hat eine Konkavität in P oder in R. Die konvexe Hülle wird gebildet. P kann so dicht an Q gewählt werden, daß die Hülle innerhalb des Gebietes G bleibt, selbst wenn die Konkavität in P ist. Ist die Konkavität aber in R, wird ein Teil der Hülle außerhalb C fallen. Das neue Oval hat dann einen größeren Umkreis als C, während der Innenkreis immer c ist. Durch

die in § 1 angegebene Methode kann aber dann ein neues Oval konstruiert werden mit noch kleinerem Defizit, welches in dem Ring (C, c) einbeschrieben ist.

In ähnlicher Weise sieht man, daß Ω keinen Bogen von c enthält.

Wir werden jetzt beweisen, daß I keine Strecke ist. Wenn I eine Strecke ist, welche an die Tangente t in Q stößt, werden P auf t und R auf I in der Weise gewählt, daß $PQ < QR$ und $\triangle\ PQR$ wird in bezug auf die Achse von PR symmetrisiert. Das dabei entstandene neue Dreieck liegt dann innerhalb des Gebietes G, und der Beweis wird wie früher geführt.

I ist also ein Kreisbogen, der an t in einem Punkt Q stößt. Nehmen wir an, daß I mit t einen Winkel bilde. Die Tangente an I in einem inneren Punkt R schneidet t in einem Punkt T so, daß $TQ < TR$. P wird in der Weise auf t gewählt, daß $TP < TR$, und die Symmetrisierung des Segments PQR gibt dann eine Konkavität in R, wobei die konvexe Hülle innerhalb des Gebietes G fällt, wenn R genügend dicht an Q liegt. Auch in diesem Fall kann also das Defizit verkleinert werden. Der innere Bogen des Minimalovals ist also ein Kreisbogen, welcher t berührt.

Durch diese Überlegungen haben wir das Resultat gewonnen, daß das im Kreisring (C, c) einbeschriebene Oval, dessen Defizit ein Minimum ist, aus zwei Strecken auf den parallelen Tangenten t und t' an c und von vier symmetrischen Kreisbögen besteht. Diese Kreisbögen berühren t oder t' und gehen von den Endpunkten des mit t und t' parallelen Halbmessers von C aus. (Fig. 7.)

9. Es sei (Fig. 6) ARB ein Viertel eines solchen Ovals, A der Endpunkt des Halbmessers von C, B der Berührungspunkt von c und t. Unsere Aufgabe ist jetzt, den Berührungspunkt R von t und dem Kreisbogen AR so zu bestimmen, daß das Defizit des Ovals ein Minimum wird. Das Variationsproblem ist auf ein gewöhnliches Minimumsproblem reduziert. Dieses soll durch Differentiation gelöst werden, und zwar durch das geometrische Differentiationsverfahren von J. Hjelmslev.

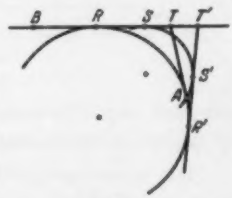

Fig. 6.

Die Methode ist die folgende. Die unendlich kleinen Größen der Figur werden durch endliche Größen repräsentiert, deren Verhältnisse eben den Grenzverhältnissen der unendlich kleinen Größen gleich sind. Einer dieser Repräsentanten (Differentiale) wird beliebig und bequem auf der Figur gewählt.

Es seien $AS'S$ ein Nachbarkreis von AR, $R'S'T'$ die zweite äußere Tangente der Kreise, AT die Tangente in A. Beim Übergang

von AR zu AS erhält ein Viertel des Umfangs des Ovals, $\frac{1}{4}p$, den Zuwachs

$$RS + \smile SA - \smile RA = RS - (\smile RR' - \smile SS') + \smile R'A + \smile S'A.$$

Wird $T'S = m \cdot T'R$ gesetzt, so ist $RS = (1-m)T'R$, und $\smile RR' - \smile SS' = (1-m)\smile RR'$. Wenn $S \to R$, wird $T' \to T$. Als Repräsentant der verschwindenden Größe RS wird die Strecke RT gewählt. Der Repräsentant von $\smile RR' - \smile SS'$ wird dann der Bogen AR, während $\smile R'A + \smile S'A$ den nämlichen Repräsentanten wie $R'S'$ erhält, d. h. AT. Hiermit ist der Zuwachs von p einfach auf der Figur repräsentiert, nämlich so, daß

$$\frac{1}{4}\,dp = RT + TA - \smile RA.$$

Der Flächeninhalt f des Ovals erhält einen Zuwachs, dessen Repräsentant df durch die Gleichung

$$\frac{1}{4}\,df = 2 \cdot \text{Fig.}\,RTAR$$

bestimmt ist. Der Zuwachs ist nämlich

$$RSS'AR = RT'R'R - ST'S'S - AS'R'A.$$

Die letzte Figur hat den Repräsentanten gleich 0, und die Differenz $RT'R'R - ST'S'S$ ist gleich $(1-m)(1+m) \cdot RT'R'R$, und sie erhält, wenn $m \to 1$, den Repräsentanten $2 \cdot RTAR$. Wenn ϱ der Halbmesser des Kreisbogens AR ist, hat man also

$$df = \varrho\,dp,$$

und

$$D = \frac{p^2}{4\pi} - f$$

gibt

$$dD = \frac{1}{2\pi}(p - 2\pi\varrho)\,dp.$$

dp ist nie Null, und die Minimalbedingung ist somit

$$p = 2\pi\varrho,$$

was eben ein Minimum gibt, weil $p - 2\pi\varrho$ durch Null wächst, wenn dp positiv gewählt wird.

Das minimierende Oval Ω ist also von zwei Strecken und vier Kreisbögen mit Halbmesser ϱ in der Weise zusammengesetzt, daß der Umfang des Ovals der ganzen Kreisperipherie $2\pi\varrho$ gleich ist.

Wir können jetzt das Minimaldefizit direkt berechnen. Es seien R und r die Halbmesser von C und c, ψ der Winkel, welchen Ω mit C

in A bildet. Dann ist $r = \varrho(1 - \sin\psi)$, und die Minimalbedingung $p = 2\pi\varrho$ gibt $\varrho\psi = R - \varrho\cos\psi$, also ist

$$\varrho = \frac{R}{\psi + \cos\psi} = \frac{r}{1 - \sin\psi}\,. \tag{14}$$

Diese Gleichungen bestimmen die Werte von ϱ und ψ. Die Berechnung gibt

$$D = 2\varrho^2(\sin\psi\cos\psi + 2\psi\sin\psi - \psi)$$

oder

$$D = \frac{2(\sin\psi\cos\psi + 2\psi\sin\psi - \psi)}{(\sin\psi + \cos\psi + \psi - 1)^2}\cdot(R - r)^2 = \mu(R - r)^2 \tag{15}$$

als *Minimalwert des Defizits.*

Die Gleichung (14) bestimmt das Verhältnis $r : R$ für einen gegebenen Wert von ψ. Eine nähere Untersuchung des Koeffizienten μ in (15) zeigt, daß $1 < \mu \leqq \frac{4}{\pi} = 1{,}27$ für $0 < \psi \leqq \frac{\pi}{2}$. Für $\psi = 0$ ist $r = R$, und der Wert von μ ist unbestimmt, aber $\mu \to 1$ für $\psi \to 0$.

Es gilt also für jedes Oval die Ungleichung

$$D = \frac{p^2}{4\pi} - f \geqq (R - r)^2\,, \tag{16}$$

wo R und r die Halbmesser des Kreisringes des Ovals sind. Das Gleichheitszeichen gilt nur für einen Kreis.

Wenn eine Folge von Ovalen gegen einen Kreis konvergiert ($r \to R$), kann das Verhältnis $\mu = D : (R - r)^2$ gegen jeden Wert $\geqq 1$ konvergieren. μ wird z. B. für ein reguläres n-Eck mit n gegen Unendlich konvergieren. Betrachten wir speziell die Folge der Minimalovale für ein festes R und $0 < r < R$, so konvergiert μ gegen 1, wenn $r \to R$.

Fig. 7 stellt das minimierende Oval Ω vor für $\psi = \frac{\pi}{6}$, $r : R = 0{,}36$.

10. Es seien O und O_1 zwei doppelsymmetrische Ovale, welche in demselben Kreisring (C, c) einbeschrieben sind. O bzw. O_1 schneide auf dem konzentrischen Kreise Γ zwei Bögen von der Länge s bzw. s_1 ab. Wir konstruieren dann eine neue doppelsymmetrische Kurve, welche auf Γ zwei Bögen von der Länge $\frac{1}{2}(s + s_1)$ abschneidet. Der Flächeninhalt dieser Kurve ist $\frac{1}{2}(f + f_1)$, und der Umfang ist kleiner als $\frac{1}{2}(p + p_1)$, weil man mit den früheren Bezeichnungen hat

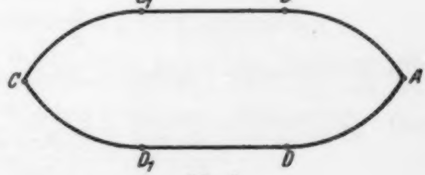

Fig. 7.

$$\sqrt{d\varrho^2 + \varrho^2 dv^2} + \sqrt{d\varrho^2 + \varrho^2 dv_1^2} \geqq 2\sqrt{d\varrho^2 + \varrho^2\left(\frac{dv_1 + dv_2}{2}\right)^2}\,.$$

Die isoperimetrische Ungleichheit gibt, auf die neue Kurve angewendet,

$$(17)\qquad \frac{1}{4\pi}\left(\frac{p+p_1}{2}\right)^2-\frac{f+f_1}{2}\geqq\mu(R-r)^2>(R-r)^2.$$

Wenn O und O_1 nicht doppelsymmetrisch sind, kann man wie früher erst doppelsymmetrische Kurven mit demselben Flächeninhalt und kleinerem Umfang konstruieren, so daß (17) um soviel mehr richtig ist.

Speziell kann man das Minimaloval Ω als Oval O_1 wählen, und (17) gibt dann eine neue, schärfere Ungleichheit für O. Aus

$$\frac{p^2}{4\pi}-f>\frac{p_1^2}{4\pi}-f_1=\mu(R-r)^2$$

folgt nämlich nur

$$\frac{1}{4\pi}\cdot\frac{p^2+p_1^2}{2}-\frac{f+f_1}{2}>\frac{p_1^2}{4\pi}-f_1=\mu(R-r)^2,$$

wo $\frac{p^2+p_1^2}{2}>\left(\frac{p+p_1}{2}\right)^2$.

Es ist jetzt möglich, eine Ungleichheit zu bilden für zwei beliebige Ovale O und O_1, deren Kreisringe die Halbmesser R, r und R_1, r_1 haben, wo doch $R\neq r$ und $R_1\neq r_1$. Wenn $R-r\neq R_1-r_1$, konstruieren wir erst ein mit O_1 ähnliches Oval O_2 im Verhältnis $\frac{R-r}{R_1-r_1}$. Für O_2 ist

$$R_2=\frac{R-r}{R_1-r_1}R_1,\qquad r_2=\frac{R-r}{R_1-r_1}r_1,\qquad R_2-r_2=R-r,$$

$$p_2=\frac{R-r}{R_1-r_1}p_1,\qquad f_2=\left(\frac{R-r}{R_1-r_1}\right)^2 f_1.$$

Wenn jetzt z. B. $r>r_2$, dilatieren wir O_2 um die Strecke $r-r_2$, dann haben wir ein Oval O_3, dessen Kreisring mit dem Kreisring von O kongruent ist, und (17) kann deshalb auf O und O_3 angewendet werden. Aus

$$p_3=2\pi\frac{rR_1-r_1R}{R_1-r_1}+\frac{R-r}{R_1-r_1}p,$$

$$f_3=\pi\left(\frac{rR_1-r_1R}{R-r}\right)^2+\frac{rR_1-r_1R}{R-r}\cdot\frac{R-r}{R_1-r_1}p_1+\left(\frac{R-r}{R_1-r_1}\right)^2 f_1$$

folgt die gewünschte Ungleichheit für O und O_1

$$(18)\qquad \frac{1}{4\pi}\left\{\frac12\left(\frac{p}{R-r}+\frac{p_1}{R_1-r_1}\right)\right\}^2+\frac14\left(\frac{p}{R-r}-\frac{p_1}{R_1-r_1}\right)\frac{rR_1-r_1R}{(R-r)(R_1-r_1)}$$
$$-\frac12\left(\frac{f}{(R-r)^2}+\frac{f_1}{(R_1-r_1)^2}\right)-\frac{\pi}{4}\left(\frac{rR_1-r_1R}{(R-r)(R_1-r_1)}\right)^2>1.$$

(Eingegangen am 2. 7. 1923.)

Zusatz bei der Korrektur.

V. Eine geometrische Repräsentation des Defizits.

11. ***Für jedes Oval vom Umfang p und Flächeninhalt f kann eine Kurve konstruiert werden, welche O umschließt und den Flächeninhalt $\frac{p^2}{4\pi}$ besitzt.***

Die von dieser Kurve und O begrenzte Figur hat den Flächeninhalt $\frac{p^2}{4\pi} - f$ und die Konstruktion liefert also einen anschaulichen Beweis der isoperimetrischen Ungleichheit.

Es seien L und L_1 zwei feste parallele Stützgerade von O, M deren Mittellinie, A eine variable Stützgerade. Wir konstruieren einen Kreis, welcher L, L_1 und A berührt und auf derselben Seite von A wie O liegt. Der Durchmesser 2ϱ des Kreises ist die Breite des Streifens LL_1. Der Berührungspunkt mit A sei P. Wenn A auf L oder L_1 fällt, ist der Kreis nicht bestimmt, jeder Punkt, den L, L_1 mit O gemeinsam hat, kann als Berührungspunkt P betrachtet werden. Wenn A das Oval durchläuft, wird P eine Kurve $\varDelta$ beschreiben, welche außerhalb O liegt, jedoch mit O gewisse Punkte gemeinsam hat, nämlich die Punkte auf L und L_1 und zumindest noch zwei weitere Punkte, wo O von dem erzeugenden Kreis „berührt" wird. $\varDelta$ und O können auch gewisse Kreisbögen vom Halbmesser ϱ gemeinsam haben, wenn O solche enthält, kann aber nur mit O zusammenfallen, wenn O selbst ein Kreis ist.

Es soll jetzt der Flächeninhalt von $\varDelta$ berechnet werden, wobei wir eine Stützgerade mittelst des Winkels θ bestimmen, welchen die äußere Normale mit M bildet. Wir betrachten die den Winkeln θ, $\theta + \pi$, $\pi - \theta$, $2\pi - \theta$ entsprechenden Stützgeraden A, A_1, B, B_1 und die entsprechenden Kreismittelpunkte a, a_1, b, b_1 auf M. Die Kreisberührungspunkte auf A und B und die auf A_1 und B_1 bestimmen zwei Sehnen in $\varDelta$ parallel zu M im Abstand $\varrho \sin\theta$. Die Summe dieser Sehnen ist

$$s = ba + a_1 b_1 + 4\varrho\cos\theta = a_1 a + b b_1 + 4\varrho\cos\theta.$$

Die Parallelen zu A, A_1, B, B_1 durch a, a_1, b, b_1 bestimmen ein Parallelogramm, dessen Höhen $B(\theta) - 2\varrho$ und $B(\pi - \theta) - 2\varrho$ sind, wo $B(\theta)$ die Breite von O in der Richtung θ bedeutet. Hieraus folgt

$$s = \frac{B(\theta) + B(\pi - \theta) - 4\varrho}{\cos\theta} + 4\varrho\cos\theta.$$

Der Flächeninhalt von $\varDelta$ ist also gleich

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} s\, d(\varrho\sin\theta) = \varrho\int_0^{\frac{\pi}{2}} (B(\theta) + B(\pi - \theta) - 4\varrho\sin^2\theta)\, d\theta = \varrho p - \pi\varrho^2.$$

Wir wählen jetzt L und L_1 derart, daß $2\varrho = \frac{p}{\pi}$, was immer möglich ist, weil $\frac{p}{\pi}$ die Mittelbreite des Ovals ist. Dann wird der Flächeninhalt von Δ gerade $\frac{p^2}{4\pi}$, was also größer als f sein muß, wenn O kein Kreis ist. Für jedes brauchbare ϱ gilt die Ungleichheit

$$\varrho p - \pi \varrho^2 \geqq f.$$

Die Maximal- und Minimalbreite B und b bilden die Grenzen von 2ϱ, weshalb

$$\frac{p^2}{4\pi} - f \geqq \frac{\pi}{4}\left(\frac{B-b}{2}\right)^2.$$

Für Ovale konstanter Breite gibt diese Ungleichheit keine Verschärfung der klassischen Ungleichheit. Durch die Symmetrisierung III wird aber jedes Oval in ein neues Oval mit $B = 2R$ und $b = 2r$ transformiert, und damit ist (12) wieder bewiesen. [11. 9. 1923.]

Riemann spaces conformal to Einstein spaces.

Von

H. W. Brinkmann in Cambridge (Mass., U. S. A.).

1. Introduction.

1. 1. Let an n-dimensional Riemann space (which we denote by V_n) be given by its line element

$$(1.11) \qquad ds^2 = g_{\alpha\beta}\, dx_\alpha\, dx_\beta, \qquad |g_{ij}| \neq 0,$$

where the repetition of the subscripts implies summation from 1 to n as usual. Weyl[1]) has found necessary conditions on the g_{ij} which Schouten[2]) proved to be sufficient in order that it be possible to map V_n conformally on Euclidean space, that is, a Riemann space whose line element is given by

$$ds^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + \ldots + dx_n^2.$$

Due to the importance of those Riemann spaces which satisfy Einstein's gravitational equations (see § 2. 1), and which we shall call *Einstein spaces*, it seems natural to ask the following question: When will it be possible to map V_n conformally on an Einstein space and in how many ways can it be done if it is possible? The main purpose of this paper is to answer this question; the desired result is stated in § 4. 1. In § 5 the scalar curvature of the resulting Einstein spaces is discussed, that is, distinction is made between Einstein's original equations and his "cosmological" ones.

Particular interest attaches to the case where the given space, V_n, is itself Einsteinian. This special case is taken up briefly in § 6. The writer has determined all Einstein spaces which can be mapped conformally on Einstein spaces; the results will be given elsewhere in order that the present paper may not be unduly lengthened.

---

[1]) H. Weyl, Math. Zeitschr. 2 (1918), p. 384–411, insb. p. 404.

[2]) J. A. Schouten, Math. Zeitschr. 11 (1921), p. 58–88, insb. 79–82.

The spaces of relativity have the dimension $n = 4$ and are Einstein spaces in the absence of matter. Furthermore, inasmuch as the null-lines in two conformal spaces correspond[3]), the light rays will correspond in two conformal relativity spaces. The dimensionality $n = 4$ is thus of peculiar interest in this connection; it is disposed of in § 7. We might add that $n = 4$ is the lowest dimension which is not trivial from our present point of view (see § 2. 1).

An abstract of this paper appeared in the Proceedings of the National Academy of America **9**, p. 172.

2. The Equations to be solved.

2.1. Any Riemann space V_n^* conformal to V_n can have its line element put in the form

$$ds^2 = g^*_{\alpha\beta}\, dx_\alpha\, dx_\beta \tag{2.11}$$

where

$$g^*_{ij} = e^{2\lambda} g_{ij}, \tag{2.12}$$

λ being a function of $x_1, x_2, \ldots, x_n$; the factor in (2.12) is taken in the form there given for the sake of future convenience. We denote by stars all quantities belonging to V_n^*.

Let R^*_{ij} be the contracted Riemann tensor and R^* the scalar curvature of V_n^*. Then we take the "gravitational equations" for V_n^* alluded to in § 1 in the following, most general, form[4]):

$$R^*_{ij} = \frac{1}{n} R^* g^*_{ij} \tag{2.13}$$

and shall say that V_n^* is an *Einstein space* if and only if (2.13) is obeyed. For $n = 2$ the equation in question is always obeyed and we assume $n > 2$ from now on. It is not difficult to show that, for $n > 2$, (2.13) can hold only if R^* is a constant[5]). Again, a V_3^* for which (2.13) holds is necessarily of constant Riemann curvature (a spherical space)[6]) so that a V_3 conformal to it is conformal to Euclidean space. For $n = 3$ our problem thus reduces to that of Schouten already referred to[2]).

2.2. We must now compute R^*_{ij} in terms of λ and the tensors involving g_{ij} alone. The easiest way to do this is to introduce Riemann normal coordinates with respect to V_n at a point and then to carry out

---

[3]) H. Weyl, Raum-Zeit-Materie, 4. Aufl., Berlin 1921, p. 115.

[4]) A. Einstein, Sitzber. Ak. Wiss. Berlin 1919, p. 349–356.

[5]) G. Herglotz, Ber. Ges. Wiss. Leipzig **68** (1916), p. 203.

[6]) J. A. Schouten and D. J. Struik, Amer. J. Math. **43** (1921), p. 213–216.

the computation for this point only. If we denote first, second, ... covariant derivatives with respect to (1.11) of a tensor $T_{ij..}$ by

$$T_{ij..|k}, \quad T_{ij..|kl}, \quad \ldots,$$

we find

$$R^{*}_{ij} = R_{ij} + (n-2)\,M_{ij} + M g_{ij} \tag{2.21}$$

where

$$M_{ij} = \lambda_{|ij} - \lambda_{|i}\lambda_{|j} + \frac{1}{2} g_{ij}\,\varDelta_1\,\lambda, \tag{2.22}$$

$$M = g^{\alpha\beta} M_{\alpha\beta}, \qquad \varDelta_1\,\lambda = g^{\alpha\beta}\lambda_{|\alpha}\lambda_{|\beta}.$$

These formulas have been given by Levi-Civita [7]).

From (2.21) we obtain

$$e^{2\lambda} R^{*} = R + 2(n-1)\,M. \tag{2.23}$$

Now (2.13) is really

$$R^{*}_{ij} = \frac{1}{n} R^{*} g_{ij} e^{2\lambda} \tag{2.24}$$

and when we substitute in this the value of R^{*}_{ij} found from (2.21) after putting into it the value of M obtained from (2.23) there results

$$M_{ij} + \frac{1}{n-2}\left[R_{ij} - \frac{R}{2(n-1)} g_{ij}\right] = \frac{R^{*}}{2n(n-1)} g_{ij} e^{2\lambda}. \tag{2.25}$$

Conversely, if (2.25) is satisfied, so will (2.24) and (2.13) be. We define a tensor L_{ij} as follows,

$$(n-2)\,L_{ij} = -\left[R_{ij} - \frac{R}{2(n-1)} g_{ij}\right];$$

then (2.25) can be replaced by the system

$$\lambda_{|ij} - \lambda_{|i}\lambda_{|j} + \varLambda g_{ij} = L_{ij}, \tag{2.26}$$

$$\varLambda = \frac{1}{2}\varDelta_1\,\lambda - \frac{R^{*}}{2n(n-1)} e^{2\lambda}, \quad R^{*} \text{ a constant.} \tag{2.27}$$

2.3. We may put this system into a more convenient form in this manner. From (2.26) and (2.27) we easily obtain

$$\varLambda_{|i} = \varLambda\,\lambda_{|i} + \lambda_{|\alpha} L^{\alpha}_{i} \tag{2.31}$$

where

$$L^{j}_{i} = g^{j\alpha} L_{\alpha i}.$$

Conversely, if λ and $\varLambda$ satisfy (2.26) and (2.31), (2.27) will be satisfied for some constant R^{*}. But the system (2.26), (2.31) may be replaced by the system

$$\lambda_{i|j} - \lambda_i\lambda_j + \varLambda g_{ij} = L_{ij}, \tag{2.32}$$

$$\varLambda_{|i} = \varLambda\,\lambda_i + \lambda_\alpha L^{\alpha}_{i} \tag{2.33}$$

7) T. Levi-Civita, Rend. Acc. Lincei Roma 1918, p. 187.

where λ_i is any vector and Λ any scalar. For a solution λ_i of (2.32) has the property $\lambda_{i/j} = \lambda_{j/i}$, hence we can put $\lambda_i = \lambda_{/i}$ and λ, Λ will then satisfy (2.26) and (2.31) that is, λ will make the space whose line element is given by (2.11), (2.12) Einsteinian. The function λ will be determined from λ_i up to an additive constant which is non-essential since it merely multiplies (2.11) through by a constant.

3. The Necessary Conditions.

3.1. We proceed to derive conditions which must necessarily be satisfied if the system (2.32), (2.33) is compatible. To do this we substitute from (2.32) in the well-known formula

$$\lambda_{i/jk} - \lambda_{i/kj} = \lambda_\alpha R^\alpha_{ijk}$$

where

$$R^i_{jkl} = g^{i\alpha} R_{\alpha jkl}$$

is the Riemann-Christoffel tensor of V_n[8]).

By the aid of (2.33) and further use of (2.32) we come out with

$$\lambda^\alpha C_{\alpha ijk} = S_{ijk} \tag{3.11}$$

where

$$\lambda^i = g^{i\alpha} \lambda_\alpha,$$

C_{ijkl} is the "conform curvature" tensor:

$$C_{ijkl} = R_{ijkl} + g_{il} L_{jk} - g_{ik} L_{jl} + g_{jk} L_{il} - g_{jl} L_{ik},$$

and

$$S_{ijk} = L_{ij/k} - L_{ik/j}.$$

From (3.11) we deduce

Theorem I. *The system* (2.32), (2.33) *is completely integrable if and only if V_n is conform-euclidean.*

For the system in question is completely integrable only if $C_{ijkl} = 0$ and $S_{ijk} = 0$ and according to Schouten[2]) V_n is then conform-euclidean.

Now we differentiate (3.11) covariantly, substitute from (2.32) and (3.11) and finally arrive at

$$\lambda_\alpha [C^\alpha_{ijk/l} + \delta^\alpha_l S_{ijk}] - \Lambda C_{lijk} = S_{ijk/l} - L_{\alpha l} C^\alpha_{ijk}. \tag{3.12}$$

This process can clearly be continued and yields equations of which the q^{th} is of the form

$$\lambda_\alpha A^\alpha - \Lambda B = T \tag{3.13}$$ (I_q)

where A^α, B, T are tensors of ranks $q+4, q+3, q+3$ respectively; here $q = 0$ and $q = 1$ correspond to (3.11) and (3.12).

[8]) G. Ricci and T. Levi-Civita, Math. Ann. 54 (1901), p. 143.

Suppose in fact that λ_i, Λ satisfy (3.13); when this is differentiated the result can be written

$$A^a[\lambda_{a/i} - \lambda_a \lambda_i + \Lambda g_{ai} - L_{ai}] - B[\Lambda_{/i} - \Lambda \lambda_i - \lambda_a L_i^a] + [\lambda_a \bar{A}^a - \Lambda \bar{B} - \bar{T}] = 0 \tag{3.14}$$

where

$$\begin{aligned} \bar{A}^a &= A^a_{/i} + \delta^a_i T - B L^a_i, \\ \bar{B} &= B_{/i} + A_i, \\ \bar{T} &= T_{/i} - L_{ai} A^a. \end{aligned} \tag{3.15}$$

If, then, λ_i and Λ satisfy (2.32), (2.33) as well as (3.13) they must satisfy

$$\lambda_a \bar{A}^a - \Lambda \bar{B} = \bar{T} \qquad (I_{q+1}) \tag{3.16}$$

and this $(q+1)^{\text{th}}$ equation I_{q+1} is obtained from the q^{th} I_q by means of the recursion formulas (3.15). Thus we get the following preliminary theorem.

Theorem II. *In order that it be possible to map V_n conformally on an Einstein space all the equations of type* (3.13) *must be compatible in λ_i and Λ.*

4. The Necessary and Sufficient Condition.

4.1 Consider the equations I_q $(q = 0, 1, \ldots)$ in order. Two things can happen, either the equations cease to be compatible as a set after a certain value of q has been reached, or there comes a time when all the solutions common, say to

$$I_0, I_1, \ldots, I_t \qquad (t \geqq 1), \tag{4.11}$$

satisfy I_{t+1} also. If the first happens Theorem II takes care of the situation; the second case is covered by the following theorem.

Theorem III. *If the system* (4.11) *has just r linearly independent solutions and all of these satisfy I_{t+1} also, then the system* (2.32), (2.33) *is compatible and its solution involves $r-1$ arbitrary constants.*

In view of § 2.3 we may then state the main result as follows.

Theorem IV. *In order that it be possible to map V_n conformally on Einstein spaces with just $r-1$ essential arbitrary constants at our disposal it is necessary and sufficient that a t $(t \geqq 1)$ exist for which the system* (4.11) *has just r linearly independent solutions and all of these satisfy I_{t+1}.*

It remains to prove Theorem III. On the basis of a preliminary remark made in § 4.2 this will be done for the case $r = 1$ in § 4.3; the proof for $r > 1$ is sketched in § 4.4.

4.2 Suppose λ_i, Λ satisfy the two tensor equations I_q and I_{q+1}. Then (3.14) shows that

$$A^a[\lambda_{a/j} - \lambda_a\lambda_j + \Lambda g_{aj} - L_{aj}] - B[\Lambda_{/j} - \Lambda\lambda_j - \lambda_a L_j^a] = 0.$$

If we denote by J_q the homogeneous equation corresponding to I_q:

$$\lambda_a A^a - \Lambda B = 0, \qquad (J_q)$$

we see that

$$\lambda_{i/j} - \lambda_i\lambda_j + \Lambda g_{ij} - L_{ij}, \quad \Lambda_{/j} - \Lambda\lambda_j - \lambda_a L_j^a$$

is a solution of J_q for each value of j.

4.3 Under the assumption that $r = 1$ let λ_i, Λ be the unique solution of the system (4.11); this also satisfies I_{t+1}. The homogeneous system

$$(4.31) \qquad J_0, J_1, \ldots, J_t$$

is then incompatible, hence § 4.2 shows that λ_i, Λ satisfy (2.32), (2.33) and that is all we had to show.

4.4 Assume now that $r > 1$ and let

$$\lambda_i^{(\varrho)}, \Lambda^{(\varrho)} \qquad (\varrho = 1, 2, \ldots, r-1),$$

be a complete set of linearly independent solutions of the homogeneous system (4.31); from now on ϱ, σ shall be understood to run from 1 to $r - 1$. Let λ_i^*, Λ^* be any particular solution of (4.11), then § 4.2 shows that

$$(4.41) \qquad \lambda_{i/j}^* - \lambda_i^*\lambda_j^* + \Lambda^* g_{ij} - L_{ij} = \sum_\sigma \mu_j^{(\sigma)}\lambda_i^{(\sigma)},$$

$$(4.42) \qquad \Lambda_{/j}^* - \Lambda^*\lambda_j^* - \lambda_a^* L_j^a = \sum_\sigma \mu_j^{(\sigma)}\Lambda^{(\sigma)}.$$

Similar equations hold if $\lambda_i^* + \lambda_i^{(\varrho)}$, $\Lambda^* + \Lambda^{(\varrho)}$ be substituted for λ_i^*, Λ^* respectively and when (4.41), (4.42) are subtracted from the equations so obtained the result is

$$(4.43) \qquad \lambda_{i/j}^{(\varrho)} - \lambda_i^*\lambda_j^{(\varrho)} + \Lambda^{(\varrho)} g_{ij} = \sum_\sigma \nu_j^{\varrho\sigma}\lambda_i^{(\sigma)},$$

$$(4.44) \qquad \Lambda_{/j}^{(\varrho)} - \lambda_j^{(\varrho)}\Lambda^* - \lambda_a^{(\varrho)} L_j^a = \sum_\sigma \nu_j^{\varrho\sigma}\Lambda^{(\sigma)}.$$

We put

$$(4.45) \qquad \lambda_i = \lambda_i^* + \sum_\sigma b^{(\sigma)}\lambda_i^{(\sigma)}, \quad \Lambda = \Lambda^* + \sum_\sigma b^{(\sigma)}\Lambda^{(\sigma)}$$

and seek to determine the functions $b^{(\varrho)}$ so that λ_i, Λ satisfy the equations (2.32) and (2.33). Substitution shows that $b^{(\varrho)}$ must satisfy the equations

$$(4.46) \qquad b_{/i}^{(\varrho)} + \mu_i^{(\varrho)} + \sum_\sigma b^{(\sigma)}\nu_i^{\sigma\varrho} - b^{(\varrho)}\lambda_i = 0,$$

λ_i being obtained from (4.45), and *this system is completely integrable.*

The proof of this fact is rather tedious and will be omitted here; it is not difficult if one keeps in mind the equations (4.41) to (4.44) at all times.

The proof of Theorem III is then complete.

5. The Scalar Curvature R^*.

5.1. If the value of R^* obtained in any case is not zero we can make it take any non-zero value we please by correctly disposing of the arbitrary additive constant involved in the determination of λ. But can we make $R^* = 0$ under these conditions or, if it should happen to be zero at the outset, can we change matters so that $R^* \neq 0$? When $r = 1$ we clearly have to take R^* as it comes but for $r > 1$ we can prove the following theorems.

Theorem V. *If $r > 1$ we can always make $R^* = 0$.*

Theorem VI. *In order that we may be able to make $R^* \neq 0$ it is sufficient that*

$$g^{\alpha\beta} \mu_\alpha \nu_\beta \not\equiv 0$$

for some two (not necessarily different) solutions μ_i, M; ν_i, N of the homogeneous system (4.31).

From Theorem VI we see at once that, provided $r > 1$, we can make $R^* \neq 0$ in case the g_{ij} are real and (1.11) is a definite form.

5.2. To prove these theorems we use the notation of § 4.4. We may assume that

$$\lambda_i^* = \lambda_{/i}^*, \quad \Lambda^*$$

and

$$\lambda_{/i}^{*(\varrho)} = \lambda_i^* + \lambda_i^{(\varrho)}, \quad \Lambda^{*(\varrho)} = \Lambda^* + \Lambda^{(\varrho)}$$

satisfy (2.32) and (2.33) so that λ^* and $\lambda^{*(\varrho)}$ correspond to conformal maps; let the corresponding scalar curvatures be $\bar{R}$ and $R^{(\varrho)}$; put

$$\lambda^{(\varrho)} = \lambda^{*(\varrho)} - \lambda^*.$$

Now we determine $b^{(\sigma)}$ in (4.45) so that λ_i, Λ satisfy (2.32) and (2.33); if R^* denotes the corresponding scalar curvature we readily show that

$$\sum_{\varrho,\sigma} b^{(\varrho)} b^{(\sigma)} \Delta(\lambda^{(\varrho)}, \lambda^{(\sigma)}) + \sum_\sigma D^{(\sigma)} b^{(\sigma)} + \frac{\bar{R}}{n(n-1)} e^{2\lambda^*} = \frac{R^*}{n(n-1)} e^{2\lambda}$$

where

$$\Delta(\lambda^{(\varrho)}, \lambda^{(\sigma)}) = g^{\alpha\beta} \lambda_{/\alpha}^{(\varrho)} \lambda_{/\beta}^{(\sigma)}$$

$$D^{(\sigma)} = -\Delta_1 \lambda^{(\sigma)} + \frac{e^{2\lambda^*}}{n(n-1)} [\bar{R} - R^{(\sigma)} e^{2\lambda^{(\sigma)}}].$$

It follows from this that by appropriate choice of initial values of $b^{(\varrho)}$ we can make R^* take any value we please unless

$$\Delta(\lambda^{(\varrho)}, \lambda^{(\sigma)}) \equiv 0 \qquad (\varrho, \sigma = 1, 2, \ldots, r-1),$$
$$\overline{R} = R^{(\sigma)} = 0 \qquad (\sigma = 1, 2, \ldots, r-1).$$

This proves both theorems.

6. Application to Einstein Spaces.

6.1. Let V_n itself be an Einstein space, so that

$$R_{ij} = \frac{1}{n} R g_{ij},$$

R being a constant in consequence. Then V_n can be mapped conformally on an Einstein space, namely itself, by taking $\lambda = \text{const.}$, that is,

$$\lambda_{|i} = 0, \qquad A = -\frac{R}{2n(n-1)} e^{2\lambda}.$$

The equations I_q of § 3 must accordingly be satisfied by these values — a fact which it is easy to verify directly. We call this map, which amounts merely to a change of scale, a *trivial* map of the V_n. A *non-trivial* map maps the Einstein space V_n on another such space V_n^* which may or may not be isometric with V_n, but if it is, the isometric map will not be established by our conformal one even if a change of scale be allowed.

Let K_n be a generic notation for an Einstein space of non-vanishing scalar curvature and let L_n be a generic notation for an Einstein space for which $R = 0$. The application of Theorems V and VI (§ 5) yields the following results, "map" being understood to mean "conformal map".

Theorem VII. *If a $K_n(L_n)$ can be mapped on an $L_n(K_n)$ in essentially more than one way it can be mapped non-trivially on a $K_n(L_n)$.*

Theorem VIII. *If a K_n can be mapped non-trivially on a K_n it can be mapped on an L_n.*

Theorem IX. *If an L_n can be mapped non-trivially on an L_n it can be mapped on a K_n, with the possible exception of the case where for any two functions λ, μ negotiating two of the given non-trivial maps the equation*

$$g^{\alpha\beta} \lambda_{|\alpha} \mu_{|\beta} \equiv 0$$

is satisfied.

6.2. It has already been mentioned in the introduction that the writer has determined all Einstein spaces which can be conformally mapped (non-trivially) on Einstein spaces. From the explicit expressions

for the line elements of such spaces the following theorem — which is here stated without proof — can immediately be derived.

Theorem X. *If two Einstein spaces are mapped conformally and their scalar curvatures are both not zero, then either space*[9]) *is isometric to that obtained from the other by a suitable change of scale.*

7. The Dimensionality $n = 4$.

7.1. Our discussion of the case $n = 4$ rests upon the following lemma.

Lemma. *When $n = 4$ the equation J_0, namely*

$$\lambda^{\alpha} C_{\alpha ijk} = 0 \tag{7.11}$$

implies either

$$C_{ijkl} = 0 \tag{7.12}$$

or

$$g^{\alpha\beta} \lambda_{\alpha} \lambda_{\beta} = 0. \tag{7.13}$$

The equation (7.11) means that the tensor $C_{\alpha ijk}$ lies in the three-dimensional space normal to the vector λ^{α}. Assume that (7.13) does not hold, then this three-dimensional space is a proper Riemann space V_3, that is, its fundamental quadratic form has a non vanishing determinant.

Now in a V_3 a tensor P_{ijkl} with the symmetry properties of R_{ijkl} can always be written in the form[10])

$$P_{ijkl} = g_{ik} Q_{jl} - g_{il} Q_{jk} + g_{jl} Q_{ik} - g_{jk} Q_{il};$$

if, in addition, we know that

$$g^{il} P_{ijkl} = 0,$$

it follows at once that $P_{ijkl} = 0$. Now our C_{ijkl} lies in a V_3, has all the symmetry properties of R_{ijkl} and furthermore, $g^{il} C_{ijkl} = 0$; consequently $C_{ijkl} = 0$.[11])

7.2. We shall call a conformal map *proper* if it arises from a function λ for which

$$\Delta_1 \lambda \equiv g^{\alpha\beta} \lambda_{/\alpha} \lambda_{/\beta} \not\equiv 0,$$

otherwise we call it *improper*. If we restrict ourselves to real coefficients g_{ij} throughout and to definite quadratic forms (1.11), a conformal map is necessarily proper. We shall consider only proper maps from now on, the

---

[9]) The corresponding theorem for two Einstein spaces of zero scalar curvature holds provided the map be proper in the sense of § 7.2.

[10]) Schouten, loc. cit. [1]), p. 84.

[11]) The writer is indebted to Professor J. A. Schouten for this elegant proof of the lemma.

improper maps act quite differently and will be discussed on another occasion.

As an immediate consequence of the lemma we may restate Theorem IV for $n = 4$ as follows.

Theorem XI. *In order that a V_4 which is not conform-euclidean can be mapped conformally on an Einstein space by a proper map it is necessary and sufficient that the equation I_0 have a solution (necessarily unique) which with some A (necessarily unique) satisfies I_1 and I_2.*

Theorem XII. *A V_4 which is not conform-euclidean can be mapped conformally by a proper map on essentially at most one Einstein space and the mapping can be accomplished (if at all) in one way only provided we agree to neglect a change of scale.*

In particular, if V_4 happens to be an Einstein space itself it is conform-euclidian only if it is of constant Riemann curvature, hence we obtain

Theorem XIII. *If two four-dimensional Einstein spaces are mapped conformally by a proper map they are both of constant Riemann curvature (spherical spaces).*

The conformal maps of spaces of constant curvature on each other are well known, hence they need not detain us here.

Theorem XIII is proved by Kasner[12]) for two special cases, namely,

a) V_4 is conform-euclidean as well as Einsteinian,

b) V_4 is defined by the Schwarzschild solar field line element and $R^* = 0$.

That an Einsteinian V_n (for any n) is necessarily of constant Riemann curvature if it is conform-euclidean is proved by Schouten and Struik[9]).

7.3. A direct consequence of the lemma is the following.

Theorem XIV. *A V_4 for which*

$$S_{ijk} = 0$$

but which is neither conform-euclidean nor Einsteinian cannot be mapped conformally on an Einstein space by a proper map.

---

[12]) E. Kasner, Amer. J. Math. **43** (1921), pp. 20–28, and pp. 219–220; Math. Ann. **85** (1922), p. 227–236.

(Eingegangen am 12. 6. 1922.)

Über die bedingt-periodische Bewegung eines Massenpunktes.

Von

J. Weinacht in München.

Stäckel hat in seiner Habilitationsschrift zuerst die bedingt periodische Bewegung eines mechanischen Systems in n Freiheitsgraden behandelt für den Fall, daß in der kinetischen Energie $T = \frac{1}{2}\sum a^{ik} p_i p_k$ nur die Quadrate der Impulse p_i, nicht aber Terme der Form $a^{ik} p_i p_k$ $(i \neq k)$ vorkommen. Später hat dann Levi-Civita[1]) eine Methode angegeben, die die Aufstellung der Separationsbedingungen auch im allgemeinen Fall einer nicht orthogonalen quadratischen Form der kinetischen Energie erlaubt in Form eines Systems von Differentialgleichungen zweiter Ordnung. Dieses zerfällt in zwei Teile: Ein System für die kinetische Energie, d. h. für die Größen a^{ik}, und eines, in welchem neben den a^{ik} auch die Kräftefunktion eingeht. Dall' Acqua[2]) hat dieses für den Fall von n Freiheitsgraden wirklich aufgestellt und für $n = 3$ auch das die kinetische Energie betreffende System integriert, nachdem dies von Levi-Civita bereits für $n = 2$ geschehen war. Unter der Voraussetzung, daß $T = \text{konst.}\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = \text{konst}\sum a_{ik}\frac{dx_i}{dt}\cdot\frac{dx_k}{dt}$ findet letzterer für $n = 2$ eine der folgenden Formen für das Linienelement ds:

$$\text{(I)}\quad \begin{cases} ds^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + 2\cos(X_1 + X_2)\,dx_1\,dx_2, \\ ds^2 = e\,dx_1^2 + 2f\,dx_1\,dx_2 + g\,dx_2^2, \\ ds^2 = (X_1 + X_2)(dx_1^2 + dx_2^2), \end{cases}$$

wobei $X_1 = X_1(x_1)$; $X_2 = X_2(x_2)$; e, f, g aber entweder von x_1 allein oder von x_2 allein abhängen; Dall' Acqua für $n = 3$:

---

[1]) Math. Annalen 59 (1904), S. 383 ff.

[2]) Math. Annalen 66 (1908), S. 398 ff.

$$
\text{(II)}\quad \begin{cases}
ds^2 = \sum\limits_{r,s=1}^{3}(a_r a_s + b_r b_s + c_r c_s)\, dx_r\, dx_s, \\
ds^2 = (a_3 + 2\, l_1' c_3 + l_1'^2 b_3)\, dx_1^2 + (m_2'^2 a_3 + 2 m_2' c_3 + b_3)\, dx_2^2 + dx_3^2 \\
\qquad + 2(m_2' a_3 + l_1' b_3 + (1 + l_1' m_2')\, c_3)\, dx_1\, dx_2 + 2(c_3' + m_2' d_3')\, dx_2\, dx_3 \\
\qquad + 2\,(l_1' c_3' + d_3')\, dx_1\, dx_3, \\
ds^2 = \frac{a_1 - b_2}{c_1 - d_2}\big\{ l_1'^2 + c_1 - d_2)\, dx_1^2 + (m_2'^2 + c_1 - d_2)\, dx_2^2 + dx_3^2 \\
\qquad + 2\, l_1' m_2'\, dx_1\, dx_2 + 2\, m_2'\, dx_2\, dx_3 + 2\, l_1'\, dx_1\, dx_3\big\}, \\
ds^2 = \sum\limits_{h=1}^{3} \varphi_h (q_{h+1} - q_{h+2}) \sum\limits_{r=1}^{3} \frac{dx_r^2}{|q_{r+1} - q_{r+2}|}.
\end{cases}
$$

Der Index an einem Buchstaben bedeutet, daß die betreffende Größe nur von den Variablen mit dem betreffenden Index abhängt. Ferner ist $q_4 = q_1$; $q_5 = q_2$ usw. Die Form der Kräftefunktion ist von Stäckel nur im orthogonalen Falle angegeben.

Mit Hilfe der vorliegenden Bedingungen kann man nun wohl an einer gegebenen Form des Linienelementes feststellen, ob das Problem in den *gegebenen* Variablen separierbar ist oder nicht; die Frage aber, ob das Problem überhaupt separierbar ist, wenn man nur die Variablen geeignet wählt, bleibt offen. Es handelt sich also im wesentlichen darum, festzustellen, welches die allgemeinsten Separationsvariablen sind, und welche Kräftefunktionen U den Separationsbedingungen[3]) genügen, wenn die U durch diese Variablen ausgedrückt werden.

Wir wollen diese Fragen im folgenden bei der Bewegung eines einzelnen Massenpunktes untersuchen, und zwar unter der Voraussetzung, daß die in kartesischen Koordinaten gegebene Hamiltonsche Gleichung durch eine *Punkttransformation* in eine der separierbaren Formen von Levi-Civita zw. von Dall' Acqua überführbar ist. Da der klassischen Mechanik ein euklidisches Linienelement zugrunde liegt, so ist für den Fall von drei Freiheitsgraden zu fordern, daß der Krümmungstensor

$$
\text{(III)}\quad \begin{aligned}
[rk, ih] = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 a_{rh}}{\partial x_i\, \partial x_k} + \frac{\partial^2 a_{ik}}{\partial x_r\, \partial x_h} - \frac{\partial^2 a_{ri}}{\partial x_h\, \partial x_k} - \frac{\partial^2 a_{hk}}{\partial x_r\, \partial x_i}\right) \\
+ \sum_{l,m} a^{l,m}\left(\begin{bmatrix} rh \\ m \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ik \\ l \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} ri \\ m \end{bmatrix}\begin{bmatrix} kh \\ l \end{bmatrix}\right)
\end{aligned}
$$

identisch verschwindet. Dies bedingt eine Einschränkung für die Größen a_{ik}, die uns erlauben wird, die Separationsvariablen durch die kartesischen Koordinaten auszudrücken. Haben wir zwei Freiheitsgrade, also etwa die Bewegung eines Punktes auf einer Fläche, so ist zwar im allgemeinen

[3]) Vgl. Dall' Acqua l. c., S. 403.

die zweidimensionale Krümmung $\neq 0$; wir hätten dann an Stelle von (III) den Codazzi-Gaußschen Gleichungen der Flächentheorie zu genügen. Es gelingt dann nicht, die allgemeinsten Separationsvariablen explizit anzugeben. Für den Fall aber, der besonders interessiert, für die freie Bewegung eines Massenpunktes, ist die Bewegung in zwei Freiheitsgraden eine ebene, und dann lassen sich, da die Krümmung verschwindet, auch hier wieder Variable und Kräftefunktion bestimmen, bei denen Separation möglich ist. Dies soll im folgenden zunächst für zwei und dann für drei Freiheitsgrade geschehen.

Zwei Freiheitsgrade (ebene Bewegung eines Punktes).

§ 1.

Die Separationsvariablen.

Legen wir das Linienelement $ds^2 = e\,dx_1^2 + 2f\,dx_1\,dx_2 + g\,dx_2^2$ zugrunde, so läßt sich die Bedingung der verschwindenden Krümmung schreiben:

$$(1)\qquad \frac{\partial}{\partial x_1}\left\{\frac{1}{\delta e}\left(e\frac{\partial g}{\partial x_1} - f\frac{\partial e}{\partial x_2}\right)\right\} + \frac{\partial}{\partial x_2}\left\{\frac{1}{\delta \cdot e}\left(e\frac{\partial e}{\partial x_2} + f\frac{\partial e}{\partial x_1} - 2e\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)\right\} = 0,$$

$$\text{wo } \delta = \sqrt{eg - f^2}.$$

Wenn y_1, y_2 die in der Ebene des Massenpunktes gelegenen kartesischen Koordinaten bezeichnen, so genügen diese den aus den Gaußschen Gleichungen der Flächentheorie für verschwindende Fundamentalgrößen zweiter Ordnung hervorgehenden Gleichungen:

$$(2)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 y}{\partial x_1^2} - \dfrac{1}{2\delta^2}\left\{g\dfrac{\partial e}{\partial x_1} + f\dfrac{\partial e}{\partial x_2} - 2f\dfrac{\partial f}{\partial x_1}\right\}\dfrac{\partial y}{\partial x_1} + \dfrac{1}{2\delta^2}\left\{e\dfrac{\partial e}{\partial x_2} + f\dfrac{\partial e}{\partial x_1} - 2e\dfrac{\partial f}{\partial x_1}\right\}\dfrac{\partial y}{\partial x_2} = 0. \\[2ex] \dfrac{\partial^2 y}{\partial x_1\,\partial x_2} - \dfrac{1}{2\delta^2}\left\{g\dfrac{\partial e}{\partial x_2} - f\dfrac{\partial g}{\partial x_1}\right\}\dfrac{\partial y}{\partial x_1} - \dfrac{1}{2\delta^2}\left\{e\dfrac{\partial g}{\partial x_1} - f\dfrac{\partial e}{\partial x_2}\right\}\dfrac{\partial y}{\partial x_2} = 0, \\[2ex] \dfrac{\partial^2 y}{\partial x_2^2} + \dfrac{1}{2\delta^2}\left\{g\dfrac{\partial g}{\partial x_1} + f\dfrac{\partial g}{\partial x_2} - 2g\dfrac{\partial f}{\partial x_2}\right\}\dfrac{\partial y}{\partial x_1} - \dfrac{1}{2\delta^2}\left\{e\dfrac{\partial g}{\partial x_2} + f\dfrac{\partial g}{\partial x_1} - 2f\dfrac{\partial f}{\partial x_2}\right\}\dfrac{\partial y}{\partial x_2} = 0. \end{cases}$$

Wir wenden nun die Gleichungen der Reihe nach auf die drei Formen des Linienelements (I) an.

Fall I_1. $e = g = 1$; $f = \cos(X_1 + X_2)$; (1) ist erfüllt. Aus (2) folgt:

$$(3)\qquad \frac{\partial^2 y_k}{\partial x_1\,\partial x_2} = 0; \qquad y_1 = U_1(x_1) + V_1(x_2); \qquad y_2 = U_2(x_1) + V_2(x_2).$$

Dies sind die allgemeinsten Lösungen des Falles, wenn wir auf die Normierung $e = g = 1$, die offenbar für die Separation unwesentlich ist, verzichten. Aus (3) ergibt sich dann auch die Form für f.

Fall I_2. $e = e(x_1)$; $f = f(x_1)$; $g = g(x_1)$, Gleichung (1) gibt:

$$\frac{\partial}{\partial x_1}\frac{1}{\delta}\frac{\partial g}{\partial x_1} = 0; \qquad \frac{\partial g}{\partial x_1} = 2k\delta,$$

wo k eine Integrationskonstante ist. Die zweite und dritte Gleichung (2) werden:

$$\delta^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{1}{2} f \frac{\partial g}{\partial x_1}\cdot\frac{\partial y}{\partial x_1} - \frac{1}{2} e \frac{\partial g}{\partial x_1}\cdot\frac{\partial y}{\partial x_2} = 0,$$

$$\delta^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x_2^2} + \frac{1}{2} g \frac{\partial g}{\partial x_1}\cdot\frac{\partial y}{\partial x_1} - \frac{1}{2} f \frac{\partial g}{\partial x_1}\cdot\frac{\partial y}{\partial x_2} = 0.$$

Differenziert man die letzte Gleichung nach x_2 und drückt darin $\frac{\partial^2 y}{\partial x_1 \partial x_2}$, $\frac{\partial^2 y}{\partial x_2^2}$ durch die aus den vorstehenden Gleichungen hervorgehenden Werte aus, so kommt:

$$\frac{\partial^3 y_i}{\partial x_2^3} + k^2 \cdot \frac{\partial y_i}{\partial x_2} = 0; \qquad y_i = \varrho_i(x_1)\cos(kx_2 + \varphi_i(x_1)) + \psi_i(x_1).$$

Da nun $g = g(x_1) = \left(\frac{\partial y_1}{\partial x_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial y_2}{\partial x_2}\right)^2$, so folgt leicht: $\varrho_1 = \varrho_2 = \varrho$; $\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi$ und ebenso wegen $\left(\frac{\partial y_1}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial y_2}{\partial x_1}\right)^2 = e(x_1)$: $\psi_1' = \psi_2' = 0$. Sehen wir von Translationen ab, so sind:

(4) $\quad y_1 = \varrho(x_1)\cos(kx_2 + \varphi(x_1)); \qquad y_2 = \varrho(x_1)\sin(kx_2 + \varphi(x_1))$

die dem Falle I_2 entsprechenden Separationsvariablen.

Fall I_3: $e = g = X_1(x_1) + X_2(x_2)$; $f = 0$. Gleichung (1) wird:

$$\frac{\partial}{\partial x_1}\left[\frac{X_1'}{X_1 + X_2}\right] + \frac{\partial}{\partial x_2}\left[\frac{X_2'}{X_1 + X_2}\right] = 0. \tag{5}$$

Aus dieser leitet man leicht durch Differentiation die Gleichung ab:

$$X_1' X_2''' + X_2' X_1''' = 0; \qquad X_1''' = k^2 X_1'; \qquad X_2''' = -k^2 X_2'.$$

Geht man mit dem hieraus folgenden Ansatz für X_1 und X_2 in (5) ein, so folgt:

$$X_1 + X_2 = e = A(\mathrm{Cof}(kx_1 + \alpha) - \cos(kx_2 + \beta)).$$

Dann liegt aber bekanntlich das Linienelement für elliptische Koordinaten vor, deren Gleichungen sind:

$$y_1 + i y_2 = a \cos\frac{k}{2}(x_2 + i x_1). \tag{6}$$

Von Drehungen und Translationen ist abgesehen.

§ 2.

Die Kräftefunktionen.

Die Bedingungen für die Kräftefunktionen sind von Dall' Acqua a. a. O., S. 403 allgemein gegeben für n Freiheitsgrade. Für $n = 2$ spezialisiert lauten sie:

$$a^{12}\frac{\partial U}{\partial x_1}\frac{\partial U}{\partial x_2} = 0; \quad a^{12}\frac{\partial U}{\partial x_1}\frac{\partial a_{11}}{\partial x_2} = a^{12}\frac{\partial U}{\partial x_2}\frac{\partial a_{22}}{\partial x_1} = 0;$$

$$\frac{\partial U}{\partial x_1}\left\{a^{11}\frac{\partial a_{12}}{\partial x_2} + \frac{a^{12}}{2}\frac{\partial a_{22}}{\partial x_2}\right\} = \frac{\partial U}{\partial x_2}\left\{\frac{a^{12}}{2}\frac{\partial a_{11}}{\partial x_1} + a^{22}\frac{\partial a_{12}}{\partial x_1}\right\} = 0;$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{\partial U}{\partial x_1}a^{11}\frac{\partial a_{11}}{\partial x_2} + \frac{\partial U}{\partial x_2}a^{22}\frac{\partial a_{22}}{\partial x_1} = 0.$$

Im Falle (I_1) folgt aus den beiden vorletzten Gleichungen

$$\frac{\partial U}{\partial x_1} = \frac{\partial U}{\partial x_2} = 0, \text{ also } U = \text{konst.}$$

Soll aber U auch etwa von x_1 abhängen, so muß $a^{11}\frac{\partial a_{12}}{\partial x_2} + \frac{a^{12}}{2}\frac{\partial a_{22}}{\partial x_2} = 0$ sein, oder nach Ausrechnung: $\begin{vmatrix} V_1'' & V_2'' \\ V_1' & V_2' \end{vmatrix} = 0$, d. h. V_1' und V_2' sind linear abhängig. Durch eine Drehung des Koordinatensystems kann dann erreicht werden, daß: $y_1 = U_1$; $y_2 = U_2 + V_2$. Aus der letzten Gleichung folgt dann $U = \varphi(x_1)$ oder $U = f(y_1)$. Sollte auch $\frac{\partial U}{\partial x_2} \neq 0$ sein, so müßte auch $a^{12} = 0$ sein und dann hätten wir den orthogonalen Fall; dieser ergibt sich ebenso als Ausartung von I_3 wie der vorhergehende als Sonderfall von I_2.

Im Falle I_2 ist $\frac{\partial U}{\partial x_2} = 0$; $U = \psi(x_1) = \varphi(\sqrt{y_1^2 + y_2^2})$, und bei der dritten Möglichkeit I_3, wo $a^{12} = 0$ ist, folgt leicht:

$$U = \frac{\varphi(x_1) + \psi(x_2)}{\mathfrak{Cof}\,(k x_1) - \cos k x_2}.$$

Da nach (6) $y_1 = a \cos\frac{k}{2}x_2 \cdot \mathfrak{Cof}\,\frac{k}{2}x_1$; $\quad y_2 = -a \sin\frac{k}{2}x_2 \cdot \mathfrak{Sin}\,\frac{k}{2}x_1$,

folgt

$$\frac{y_1^2}{1 + \mathfrak{Cof}\,k x_1} + \frac{y_2^2}{\mathfrak{Cof}\,(k x_1) - 1} = \frac{a^2}{2}; \quad \mathfrak{Cof}\,k x_1 = \frac{y_1^2 + y_2^2}{a^2} + \frac{r_1 r_2}{a^2}$$

$$\cos k x_2 = \frac{y_1^2 + y_2^2}{a^2} - \frac{r_1 r_2}{a^2},$$

wobei $r_{1,2}^2 = (y_1 \pm a)^2 + y_2^2$.

r_1 und r_2 bedeuten die Entfernung des Punktes y_1, y_2 von den beiden Brennpunkten des konfokalen Systems. Demnach kommt:

$$\text{(6a)} \qquad U = \frac{f\left(\frac{1}{2}(r_1 + r_2)^2 - a^2\right) + g\left(\frac{1}{2}(r_1 - r_2)^2 - a^2\right)}{r_1 \cdot r_2}.$$

Ist $f(x) = g(x) = \sqrt{x + a^2}$, so folgt das Problem der zwei festen Zentren, welches demnach, neben dem Problem eines festen Zentrums (I_2), das allgemeinste separierbare Problem für einen Massenpunkt in der Ebene ist, wenn die Kräftefunktion das (negative) Newtonsche Potential diskreter Massenpunkte darstellen soll.

Drei Freiheitsgrade.

§ 3.

Die Separationsvariablen.

Fall II_1. Dieser ist bereits von Levi-Civita[4]) behandelt. Hier verschwindet der Krümmungstensor identisch und man findet für die kartesischen Koordinaten y_1, y_2, y_3:

$$y_k = U^k(x_1) + V^k(x_2) + W^k(x_3). \tag{8}$$

Wir haben also wieder Schiebungsflächen als Koordinatenflächen.

Fall II_2. Das Linienelement läßt sich in diesem Falle auf folgende Form bringen:

$$\begin{aligned} ds^2 = {} & a_3(dx_1 + m_2' dx_2)^2 + b_3(dx_2 + l_1' dx_1)^2 + 2e_3(dx_1 + m_2' dx_2)(dx_2 + l_1' dx_1) \\ & + dx_3^2 + 2c_3' dx_3(dx_2 + l_1' dx_1) + 2d_3' dx_3(dx_1 + m_2' dx_2). \end{aligned}$$

Führen wir die neuen Variablen

$$X_1 = x_1 + m_2(x_2); \qquad X_2 = x_2 + l_1(x_1)$$

an Stelle von x_1, x_2 ein, so wird

$$\begin{aligned} ds^2 = {} & a_3 dX_1^2 + b_3 dX_2^2 + dx_3^2 + 2e_3 dX_1 dX_2 + 2c_3' dX_2 dx_3 \\ & + 2d_3' dX_1 dx_3. \end{aligned} \tag{9}$$

Da nun der Krümmungstensor eine Differentialinvariante ist, so genügt es zu fordern, daß er für die letzte Form von ds^2 verschwindet.

Die Determinante von (9) sei

$$\delta = \begin{vmatrix} a_3 & e_3 & d_3' \\ e_3 & b_3 & c_3' \\ d_3' & c_3' & 1 \end{vmatrix}.$$

Ihre Unterdeterminanten seien mit δ_{ik} bezeichnet. Für die Form (9) wird nun der Krümmungstensor:

$$[12, 12] = 0: \quad \frac{\delta_{33}}{\delta}\left\{\begin{bmatrix} 1\,2 \\ 3 \end{bmatrix}^2 - \begin{bmatrix} 1\,1 \\ 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2\,2 \\ 3 \end{bmatrix}\right\} = \frac{1}{4}\,\frac{\delta_{33}}{\delta}(e_3'^2 - a_3' b_3') = 0;$$

$$[12, 23] = 0: \quad \frac{\delta_{13}}{\delta}\left\{\begin{bmatrix} 2\,2 \\ 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1\,3 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1\,2 \\ 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2\,3 \\ 1 \end{bmatrix}\right\} = \frac{1}{4}\,\frac{\delta_{13}}{\delta}(e_3'^2 - a_3' b_3') = 0;$$

---

[4]) Math. Annalen 59 (1904), S. 390.

$$[31, 12] = 0:\quad \frac{\delta_{33}}{\delta}\left\{\begin{bmatrix}3\,2\\2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\,1\\3\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}3\,1\\2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\,2\\3\end{bmatrix}\right\} = \frac{1}{4}\frac{\delta_{33}}{\delta}(c_3'^2 - a_3'b_3') = 0;$$

$$[13, 13] = 0:\quad 2\cdot\frac{\partial^2 a_3}{\partial x_3^2} = a_3'\frac{\partial \ln \delta}{\partial x_3} + \frac{\delta_{22}}{\delta}(c_3'^2 - a_3'b_3');$$

$$[23, 23] = 0:\quad 2\cdot\frac{\partial^2 b_3}{\partial x_3^2} = b_3'\frac{\partial \ln \delta}{\partial x_3} + \frac{\delta_{11}}{\delta}(c_3'^2 - a_3'b_3');$$

$$[23, 31] = 0:\quad 2\cdot\frac{\partial^2 c_3}{\partial x_3^2} = c_3'\frac{\partial \ln \delta}{\partial x_3} + \frac{\delta_{12}}{\delta}(a_3'b_3' - c_3'^2).$$

Dabei haben wir berücksichtigt, daß:

$$\begin{bmatrix}1\,1\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2\,2\\2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}3\,3\\3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\,1\\2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2\,2\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\,2\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\,2\\2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\,3\\3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2\,3\\3\end{bmatrix} = 0;$$

$$\begin{bmatrix}2\,3\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\,3\\2\end{bmatrix} = -\begin{bmatrix}1\,2\\3\end{bmatrix} = \frac{1}{2}c_3';\qquad -\begin{bmatrix}1\,1\\3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\,3\\1\end{bmatrix} = \frac{1}{2}a_3';$$

$$-\begin{bmatrix}2\,2\\3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2\,3\\2\end{bmatrix} = \frac{1}{2}b_3';\qquad \begin{bmatrix}3\,3\\2\end{bmatrix} = c_3'';\qquad \begin{bmatrix}3\,3\\1\end{bmatrix} = d_3'';$$

sowie, daß

$$\frac{1}{2}\frac{\partial \ln \delta}{\partial x_3} = \frac{\delta_{11}}{\delta}\begin{bmatrix}1\,3\\1\end{bmatrix} + 2\frac{\delta_{12}}{\delta}\begin{bmatrix}3\,2\\1\end{bmatrix} + \frac{\delta_{22}}{\delta}\begin{bmatrix}2\,3\\2\end{bmatrix} + \frac{\delta_{12}}{\delta}\begin{bmatrix}3\,3\\1\end{bmatrix} + \frac{\delta_{22}}{\delta}\begin{bmatrix}3\,3\\2\end{bmatrix}.$$

Da $\delta \neq 0$, so folgt aus den drei ersten Komponenten:

$$(10)\qquad c_3'^2 - a_3'b_3' = 0;$$

und damit aus den drei letzten Gleichungen sofort durch Integration:

$$(11)\qquad a_3' = \varrho_0^2\sqrt{\delta};\qquad c_3' = \varrho_0\sigma_0\sqrt{\delta};\qquad b_3' = \sigma_0^2\sqrt{\delta},$$

wobei ϱ_0, σ_0 Integrationskonstanten bezeichnen. Durch (11) ist auch (10) erfüllt.

Aus (11) folgt weiter durch Integration:

$$(12)\qquad \sigma_0 a_3 - \varrho_0 c_3 = \tau_1;\qquad \varrho_0 b_3 - \sigma_0 c_3 = \tau_2,$$

wo τ_1, τ_2 Konstante sind.

Die kartesischen Koordinaten y_1, y_2, y_3 genügen nun den Differentialgleichungen:

$$\frac{\partial^2 y_h}{\partial x_i \partial x_j} - \sum_{s=1}^{3}\left\{\begin{matrix}i,j\\s\end{matrix}\right\}\cdot\frac{\partial y_h}{\partial x_s} = 0,\quad \text{wo}\quad \left\{\begin{matrix}i\,j\\s\end{matrix}\right\} = \sum_{\alpha=1}^{3}\frac{\delta_{s\alpha}}{\delta}\begin{bmatrix}i\,j\\\alpha\end{bmatrix}.$$

Die geschweiften Symbole haben folgende Werte ($i = 1, 2, 3$):

$$\left\{\begin{matrix}1\,1\\i\end{matrix}\right\} = -\frac{a_3'}{2\delta}\delta_{i3};\qquad \left\{\begin{matrix}2\,2\\i\end{matrix}\right\} = -\frac{b_3'}{2\delta}\delta_{i3};\qquad \left\{\begin{matrix}3\,3\\i\end{matrix}\right\} = \frac{d_3'\delta_{1i} + c_3'\delta_{2i}}{\delta};$$

$$\left\{\begin{matrix}2\,3\\i\end{matrix}\right\} = \frac{c_3'\delta_{i1} + b_3'\delta_{i2}}{2\delta};\qquad \left\{\begin{matrix}1\,3\\i\end{matrix}\right\} = \frac{a_3'\delta_{1i} + c_3'\delta_{2i}}{2\delta};\qquad \left\{\begin{matrix}1\,2\\i\end{matrix}\right\} = -\frac{c_3'\delta_{3i}}{2\delta}.$$

Wir haben also, wenn wir noch (11) benützen, folgendes Gleichungssystem zu integrieren:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial X_1^2} = -\frac{\varrho_0^2}{2\sqrt{\delta}} \sum_s \delta_{s3} \frac{\partial y}{\partial x_s}; \quad \frac{\partial^2 y}{\partial X_1 \partial X_2} = -\frac{\varrho_0 \sigma_0}{2\sqrt{\delta}} \sum_s \delta_{s3} \frac{\partial y}{\partial x_s}; \quad \frac{\partial^2 y}{\partial X_2^2} = -\frac{\sigma_0^2}{2\sqrt{\delta}} \sum_s \delta_{s3} \frac{\partial y}{\partial x_s};$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial X_1 \partial x_3} = \frac{1}{2\sqrt{\delta}} \left\{ \varrho_0^2 \sum_s \delta_{1s} \frac{\partial y}{\partial x_s} + \varrho_0 \sigma_0 \sum \delta_{2s} \frac{\partial y}{\partial x_s} \right\};$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial X_2 \partial x_3} = \frac{1}{2\sqrt{\delta}} \left\{ \varrho_0 \sigma_0 \sum_s \delta_{1s} \frac{\partial y}{\partial x_s} + \sigma_0^2 \sum \delta_{2s} \frac{\partial y}{\partial x_s} \right\}.$$

Hieraus folgt einmal:

$$\frac{\partial}{\partial X_1}\left(\sigma_0 \frac{\partial y}{\partial X_1} - \varrho_0 \frac{\partial y}{\partial X_2}\right) = \frac{\partial}{\partial X_2}\left(\sigma_0 \frac{\partial y}{\partial X_1} - \varrho_0 \frac{\partial y}{\partial X_2}\right) = \frac{\partial}{\partial x_3}\left(\sigma_0 \frac{\partial y}{\partial X_1} - \varrho_0 \frac{\partial y}{\partial X_2}\right) = 0,$$

somit:

$$\sigma_0 \frac{\partial y}{\partial X_1} - \varrho_0 \frac{\partial y}{\partial X_2} = 2\,C\,\varrho_0 \sigma_0,$$

wenn C eine Integrationskonstante bezeichnet, und hieraus:

$$y = C(\varrho_0 X_1 - \sigma_0 X_2) + F(\varrho_0 X_1 + \sigma_0 X_2, x_3).$$

Wir haben nun noch die zunächst willkürliche Funktion F näher zu bestimmen. Wir differenzieren zu dem Zwecke die erste der obigen Differentialgleichungen nach X_1 und ersetzen die auf der rechten Seite auftretenden zweiten Ableitungen durch ihre aus dem obigen System hervorgehenden Werte. Wir erhalten dann:

$$\frac{\partial^3 y}{\partial X_1^3} = -\frac{a_3'}{4\delta}\left\{(a_3' b_3 - e_3 e_3') \frac{\partial y}{\partial X_1} + (a_3 e_3' - e_3 a_3') \frac{\partial y}{\partial X_2}\right\}$$

und mit Rücksicht auf (11) und (12):

$$\frac{\partial^3 y}{\partial X_1^3} = -\frac{\varrho_0^3}{4}\left(\tau_2 \frac{\partial y}{\partial X_1} + \tau_1 \frac{\partial y}{\partial X_2}\right).$$

Setzen wir y ein und bezeichnen $\frac{1}{\varrho_0} \frac{\partial F}{\partial X_1} = \frac{1}{\sigma_0} \frac{\partial F}{\partial X_2}$ mit F', so ergibt sich für F die Bedingung:

$$-4\,F''' = C(\varrho_0 \tau_2 - \sigma_0 \tau_1) + F'(\varrho_0 \tau_2 + \sigma_0 \tau_1).$$

Führen wir zur Abkürzung die Größen ein:

$$(13) \qquad \sigma_0 \tau_1 - \varrho_0 \tau_2 = 4 p_1^2; \quad \varrho_0 \tau_2 + \sigma_0 \tau_1 = 4 p_2^2,$$

so folgt aus der vorhergehenden Gleichung für F der Ansatz:

$$F = C \frac{p_1^2}{p_2^2} (\varrho_0 X_1 + \sigma_0 X_2) + A(x_3) \cos p_2 (\varrho_0 X_1 + \sigma_0 X_2)$$
$$+ B(x_3) \sin p_2 (\varrho_0 X_1 + \sigma_0 X_2) + D(x_3).$$

Um endlich noch die Funktionen $A(x_3)$, $B(x_3)$, $D(x_3)$ von x_3 zu bestimmen, gehen wir mit y in die Gleichung für $\frac{\partial^2 y}{\partial X_1^2}$ ein, die für alle Werte von X_1 und X_2 erfüllt sein muß; es müssen, offenbar daher die Koeffizienten des Kosinus und Sinus, sowie der davon freie Term für sich verschwinden, was zu folgenden Gleichungen Anlaß gibt:

$$\delta_{33} D'_{(x_3)} + \frac{C \varrho_0 \sigma_0}{2 p_2^2} \delta_{33} (\varrho_0 c_3' - \sigma_0 d_3') = 0.$$

$$A'_{(x_3)} \delta_{33} = 2\sqrt{\delta}\, p_2^2 A(x_3) - p_2 B(x_3)(\varrho_0 \delta_{13} + \sigma_0 \delta_{23}).$$

$$B'_{(x_3)} \delta_{33} = 2\sqrt{\delta}\, p_2^2 B(x_3) + p_2 A(x_3)(\varrho_0 \delta_{13} + \sigma_0 \delta_{23}).$$

Die erste dieser Gleichungen liefert:

$$D(x_3) = \frac{C \varrho_0 \sigma_0}{2 p_2^2} (\sigma_0 d_3 - \varrho_0 c_3),$$

in den beiden anderen führen wir an Stelle von A und B die Größen ϱ und φ ein, vermöge

$$A = \varrho \sin\varphi; \qquad B = \varrho \cos\varphi.$$

Addition der beiden Gleichungen — nach Multiplikation mit A bzw. B — gibt:

$$\varrho' = 2\sqrt{\delta} \cdot p_2^2 \cdot \varrho,$$

und da nach (11): $\sqrt{\delta} = \frac{e_3'}{\varrho_0 \sigma_0}$; $\delta_{33} = a_3 b_3 - e_3^2 = \frac{1}{\varrho_0 \sigma_0}(\tau_1 \tau_2 + 4 p_2^2 e_3)$, so folgt:

$$\varrho = a_0 \sqrt{\delta_{33}},$$

wo a_0 eine Integrationskonstante ist. Analog ergibt sich:

$$\varphi' = p_2 \frac{\tau_1 c_3' + \tau_2 d_3'}{\delta_{33}}.$$

Somit erhalten wir als allgemeinste Lösung der Differentialgleichungen (wenn wir von Translationen absehen):

$$y = \frac{C \varrho_0 \sigma_0}{2 p_2^2} (X_1 \tau_1 - X_2 \tau_2 + \sigma_0 d_3 - \varrho_0 c_3) + \varrho \sin[p_2(\varrho_0 X_1 + \sigma_0 X_2) + \varphi + \varphi_0].$$

Sie muß auch alle nicht angeschriebenen Differentialgleichungen für y erfüllen. Durch die Gesamtheit der Differentialgleichungen kann y nämlich nur bis auf Drehungen und Translationen bestimmt sein und die vorstehende Lösung enthält dementsprechend die erforderlichen willkürlichen Konstanten, die auch vollkommen willkürlich bleiben müssen. Wir wollen schließlich noch die Normierung $a_{33} = 1$, auf die es bei der Separation nicht ankommen kann, rückgängig machen und betrachten demgemäß ϱ und φ als willkürlich vorzugebende Funktionen von x_3 allein, durch die sich auch

natürlich dann a_3, b_3, c_3 ausdrücken, was wir aber nicht näher ausführen wollen. Abgesehen von Drehungen werden die kartesischen Koordinaten:

$$(14)\quad \begin{cases} y_1 = \varrho(x_3)\cos[p_2(\varrho_0 X_1 + \sigma_0 X_2) + \varphi(x_3)]; \\ y_2 = \varrho(x_3)\sin[p_2(\varrho_0 X_1 + \sigma_0 X_2) + \varphi(x_3)]; \\ y_3 = \frac{1}{2p_2}\{X_1\tau_1 - X_2\tau_2 + \sigma_0 d_3 - \varrho_0 c_3\}. \end{cases}$$

Darinnen sind an Stelle von X_1, X_2 noch einzuführen:

$$X_1 = x_1 + m_2(x_2); \qquad X_2 = x_2 + l_1(x_1).$$

Fall II$_4$. Er ist der von Stäckel behandelte orthogonale Fall, dem das Linienelement zugeordnet ist:

$$ds^2 = D\left\{\frac{dx_1^2}{q_2 - q_3} + \frac{dx_2^2}{q_3 - q_1} + \frac{dx_3^2}{q_1 - q_2}\right\}; \qquad D = \begin{vmatrix} \varphi_1 & \varphi_2 & \varphi_3 \\ q_1 & q_2 & q_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix},$$

wobei $\varphi_1 = \varphi_1(x_1)$; $\varphi_2 = \varphi_2(x_2)$; ...; $q_1 = q_1(x_1)$; $q_2 = q_2(x_2)$ usw. Die Komponente [12, 12] des Krümmungstensors ist:

$$\frac{-D\cdot q_2'}{(q_1-q_2)(q_2-q_3)}\cdot\frac{\partial D}{\partial x_1} + \frac{D^2\cdot q_1' q_2'}{q_3 - q_1}\left\{\frac{1}{(q_2-q_3)(q_3-q_1)} - \frac{1}{(q_1-q_2)^2}\right\}$$
$$+\frac{D\cdot q_1'}{(q_1-q_2)^2}\cdot\frac{\partial D}{\partial x_2} - \frac{1}{q_1-q_2}\cdot\frac{\partial D}{\partial x_1}\,\frac{\partial D}{\partial x_2} = 0.$$

Dividieren wir mit $q_1' q_2'$ und setzen $D_1 = \frac{\partial D}{\partial q_1}$; $D_2 = \frac{\partial D}{\partial q_2}$, so kommt:

$$(15\text{a})\quad -\frac{D\cdot D_1}{(q_1-q_2)(q_2-q_3)} + \frac{D\cdot D_2}{(q_1-q_2)^2} + \frac{D^2}{q_3-q_1}\left\{\frac{1}{(q_2-q_3)(q_3-q_1)} - \frac{1}{(q_1-q_2)^2}\right\} - \frac{D_1 D_2}{q_1-q_2} = 0.$$

Dazu kommen die beiden Gleichungen, die durch zyklische Vertauschung der Indizes hervorgehen.

Wir setzen $q_1 = q_3 + x$; $q_2 = q_3 + y$. (15a) geht dann über in:

$$(15)\quad (x-y)^2\{x\cdot DD_1 + y\cdot DD_2 - x\cdot y\cdot D_1 D_2\} - D^2(x^2 + y^2 - x\cdot y) = 0.$$

Wir entwickeln nun D, D_1, D_2 nach Potenzen von x, y; (15) geht dann in eine Potenzreihe in x, y über, deren einzelne Koeffizienten für alle Werte der Variablen q_3 verschwinden müssen. Wir erhalten:

$$D = x(\varphi_3(q_2) - \varphi_2(q_2)) - y(\varphi_1(q_1) - \varphi_3(q_3))$$
$$= x\left(\varphi_3 - \varphi_2 + y\cdot\varphi_3' + \frac{y^2}{2}\varphi_3'' + \dots\right) + y\left(\varphi_3 - \varphi_1 - x\cdot\varphi_1' - \frac{x^2}{2!}\varphi_1'' - \dots\right),$$

$$D_1 = \varphi_3(q_2) - \varphi_2(q_2) - y\cdot\varphi_1'(q_1)$$
$$= \varphi_3 - \varphi_2 + y(\varphi_3' - \varphi_1') + \frac{y^2}{2}\varphi_3'' + \frac{y^3}{3!}\varphi_3'' - xy\,\varphi_1'' - \frac{yx^2}{2}\varphi_1''' \dots,$$

$$D_2 = x\cdot\varphi_3'(q_3) - (\varphi_1(q_1) - \varphi_3(q_3))$$
$$= \varphi_3 - \varphi_1 + x(\varphi_3' - \varphi_1') + x\,y\,\varphi_3'' + \frac{xy^2}{2!}\varphi_3''' \dots - \frac{x^2}{2!}\varphi_1'' - \frac{x^3}{3!}\varphi_1''' \dots.$$

Jene Größen, bei denen kein Argument angegeben ist, beziehen sich auf das Argument q_2. Das Nullsetzen der Terme niedrigster (4.) Ordnung liefert:

$$\left(x(\varphi_3-\varphi_2)+y(\varphi_2-\varphi_1)\right)^2+(x-y)^2(\varphi_3-\varphi_2)(\varphi_2-\varphi_1)\equiv 0.$$

Für $x=y$ kommt $\varphi_3=\varphi_1$, wodurch auch für $x \neq y$ die Gleichung erfüllt ist. Die andern Krümmungskomponenten würden entsprechend ergeben: $\varphi_1=\varphi_2$, und wir setzen demgemäß: $\varphi_1=\varphi_2=\varphi_3=\varphi(q_2)$ für alle Werte des q_2, wodurch auch $\varphi_1^{(n)}=\varphi_2^{(n)}=\varphi_3^{(n)}=\varphi^{(n)}(q_2)$ wird. Es vereinfacht sich daher D zu:

$$D=x\cdot y\left\{\frac{\varphi''}{2}(y-x)+\frac{\varphi'''}{3!}(y^2-x^2)+\ldots+\frac{\varphi^{(n)}}{n!}(y^{n-1}-x^{n-1})+\ldots\right\}$$

und entsprechend D_1 und D_2 zu:

$$D_1=y\left\{\varphi''\left(\frac{y}{2}-x\right)+\frac{\varphi'''}{2!}\left(\frac{y^2}{3}-x^2\right)+\ldots+\frac{\varphi^{(n)}}{(n-1)!}\left(\frac{y^{n-1}}{n}-x^{n-1}\right)+\ldots\right\},$$

$$D_2=x\left\{\varphi''\left(y-\frac{x}{2}\right)+\frac{\varphi'''}{2!}\left(y^2-\frac{x^2}{3}\right)+\ldots+\frac{\varphi^{(n)}}{(n-1)!}\left(y^{n-1}-\frac{x^{n-1}}{n}\right)+\ldots\right\}.$$

(15) wird nach Unterdrückung eines Faktors x^2y^2:

$$\begin{aligned}(x-y)^2\Big\{&\left(\frac{\varphi''}{2}(y-x)+\frac{\varphi'''}{3!}(y^2-x^2)+\ldots+\frac{\varphi^{(n)}}{n!}(y^{n-1}-x^{n-1})+\ldots\right)\Big(\frac{3}{2}\varphi_1''(y-x)+\ldots\\ &+\frac{n+1}{n!}\varphi^{(n)}(y^{n-1}-x^{n-1})\Big)-\Big(\varphi''\left(\frac{y}{2}-x\right)+\frac{\varphi'''}{2!}\left(\frac{y^2}{3}-x^2\right)+\ldots\\ &+\frac{\varphi^{(n)}}{(n-1)!}\left(\frac{y^{n-1}}{n}-x^{n-1}\right)\Big)\Big(\varphi''\left(y-\frac{x}{2}\right)+\ldots+\frac{\varphi^{(n)}}{(n-1)!}\left(y^{n-1}-\frac{x^{n-1}}{n}\right)\Big)\Big\}\\ -(x^2+y^2-x\cdot y)&\left(\frac{\varphi''}{2}(y-x)+\frac{\varphi'''}{3!}(y^2-x^2)+\ldots+\frac{\varphi^{(n)}}{n!}(y^{n-1}-x^{n-1})+\ldots\right)^2=0.\end{aligned}$$

Die 4. und 5. Potenzen verschwinden identisch. Als Koeffizient der 6. Potenzen aber kommt:

$$3\varphi''''\cdot\varphi''-4\varphi'''^2=0$$

und durch Integration:

$$\varphi=\frac{1}{Aq_2+B}+Cq_2+D.$$

Da sich nun die Koeffizienten des Linienelements nicht ändern, wenn man an Stelle von q_i: Aq_i+B setzt, ferner da der additive Term Cq_i+D unwesentlich ist, so können wir allgemein setzen:

$$\varphi_i=\frac{1}{q_i}. \tag{16}$$

Wir werden später erkennen, daß dadurch die drei ersten Krümmungskomponenten identisch verschwinden müssen, und gehen daher gleich zur

Betrachtung des zweiten Tripels derselben über. Es kommt für $[31, 12] = 0$ unter Verwendung von (16):

$$\begin{aligned}
2\{q_1''(q_2-q_3)q_3^2+q_3''(q_2-q_1)q_1^2\}(q_3-q_1)(q_1-q_2)(q_3-q_2)q_2^2q_3q_1&\\
= q_1'^2q_3^2q_2^2(q_3-q_2)^2\{q_3(q_1-q_2)+q_1^2-q_3q_2-4(q_3-q_1)(q_1-q_2)\}&\\
+q_2'^2(q_3-q_1)^3q_3^3q_1^3+q_3'^2q_1^3q_2^2(q_1-q_2)^2\cdot\{q_1(q_2-q_3)-(q_3^2-q_1q_2)&\\
-4(q_3-q_1)(q_3-q_2)\}.&
\end{aligned}$$

Wir betrachten q_i' als Funktion von q_i und setzen demgemäß:

$$q_i'^2 = w_i(q_i); \qquad 2q_i'' = w_i'(q_i);$$

außerdem wie früher: $q_1 = q_2 + x$; $q_3 = q_2 + y$; $q_1 - q_3 = x - y$, dann kommt:

$$\begin{aligned}
\{w_1'y(q_2+y)^2+w_3'x(q_2+x)^2\}\cdot x\cdot y(x-y)q_2^2(q_2+x)(q_2+y)&\\
= w_2(y-x)^3(q_2+y)^3(q_2+x)^3&\\
+w_1q_2^2(q_2+y)^3\cdot y^2\{x(q_2+y)+(q_2+x)^2-q_2(q_2+y)-4x(y-x)\}&\\
+w_3q_2^2(q_2+x)^3x^2\{-y(q_2+x)-(q_2+y)^2+q_2(q_2+x)-4y(y-x)\}.&
\end{aligned}$$

Entwickeln wir wieder w_i nach Potenzen von x bzw. y, und nehmen die Glieder niedrigster (3.) Ordnung, so muß:

$$w_1(q_2)\,y^2(3x-y)-w_3(q_2)(3y-x)x^2+w_2(y-x)^3=0$$

sein. $y = x$ gibt: $w_1 = w_3$; somit: $w_1(x-y)^3 + w_2(y-x)^3 = 0$; d. h. $w_1 = w_2$. Wir haben dann $w_1 = w_2 = w_3 = w(q_2)$; $w_1^{(n)}(q_2) = w_2^{(n)}(q_2) = w_3^{(n)}(q_2) = w^n(q_2)$. Die Glieder 4., 5., 6. Ordnung verschwinden dadurch von selbst. Die Glieder 7. Ordnung aber ergeben:

$$w''''q_2^4-8w'''q_2^3+36w''q_2^2-96w'q_2+120w=0,$$

eine Gleichung, deren allgemeines Integral offenbar ist:

$$w=(a+bq_i+cq_i^2+dq_i^3)q_i^2=q_i'^2.$$

Wir erhalten damit folgendes Linienelement, wenn wir an Stelle von x_1, x_2, x_3 die Variablen q_1, q_2, q_3 einführen:

$$ds^2=\frac{(q_1-q_2)(q_1-q_3)}{q_1q_2q_3q_1'^2}dq_1^2+\frac{(q_2-q_3)(q_2-q_1)}{q_1q_2q_3q_2'^2}dq_2^2+\frac{(q_3-q_1)(q_3-q_2)}{q_1q_2q_3q_3'^2}dq_3^2,$$

da ja $D = \frac{1}{q_1q_2q_3}(q_1-q_2)(q_1-q_3)(q_2-q_3)$. Ersetzen wir endlich noch q_i durch $\frac{1}{q_i}$ und setzen $f(q_i) = aq_i^3 + bq_i^2 + cq_i + d$, so wird das Linienelement:

$$ds^2=\frac{(q_1-q_2)(q_1-q_3)}{f(q_1)}dq_1^2+\frac{(q_2-q_3)(q_2-q_1)}{f(q_2)}dq_2^2+\frac{(q_3-q_1)(q_3-q_2)}{f(q_3)}dq_3^2. \tag{17}$$

Sollen die Koordinaten reell sein und ist etwa $q_1 > q_2 > q_3$, so muß $f(q_1) > 0$; $f(q_2) < 0$; $f(q_3) > 0$ sein und daher f, da es von ungeradem

Grade ist, drei reelle Wurzeln haben. Wir haben als allgemeinstes Koordinatensystem elliptische Koordinaten [nach (17)], eingeschlossen natürlich alle möglichen Ausartungen derselben. Es ist klar, daß für dieses Linienelement alle Krümmungskomponenten verschwinden müssen. Wir haben nun noch den

Fall II_3 zu behandeln. Da das Linienelement sich hier in der Form schreiben läßt:

$$ds^2 = (a_1 - b_2)(dx_1^2 + dx_2^2) + \frac{a_1 - b_2}{c_1 - d_2} dX_3^2,$$

wenn X_3 die Funktion bezeichnet:

$$X_3 = x_3 + l_1 + m_2, \tag{18}$$

so müssen wir es hier — das Linienelement ist orthogonal — mit einem Sonderfall von (17) zu tun haben. — Dem Linienelement entsprechen entweder elliptische Koordinaten von Rotationssymmetrie, oder elliptische Zylinderkoordinaten, in Formel:

$$(19\text{a}) \begin{cases} y_1^2 = \dfrac{(a^2+x_1)(a^2+x_2)}{a^2-b^2}; \quad y_2^2 = \dfrac{(b^2+x_1)(b^2+x_2)}{b^2-a^2} \cos^2 k X_3; \\ \qquad y_3^2 = \dfrac{(b^2+x_1)(b^2+x_2)}{b^2-a^2} \sin^2 k X_3; \\ ds^2 = \dfrac{1}{4} \dfrac{x_1 - x_2}{(a^2+x_1)(b^2+x_1)} dx_1^2 + \dfrac{1}{4} \dfrac{x_2 - x_1}{(a^2+x_2)(b^2+x_2)} dx_2^2 \\ \qquad + \dfrac{(b^2+x_1)(b^2+x_2)}{(b^2-a^2)} k^2 dX_3^2 \end{cases}$$

bzw.

$$(19\text{b}) \begin{cases} y_1^2 = \dfrac{(a^2+x_1)(a^2+x_2)}{a^2-b^2}; \quad y_2^2 = \dfrac{(b^2+x_1)(b^2+x_2)}{b^2-a^2}; \quad y_3 = k \cdot X_3; \\ ds^2 = \dfrac{1}{4} \left\{ \dfrac{x_1 - x_2}{(a^2+x_1)(b^2+x_1)} dx_1^2 + \dfrac{x_2 - x_1}{(a^2+x_2)(b^2+x_2)} dx_2^2 \right\} + k^2 dX_3^2. \end{cases}$$

Sowohl in (19a) als auch (19b) ist X_3 durch seinen Wert (18) zu ersetzen.

Damit haben wir in allen Fällen die Separationsvariablen ermittelt und wenden uns nun zur Bestimmung der Kräftefunktionen.

§ 4.

Die Kräftefunktionen zu II.

Im Falle dreier Freiheitsgrade lauten die Dall' Acquaschen Bedingungen für die Kräftefunktion U:

$$(20)\quad\left\{\begin{aligned}&a^{hk}\frac{\partial U}{\partial x_h}\cdot\frac{\partial U}{\partial x_k}=0\ \ (k\neq h);\quad a^{hk}\frac{\partial U}{\partial x_h}\cdot\frac{\partial a_{rr'}}{\partial x_k}=0\ \ (r,r'\neq k);\\&\frac{\partial U}{\partial x_h}\sum_{\substack{s=1\\ s\neq k}}^{3}a^{sh}\frac{\partial a_{st}}{\partial x_k}=0\ \ (t\neq h,k);\quad \frac{\partial U}{\partial x_h}\left\{\sum_{p=1}^{3}a^{ph}\frac{\partial a_{pk}}{\partial x_k}-\frac{1}{2}a^{hk}\frac{\partial a_{kk}}{\partial x_k}\right\}=0;\\&\frac{\partial^2 U}{\partial x_h\,\partial x_k}+\frac{\partial U}{\partial x_h}\sum_{\substack{s=1\\ s\neq k}}^{3}a^{sh}\frac{\partial a_{sh}}{\partial x_k}+\frac{\partial U}{\partial x_k}\sum_{\substack{r=1\\ r\neq h}}^{3}a^{rk}\frac{\partial a_{rk}}{\partial x_h}=0.\end{aligned}\right.$$

Wir betrachten der Reihe nach wieder die vier Fälle.

Fall II_1. Die Gleichungen (20) reduzieren sich wegen $\frac{\partial a_{rr'}}{\partial x_k}=0$ $(k=1,2,3;\ r,r'\neq k)$ auf die folgenden:

$$a^{hk}\frac{\partial U}{\partial x_h}\cdot\frac{\partial U}{\partial x_k}=0;\qquad \frac{\partial U}{\partial x_h}\left\{\sum_{p}a^{ph}\frac{\partial a_{pk}}{\partial x_k}-\frac{1}{2}a^{hk}\frac{\partial a_{kk}}{\partial x_k}\right\}=0;\qquad \frac{\partial^2 U}{\partial x_h\,\partial x_k}=0.$$

Da nach (8) $a_{12}=\sum_{h=1} U_h'\cdot V_h'$ usw., so wird die mittlere Gleichung für $h=1,\ k=2$; und $h=1,\ k=3$:

$$\frac{1}{D^2}\frac{\partial U}{\partial x_1}\begin{vmatrix}\sum U_1'V_1'', & \sum V_1'V_1'', & \sum W_1'V_1''\\ \sum U_1'V_1', & \sum V_1'^2, & \sum V_1'W_1'\\ \sum U_1'W_1', & \sum V_1'W_1', & \sum W_1'^2\end{vmatrix}=\frac{1}{D^2}\frac{\partial U}{\partial x_1}\begin{vmatrix}\sum U_1'W_1'', & \sum V_1'W_1'', & \sum W_1'W_1''\\ \sum U_1'V_1', & \ldots\ldots, & \ldots\\ \sum U_1'W_1', & \ldots\ldots, & \ldots\end{vmatrix}=0,$$

wo $D^2=\|a_{ik}\|=\left\|\frac{\partial y_k}{\partial x_i}\right\|^2$, oder nach einer kleinen Umformung:

$$\frac{\partial U}{\partial x_1}\begin{vmatrix}V_1'', & V_2'', & V_3''\\ V_1', & V_2', & V_3'\\ W_1', & W_2', & W_3'\end{vmatrix}=\frac{\partial U}{\partial x_1}\begin{vmatrix}W_1'', & W_2'', & W_3''\\ W_1', & W_2', & W_3'\\ V_1', & V_2', & V_3'\end{vmatrix}=0;$$

Analog käme für $h=2$ und $h=3$:

$$\frac{\partial U}{\partial x_2}\begin{vmatrix}U_1'', & U_2'', & U_3''\\ U_1', & U_2', & U_3'\\ W_1', & W_2', & W_3'\end{vmatrix}=\frac{\partial U}{\partial x_2}\begin{vmatrix}W_1'', & W_2'', & W_3''\\ W_1', & W_2', & W_3'\\ U_1', & U_2', & U_3'\end{vmatrix}=0;$$

$$\frac{\partial U}{\partial x_3}\begin{vmatrix}U_1'', & U_2'', & U_3''\\ U_1', & U_2', & U_3'\\ V_1', & V_2', & V_3'\end{vmatrix}=\frac{\partial U}{\partial x_3}\begin{vmatrix}V_1'', & V_2'', & V_3''\\ V_1', & V_2', & V_3'\\ U_1', & U_2', & U_3'\end{vmatrix}=0.$$

Im allgemeinen ist daher $\frac{\partial U}{\partial x_1}=\frac{\partial U}{\partial x_2}=\frac{\partial U}{\partial x_3}=0$; $U=$ konst. Bei besonderer Wahl der U_i, V_i, W_i jedoch kann ein Potential existieren.

a) U soll von x_1 abhängen können; $\frac{\partial U}{\partial x_1}\neq 0$; $\frac{\partial U}{\partial x_2}=0$; $\frac{\partial U}{\partial x_3}=0$; $U=\varphi(x_1)$. Dann muß sein:

$$(21)\qquad \begin{vmatrix} V_1'', & V_2'', & V_3'' \\ V_1', & V_2', & V_3' \\ W_1', & W_2', & W_3' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} W_1'', & W_2'', & W_3'' \\ W_1', & W_2', & W_3' \\ V_1', & V_2', & V_3' \end{vmatrix} = 0.$$

Differenzieren wir die erste der Gleichungen nach x_3, so folgt das Bestehen der drei Gleichungen:

$$\begin{vmatrix} V_1''', & V_2''', & V_3''' \\ V_1', & V_2', & V_3' \\ W_1', & W_2', & W_3' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} V_1'', & V_2'', & V_3'' \\ V_1', & V_2', & V_3' \\ W_1', & W_2', & W_3' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} V_1', & V_2', & V_3' \\ V_1', & V_2', & V_3' \\ W_1', & W_2', & W_3' \end{vmatrix} = 0,$$

welche, als Bestimmungsgleichungen für die wegen $D \neq 0$ nicht sämtlich verschwindenden Unterdeterminanten $\begin{vmatrix} V_1' & V_2' \\ W_1' & W_2' \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} V_2' & V_3' \\ W_2' & W_3' \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} V_1' & V_3' \\ W_1' & W_3' \end{vmatrix}$ aufgefaßt, zu dem Resultat führen:

$$\begin{vmatrix} V_1''', & V_2''', & V_3''' \\ V_1'', & V_2'', & V_3'' \\ V_1', & V_2', & V_3' \end{vmatrix} = 0, \qquad \begin{vmatrix} W_1''', & W_2''', & W_3''' \\ W_1'', & W_2'', & W_3'' \\ W_1', & W_2', & W_3' \end{vmatrix} = 0.$$

Die zweite Gleichung leitet man analog der ersten ab. Es folgt aus beiden Gleichungen, daß sowohl die V_i' als auch W_i' linear voneinander abhängig sind; d. h. wenn $\psi_1'(x_3)$, $\psi_2'(x_3)$ bzw. $\chi_1'(x_3)$, $\chi_2'(x_3)$ beliebige Funktionen sind, so muß sein:

$$(21\,\text{a})\qquad W_i' = \nu_i \psi_1'(x_3) + n_i \psi_2'(x_3); \qquad V_i' = \mu_i \chi_1'(x_3) + m_i \chi_2'(x_3).$$

Durch Einsetzen in (21) kommt:

$$\begin{vmatrix} \chi_1'' & \chi_2'' \\ \chi_1' & \chi_2' \end{vmatrix} \left\{ \psi_1' \begin{vmatrix} \nu_1 & \nu_2 & \nu_3 \\ \mu_1 & \mu_2 & \mu_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{vmatrix} + \psi_2' \begin{vmatrix} n_1 & n_2 & n_3 \\ \mu_1 & \mu_2 & \mu_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{vmatrix} \right\} = 0,$$

bzw.

$$\begin{vmatrix} \psi_1'' & \psi_2'' \\ \psi_1' & \psi_2' \end{vmatrix} \left\{ \chi_1' \begin{vmatrix} \mu_1 & \mu_2 & \mu_3 \\ \nu_1 & \nu_2 & \nu_3 \\ n_1 & n_2 & n_3 \end{vmatrix} + \chi_2' \begin{vmatrix} m_1 & m_2 & m_3 \\ \nu_1 & \nu_2 & \nu_3 \\ n_1 & n_2 & n_3 \end{vmatrix} \right\} = 0.$$

Wir können offenbar $\psi_1, \psi_2, \chi_1, \chi_2$ als linear unabhängig voraussetzen; wären etwa ψ_1, ψ_2 linear abhängig, so wäre dies äquivalent mit etwa $n_i = 0$ oder $\nu_i = 0$. Dann folgt aus den letzten beiden Gleichungen, daß die vier dreireihigen Determinanten darinnen einzeln verschwinden. Aus ihnen folgt leicht:

$$(21\,\text{b})\qquad \nu_i = a\,\mu_i + b\,m_i; \qquad n_i = c\,\mu_i + d\,m_i,$$

wo a, b, c, d feste Zahlen sind. Dadurch sind alle Bedingungen erfüllt. Man sieht nun leicht, daß die Flächen $x_1 =$ konst. Ebenen sind infolge

von (21a) und (21b). Führen wir sie als ∥ zu der y_1, y_2-Ebene ein, so kommt:

(22) $y_3 = U_3(x_1);\quad y_1 = U_1 + V_1 + W_1;\quad y_2 = U_2 + V_2 + W_2;\quad U = \varphi_1(y_3)$.

b) $\frac{\partial U}{\partial x_1} \neq 0,\ \frac{\partial U}{\partial x_2} \neq 0,\ \frac{\partial U}{\partial x_3} = 0,\ U = \varphi(x_1) + \psi(x_2)$ [nach (20)]. Nach (20) muß dann $a^{12} = 0$, ferner wegen

$$\begin{vmatrix} U_1' & U_2' & U_3' \\ W_1' & W_2' & W_3' \\ W_1'' & W_2'' & W_3'' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} V_1' & V_2' & V_3' \\ W_1' & W_2' & W_3' \\ W_1'' & W_2'' & W_3'' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} W_1' & W_2' & W_3' \\ W_1' & W_2' & W_3' \\ W_1'' & W_2'' & W_3'' \end{vmatrix} = 0$$

und wegen $D \neq 0$: $\begin{vmatrix} W_i' & W_j' \\ W_i'' & W_j'' \end{vmatrix} = 0$, d. h. $W_i = \nu_i W(x_3)$. Es bleiben dann noch die Gleichungen:

$$\begin{vmatrix} U_1'' & U_2'' & U_3'' \\ U_1' & U_2' & U_3' \\ W_1' & W_2' & W_3' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} V_1'' & V_2'' & V_3'' \\ V_1' & V_2' & V_3' \\ W_1' & W_2' & W_3' \end{vmatrix} = 0$$

zu erfüllen. Die Linien $x_1 = \text{konst.}$, $x_2 = \text{konst.}$ sind offenbar wegen $W_i = \nu_i W(x_3)$ Gerade, die wir zur y_3-Richtung machen. Dann ist $\nu_1 = \nu_2 = 0$; ν_3 etwa $= 1$. Aus den vorhergehenden Gleichungen kommt dann: $U_1' = \lambda_1 U_0'$; $U_2' = \lambda_2 U_0'$; $V_1' = \mu_1 V_0$; $V_2' = \mu_2 V_0$. $a^{12} = 0$ aber gibt: $U_1' V_1' + U_2' V_2' = 0$ oder $\lambda_1\mu_1 + \lambda_2\mu_2 = 0$. Die Linien $x_1 = \text{konst.}$, $x_3 = \text{konst.}$, ebenso $x_2 = \text{konst.}$, $x_3 = \text{konst.}$ sind demnach ebene Kurven. Legen wir die $y_1 y_2$-Ebene ∥ zu den Kurven $x_1 = \text{konst.}$, $x_3 = \text{konst.}$, so kommt:

(23) $y_1 = U_1;\quad y_2 = V_2;\quad y_3 = U_3 + V_3 + W_3;\quad U = \varphi_1(y_1) + \psi_1(y_2)$.

c) Den dritten Fall $\frac{\partial U}{\partial x_1} \neq 0;\ \frac{\partial U}{\partial x_2} \neq 0;\ \frac{\partial U}{\partial x_3} \neq 0;\ U = \varphi(x_1) + \psi(x_2) + \chi(x_3)$ [nach (20)] übersieht man sofort: Die Separationsvariablen sind dann kartesische Koordinaten. Zu ihm gehört der Fall der anisotropen elastischen Bindung.

Fall II_3. Wir wollen hier gleich das allgemeine Linienelement II_3 zugrunde legen. Die Determinante der Koeffizienten des Linienelementes sei $D = (1 - l_1 m_2)^2 \cdot \delta$ (vgl. S. 284). Die in (20) auftretenden Koeffizienten $\sum_{h=1}^{3} a^{ph}\frac{\partial a_{pk}}{\partial x_k} - \frac{1}{2}a^{hk}\frac{\partial a_{kk}}{\partial x_h}$ werden (bis auf nicht verschwindende Faktoren)

$$\begin{aligned} h = 1;\ k = 2&: \ = m_2''; \quad h = 2,\ k = 1:\ = l_1'', \\ h = 2;\ k = 3&: \ = c_3''(\delta_{22} - l_1'\delta_{12}) + d_3''(\delta_{12} - l_1'\delta_{11}), \\ h = 1;\ k = 3&: \ = c_3''(\delta_{12} - m_2'\delta_{22}) + d_3''(\delta_{11} - m_2'\delta_{12}); \end{aligned}$$

ferner die Koeffizienten in der letzten Gleichung (20):

$$a^{11}\frac{\partial a_{12}}{\partial x_3}+a^{12}\frac{\partial a_{22}}{\partial x_3}=\left\{(m_2'a_3'+e_3')(\delta_{11}-m_2'\delta_{12})+(b_3'+m_2'e_3')(\delta_{12}-m_2'\delta_{22})\right\}\frac{1-l_1'm_2'}{D},$$

$$a^{11}\frac{\partial a_{11}}{\partial x_3}+a^{22}\frac{\partial a_{12}}{\partial x_3}=\left\{(a_3'+l_1'e_3')(\delta_{12}-l_1'\delta_{11})+(l_1'b_3'+e_3')(\delta_{22}-l_1'\delta_{12})\right\}\frac{1-l_1'm_2'}{D}.$$

Ist nun m_2'', $l_1''\neq 0$, so folgt aus (20): $\frac{\partial U}{\partial x_1}=\frac{\partial U}{\partial x_2}=0$;

(24) $$U=\chi(x_3).$$

Alle Gleichungen (20) erweisen sich als erfüllt.

a) Es soll U auch von x_1 abhängen können. Dies fordert aber nach (20) das Bestehen der Gleichungen $\left(\text{wegen } \frac{\partial U}{\partial x_1}\neq 0\right)$:

$$m_2''=0;\ \text{d. h. } m_2'=\text{konst.};\quad a^{13}=0=\delta_{13}-m_2'\delta_{23};$$
$$c_3''(\delta_{12}-m_2'\delta_{22})+d_3''(\delta_{11}-m_2'\delta_{12})=0;$$
$$(m_2'a_3'+e_3')(\delta_{11}-m_2'\delta_{12})+(b_3'+m_2'e_3')(\delta_{12}-m_2'\delta_{22})=0.$$

Hieraus folgt: $m_2'=\frac{\delta_{12}}{\delta_{22}}$; geht man damit in die erste Gleichung ein, so kommt: $c_3''d_3'-c_3'd_3''=0$; somit:

(25a) $$c_3'=\lambda_1 c'(x_3);\qquad d_3'=\lambda_2 c'(x_3).$$

Die beiden Gleichungen werden mit Benutzung der Werte von c_3', d_3' sowie der Gleichungen (11) und (12):

$$\lambda_1(e_3+m_2'a_3)-\lambda_2(b_3+m_2'e_3)=0;$$
$$(m_2'\varrho_0+\sigma_0)\{\tau_2-m_2'\tau_1+c'^2(\lambda_1+m_2'\lambda_2)(\lambda_2\sigma_0-\varrho_0\lambda_1)\}=0.$$

Aus der ersten Gleichung folgt durch Differentiation nach x_3 und Verwendung von (11):

$$(m_2'\varrho_0+\sigma_0)(\varrho_0\lambda_1-\sigma_0\lambda_2)=0;\qquad \lambda_2\tau_2\sigma_0-m_2'\varrho_0\lambda_1\tau_1=0.$$

Wir haben zwei Möglicheiten, diesen Bedingungen gerecht zu werden (von Proportionalitätsfaktoren bei den λ können wir offenbar absehen).

(25b)
1. $m_2'\varrho_0+\sigma_0=0;\quad \lambda_1=-\tau_2;\quad \lambda_2=\tau_1,$
2. $m_2'\tau_1-\tau_2=0;\quad \lambda_1=\sigma_0;\quad \lambda_2=\varrho_0.$

Dann sind sämtliche Gleichungen erfüllt. Im ersten Falle wird

$$\delta=(1-4c'^2p_2^2)(a_3\tau_2+e_3\tau_1)\cdot\frac{1}{\varrho_0};$$

im zweiten $\delta=\delta_{33}-4c'^2p_2^2$. Um zur Kräftefunktion selbst zu gelangen, bemerken wir, daß:

$$a^{11}\frac{\partial a_{11}}{\partial x_3}+a^{12}\frac{\partial a_{12}}{\partial x_3}=\frac{1}{\sqrt{\delta}}\frac{\varrho_0+l_1'\sigma_0}{1-l_1'm_2'}\{\tau_2-m_2'\tau_1+(\sigma_0d_3'-\varrho_0c_3')(c_3'+m_2'd_3')\}.$$

Im zweiten Falle verschwindet der Ausdruck rechts; im ersten Falle aber wird er:

$$\frac{4p_1^2}{\sqrt{\delta}}(1-4p_2^2c'^2)=\frac{1}{\sqrt{\delta}}\left\{\delta'-\frac{8c'c''}{\varrho_0}p_2^2(a_3\tau_2+e_3\tau_1)\right\}.$$

Mit Hilfe dieser Relationen findet man aus der letzten Gleichung (20):

$$(25)\qquad \begin{aligned} &1.\quad U=\frac{\varphi(x_1)}{\delta_{33}}+\psi(x_3),\\ &2.\quad U=\varphi(x_1)+\psi(x_3), \end{aligned}$$

wo φ und ψ willkürliche Funktionen sind.

b) Soll U von allen Variablen abhängen können, so muß auch $l_1''=m_2''=0$ und das Linienelement orthogonal sein. Da wir $l_1'=m_2'=0$ setzen können, so muß $c_3'=d_3'=e_3=0$ sein, was wegen (11) zu der Gleichung führt $a_3'=\varrho_0^2\sqrt{a_3}$, da etwa $\sigma_0=0$ gesetzt werden kann. Man sieht leicht, daß das Potential die Form hat:

$$U=\frac{\varphi(x_1)}{a_3}+\chi(x_2)+\psi(x_3).$$

Dieser Fall b) muß sich übrigens auch als ein Sonderfall des Stäckelschen ergeben.

Fall II_4. Für ihn gibt Stäckel[5]) das Potential:

$$(26)\qquad U=\frac{\varphi(x_1)}{a_{11}}+\frac{\chi(x_2)}{a_{22}}+\frac{\psi(x_3)}{a_{33}}.$$

Fall II_3. Hier ist $a^{12}=0$; $a^{13}=-\frac{l_1'}{a_1-b_3}$; $a^{23}=-\frac{m_2'}{a_1-b_3}$. Nach (20) sind noch folgende Differentialgleichungen zu erfüllen:

$$a^{13}\frac{\partial U}{\partial x_1}\frac{\partial U}{\partial x_3}=a^{23}\frac{\partial U}{\partial x_2}\frac{\partial U}{\partial x_3}=0;$$

$$\frac{\partial U}{\partial x_3}\left\{\frac{a^{11}}{2}\frac{\partial a_{11}}{\partial x_1}+a^{23}\frac{\partial a_{12}}{\partial x_1}+a^{33}\frac{\partial a_{13}}{\partial x_1}\right\}=\frac{\partial U}{\partial x_3}\left\{a^{13}\frac{\partial a_{12}}{\partial x_2}+\frac{a^{22}}{2}\frac{\partial a_{22}}{\partial x_2}+a^{33}\frac{\partial a_{23}}{\partial x_2}\right\}=0;$$

$$\frac{\partial U}{\partial x_2}\left\{a^{23}\frac{\partial a_{22}}{\partial x_1}+a^{33}\frac{\partial a_{23}}{\partial x_1}\right\}=\frac{\partial U}{\partial x_3}\left\{a^{13}\frac{\partial a_{11}}{\partial x_3}+a^{33}\frac{\partial a_{13}}{\partial x_3}\right\}=0.$$

Im allgemeinen ist demnach $\frac{\partial U}{\partial x_2}=0$, U von x_2 also unabhängig. Da

$$a^{11}\frac{\partial a_{11}}{\partial x_3}+a^{13}\frac{\partial a_{13}}{\partial x_3}=-\frac{b_3'}{a_1-b_3};\qquad a^{22}\frac{\partial a_{22}}{\partial x_1}+a^{23}\frac{\partial a_{23}}{\partial x_1}=\frac{a_1'}{a_1-b_3},$$

so genügt U der Gleichung:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x_1\,\partial x_3}-\frac{b_3'}{a_1-b_3}\frac{\partial U}{\partial x_1}+\frac{a_1'}{a_1-b_3}\frac{\partial U}{\partial x_3}=0,$$

[5]) Vgl. hierzu: Charlier, Mechanik des Himmels I, S. 84.

woraus

$$U=\frac{\varphi(x_1)+\chi(x_2)}{a_1-b_2}. \tag{27}$$

Soll U auch von x_3 abhängen: $\frac{\partial U}{\partial x_3}\neq 0$, so muß demnach $a^{13}=a^{23}=0$ sein; wir haben den orthogonalen Fall, für den wir schon das Potential angegeben haben. Auch wenn $\frac{\partial U}{\partial x_3}=0$ ist, hat U ganz die Form der Kräftefunktion des Falles II_4.

Wir wollen nun noch im Falle II_4 die Funktionen φ, χ, ψ so zu bestimmen versuchen, daß U der Laplaceschen Differentialgleichung $\Delta U=0$ genügt. Wir legen das Linienelement für elliptische Koordinaten

$$ds^2=\frac{1}{4}\sum\frac{(\lambda-\mu)(\lambda-\nu)}{f(\lambda)}d\lambda^2;\qquad f(\lambda)=(a^2+\lambda)(b^2+\lambda)(c^2+\lambda)$$

mit den kartesischen Koordinaten

$$y_1^2=\frac{(a^2+\lambda)(a^2+\mu)(a^2+\nu)}{(a^2-b^2)(a^2-c^2)}$$

$$y_2^2=\frac{(b^2+\lambda)(b^2+\mu)(b^2+\nu)}{(b^2-a^2)(b^2-c^2)}$$

$$y_3^2=\frac{(c^2+\lambda)c^2+\mu)(c^2+\nu)}{(c^2-a^2)(c^2-b^2)}$$

zugrunde, so daß also U die Form hat:

$$U=\frac{\varphi_1(\lambda)}{(\lambda-\mu)(\lambda-\nu)}+\frac{\varphi_2(\mu)}{(\mu-\nu)(\mu-\lambda)}+\frac{\varphi_3(\nu)}{(\nu-\lambda)(\nu-\mu)}. \tag{28}$$

Gehen wir mit U in die Gleichung $\Delta U=0$ ein, so läßt sich durch ein dem auf Seite 288ff. befolgten analoges Verfahren zeigen, daß die Funktionen φ durch die Ausdrücke gegeben sind:

$$\left\{\begin{aligned}\varphi_3&=\sqrt{f(\nu)}\int\frac{g_4(\nu)}{\sqrt{f(\nu)}^3}d\nu+D_3\sqrt{f(\nu)};\\ \varphi_2&=\sqrt{f(\mu)}\int\frac{g_4(\mu)}{\sqrt{f(\mu)}^3}d\mu+D_2\sqrt{f(\mu)};\\ \varphi_1&=\sqrt{f(\lambda)}\int\frac{g_4(\lambda)}{\sqrt{f(\lambda)}^3}d\lambda+D_1\sqrt{f(\lambda)},\end{aligned}\right. \tag{29}$$

wo g_4 eine beliebige ganze Funktion 4. Grades, D_1, D_2, D_3 Konstante sind.

Den Fall II_3, wenn wir auch hier die Forderung $\Delta U=0$ stellen, brauchen wir hier nicht gesondert zu behandeln, da er im Falle der Rotationssymmetrie (vgl. S. 291) auf das ebene Problem I_3 zurückkommt, allgemein aber sich überdies als Ausartung von II_4 ergibt.

Zusammenfassung.

Wir haben im vorhergehenden für Ebene und Raum die allgemeinsten Separationsvariablen bestimmt für den Fall, daß wir von diesen durch Punkttransformationen allein zu kartesischen Koordinaten übergehen können. Desgleichen haben wir die Kräftefunktionen ermittelt, bei denen eine bedingt-periodische Bewegung eintritt. Diese Kräftefunktionen können wir noch in kartesischen Koordinaten ausdrücken und kommen dadurch zu einer Übersicht aller durch Punkttransformationen separierbaren mechanischen Probleme eines freien Massenpunktes.

I. Zwei Freiheitsgrade:

1. $U = f_1(y_1) + f_2(y_2)$,

2. $U = f_1(y_1^2 + y_2^2) + \frac{f_2(y_1/y_2)}{y_1^2 + y_2^2}$,

3. $U = \frac{f_1(r_1 + r_2) + f_2(r_1 - r_2)}{r_1 \cdot r_2}$, wo r_1, r_2 die Entfernungen von zwei festen Punkten der Ebene bezeichnen.

II. Drei Freiheitsgrade:

1. $U = f_1(y_1) + f_2(y_2) + f_3(y_3)$,

2. $U = f_1(y_1^2 + y_2^2) + \frac{f_2(y_1/y_2)}{y_1^2 + y_2^2} + f_3(y_3)$,

3. $U = \frac{f_1(r_1 + r_2) + f_2(r_1 - r_2)}{r_1 \cdot r_2} + \frac{f_3(y_1/y_2)}{y_1^2 + y_2^2}$,

wo r_1, r_2 die Entfernungen von zwei festen Punkten der y_3-Achse bedeuten, oder auch die Entfernungen von zwei zur y_3-Achse parallelen Geraden, in welch letzterem Falle an Stelle des letzten Terms von U eine willkürliche Funktion von y_3 tritt.

4. $U = \frac{f_1(\lambda)}{(\lambda - \mu)(\lambda - \nu)} + \frac{f_2(\mu)}{(\mu - \nu)(\mu - \lambda)} + \frac{f_3(\nu)}{(\nu - \lambda)(\nu - \mu)}$,
$\lambda, \mu, \nu =$ elliptische Koordinaten.

Die vorstehende Übersicht gibt die *allgemeinsten* bei den einzelnen Formen des Linienelements möglichen Kräftefunktionen. Sind f_1, f_2, f_3 ganz willkürliche Funktionen der angegebenen Argumente, so sind die Separationsvariablen immer die *orthogonalen* Ausartungen der zu den Fällen I_1 bis I_3 und II_1 bis II_4 gehörigen allgemeinsten Variablen. Werden die Kräftefunktionen *spezialisiert*, indem man z. B. in II_2 $f_3 \equiv 0$, oder $f_2 \equiv f_3 \equiv 0$ setzt, so werden dafür die Variablen allgemeiner. Da nun aber jeder orthogonale Fall eine Ausartung des allgemeinen orthogonalen Falles II_4 sein muß, da, wie Stäckel gezeigt hat, die Voraussetzung eines orthogonalen Linienelements stets auf die Form II_4 desselben führt, die ortho-

gonalen Unterfälle der einzelnen Linienelemente aber die allgemeinsten Kräfte geben, so folgt:

Jedes separierbare mechanische Problem eines freien Massenpunktes ordnet sich dem Stäckelschen orthogonalen Falle unter und muß durch elliptische Koordinaten oder eine ihrer Ausartungen separiert werden können.

Außer den bekannten separierbaren Problemen: Erweiterter Lissajousfall (I_1, II_1); Fall der Zentralkräfte I_2 ($f_1 = 0$), II_3 ($f_3 = 0$ und die festen Punkte fallen zusammen, so daß $r_1 = r_3$), einer Kombination von beiden II_2 ($f_2 = 0$), sowie dem Problem der zwei festen Zentren I_3, II_3, wo die Funktionen f_1 und f_2 proportional ihren Argumenten sind und $f_3 = 0$, gibt es eine Reihe allgemeinerer Kräftefunktionen, die Separation zulassen und die in II_4 enthalten sind. Man erkennt jedoch, wenn man den Funktionen f_1, f_2, f_3 in II_4 die Werte (29) gibt, so daß also $\Delta U = 0$ ist, an der Art der auftretenden Singularitäten, daß falls $a^2 + b^2 + c^2$, U nicht mehr das (negative) Newtonsche Potential *diskreter* Massenpunkte darstellen kann, so daß also *Einkörperproblem und das Problem der zwei festen Zentren die einzigen sind, die Separation zulassen.* Dagegen kann II_4 wohl das Newtonsche Potential einer kontinuierlichen, im Endlichen gelegenen Massenverteilung sein, deren Begrenzung im Grenzfalle $b^2 = c^2$ in zwei sich berührende Kugeln zerfallen muß.

(Eingegangen am 15. 6. 1923.)

Der Kompositionsbegriff bei den quaternären quadratischen Formen.

Von

H. Brandt in Aachen.

In der vorstehenden Arbeit geben wir für die quaternären quadratischen Formen mit ganzen rationalen Koeffizienten eine Definition des Kompositionsbegriffes, der dabei ähnlich aufgefaßt wird, wie ihn Gauß für die binären Formen aufgestellt hat[1]). Dieser Begriff wird im besonderen auf primitive Formen gleicher Diskriminante angewandt. Es werden die notwendigen Bedingungen angegeben, welche für eine Form bestehen müssen, die in eine derartige Komposition eingeht. Dann wird gezeigt, daß die notwendigen Bedingungen auch hinreichend sind. Der Beweis hierfür liefert gleichzeitig für eine beliebige diesen Bedingungen genügende Form 18 bzw. 24 verschiedene Kompositionen, wofür am Schluß zwei Beispiele beigebracht werden.

Ein Teil der Resultate der Arbeit findet sich bereits in meiner Dissertation[2]). Sie sind aber hier des Zusammenhangs wegen und weil der früher benutzte Kompositionsbegriff unzureichend war, neu hergeleitet worden.

§ 1.

Bezeichnungen und Hilfsbetrachtungen.

1. Da die Bezeichnungen in der Zahlentheorie der quadratischen Formen nicht einheitlich sind, stellen wir zunächst die im folgenden gebrauchten Bezeichnungen zusammen. Dabei haben wir es nur mit quaternären Formen mit ganzen rationalen Koeffizienten zu tun. Die eigentlich primitiven Formen und die daraus abgeleiteten (d. h. durch Multiplikation mit einem ganzzahligen Faktor entstehenden) werden von *erster Art*, die

[1]) Gauß, Disquisitiones arithm. art. 235. Werke I, S. 242.

[2]) Zur Komposition der quaternären quadratischen Formen. Journal für r. u. a. Mathematik **143** (1913), S. 106 = Dissertation Straßburg 1912.

halb genommenen uneigentlich primitiven und die daraus abgeleiteten von *zweiter Art* genannt. Wir bezeichnen Formen der σ-ten Art, wobei $\sigma = 1$ oder 2 ist, durch

$$A((x)) = \frac{1}{\sigma} \sum_{ik} a_{ik} x_i x_k.$$ [3])

Dabei heißen in Anlehnung an Minkowski die Zahlen $\frac{1}{\sigma} a_{\mu\mu} = a_\mu$ die *mittleren*, die Zahlen $\frac{2}{\sigma} a_{\mu\nu}$ $(\mu \neq \nu)$ die *seitlichen Koeffizienten*. Speziell ist $\frac{1}{\sigma} a_{00} = a_0$ der *erste Koeffizient*. In kleiner Abweichung hiervon heißt $\| a_{ik} \|$ die *Koeffizientenmatrix* von σA. $\Delta = \left| \frac{\partial^2 A}{\partial x_i \partial x_k} \right|$ ist die *Diskriminante von* A, $D = | a_{ik} |$ die *Determinante von* σA. Demnach ist für Formen erster Art $\Delta = 16 D$, während bei den Formen zweiter Art Δ mit der Determinante von $2A$ übereinstimmt. Der größte gemeinsame Teiler der Koeffizienten heißt der *Teiler der Form*; ist kein solcher Teiler vorhanden, so heißt die Form *primitiv*. Die primitiven Formen von gleicher Diskriminante und gleichem Trägheitsindex werden in *Ordnungen* eingeteilt. Die Ordnung der Form A wird durch die Ordnung der Form σA im Sinne von Minkowski, also durch sechs Invarianten o_1, o_2, o_3; $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ bestimmt[4]).

Die Begriffe *adjungierte Form*, *eigentliche* und *uneigentliche Äquivalenz*, *Klasse*, *entgegengesetzte*, *ambige Klasse* verwenden wir in dem üblichen von Gauß geprägten Sinne. Dabei wird die Klasse durch denselben Buchstaben bezeichnet wie die Form, welche sie repräsentiert.

Soll eine einzelne numerisch gegebene Form $A((x)) = \frac{1}{\sigma} \sum_{ik} a_{ik} x_i x_k$ durch ihre Koeffizienten bezeichnet werden, so kann das durch Angabe der Koeffizientenmatrix geschehen. Da hierbei aber sechs Koeffizienten doppelt erscheinen, ziehen wir folgende Bezeichnungsweise vor. Wir setzen zur Abkürzung für die Koeffizienten $\frac{1}{\sigma} a_{\mu\mu} = (\mu\mu)$, $\frac{2}{\sigma} a_{\mu\nu} = (\mu\nu)$, $(\mu \neq \nu)$ und bezeichnen dann die Form durch das Schema

$$A = \boxed{\begin{array}{cccc} & 01, & 02, & 03 \\ 00, & 11, & 22, & 33 \\ & 23, & 31, & 12 \end{array}},$$

in welchem in der ersten und dritten Zeile die seitlichen und in der zweiten

[3]) Σ bedeutet eine Summation über die Indexwerte 0, 1, 2, 3, Σ' eine solche über 1, 2, 3. Summationsindizes werden durch i, j, k, feste Indizes durch μ, ν, ϱ, τ bezeichnet. μ, ν nehmen die Werte 0, 1, 2, 3, ϱ, τ nur die Werte 1, 2, 3 an.

[4]) Minkowski, Grundlagen für eine Theorie der quadratischen Formen mit ganzzahligen Koeffizienten. Gesammelte Abhandlungen I, S. 12.

die mittleren Koeffizienten stehen. Soll wie gewöhnlich die Form lediglich als Repräsentant einer Klasse dienen, so schreiben wir statt des Gleichheitszeichens das Äquivalenzzeichen $\sim$.

So werden z. B. die beiden Formen

$$4x_0^2+5x_1^2+8x_2^2+10x_3^2+2(x_0x_3+x_1x_2),$$
$$3x_0^2+6x_1^2+7x_2^2+14x_3^2+2x_0(x_2+x_3)+2x_1(x_3-2x_2)$$

durch die Schemata

$$\boxed{\begin{array}{cccc} & 0, & 0, & 2 \\ 4, & 5, & 8, & 10 \\ & 0, & 0, & 2 \end{array}}\,, \qquad \boxed{\begin{array}{cccc} & 0, & 2, & 2 \\ 3, & 6, & 7, & 14 \\ & 0, & -4, & 2 \end{array}}$$

bezeichnet.

2. Wir haben es im folgenden namentlich mit Formen σA zu tun, welche eine quadratische Determinante und eine durch die Wurzel aus der Determinante teilbare Adjungierte besitzen. Für diese Formen, welche offenbar entweder definit sind oder den Trägheitsindex 2 haben, schreiben wir $d = \pm\sqrt{D}$ und nehmen das Vorzeichen positiv im ersten und negativ im zweiten Falle. Dabei wollen wir im folgenden die negativ-definiten Formen außer acht lassen. Wir setzen $\mathfrak{a}_{\mu\nu} = \frac{1}{d}\frac{\partial D}{\partial a_{\mu\nu}}$ und nennen die Form $\mathfrak{A}((x)) = \frac{1}{\sigma}\sum_{ik}\mathfrak{a}_{ik}x_ix_k$ die *Reziproke* von $A((x)) = \frac{1}{\sigma}\sum_{ik}a_{ik}x_ix_k$, welche Beziehung offenbar auch umgekehrt werden kann. Formen, welche eine ganzzahlige Reziproke besitzen, sollen *K-Formen* genannt werden. Eine Form bleibt K-Form, wenn man sie mit einem Faktor multipliziert, dagegen, falls sie einen Teiler besitzt, nicht notwendig, wenn man sie durch diesen Teiler dividiert.

Für die Invarianten einer primitiven K-Form (erster oder zweiter Art) findet man leicht die Beziehung $o_1 = t^2 o_3$, wobei t den größten gemeinsamen Teiler aller $\mathfrak{a}_{\mu\nu}$ bezeichnet. Diese Beziehung charakterisiert umgekehrt eine primitive Form erster Art auch als K-Form, besagt dagegen für eine primitive Form A, welche von zweiter Art ist, zunächst nur, daß die Reziproke von $2A$ ganz ist. Da nun hier o_1, wie man leicht erkennt, also auch t nur ungerade sein kann, so muß die Reziproke von $2A$ uneigentlich primitiv oder aus einer uneigentlich primitiven Form abgeleitet sein, wenn auch die Reziproke von A selbst ganz sein soll.

Bei einer primitiven K-Form zweiter Art können die seitlichen Koeffizienten nicht alle gerade sein, also besteht für die Koeffizientenmatrix von $2A$ eine Kongruenz

$$\|a_{ik}\| \equiv \left\|\begin{matrix} 0 & \varepsilon_1 & \varepsilon_2 & \varepsilon_3 \\ \varepsilon_1 & 0 & \varepsilon_3' & \varepsilon_2' \\ \varepsilon_2 & \varepsilon_3' & 0 & \varepsilon_1' \\ \varepsilon_3 & \varepsilon_2' & \varepsilon_1' & 0 \end{matrix}\right\|, \quad (2),$$

wo die Zahlen ε_τ, ε_τ' Nullen oder Einsen bedeuten. Dann gilt aber für die Koeffizientenmatrix von $2\mathfrak{A}$ die entsprechende Kongruenz

$$\|\mathfrak{a}_{ik}\| \equiv \left\|\begin{matrix} 0 & \varepsilon_1' & \varepsilon_2' & \varepsilon_3' \\ \varepsilon_1' & 0 & \varepsilon_3 & \varepsilon_2 \\ \varepsilon_2' & \varepsilon_3 & 0 & \varepsilon_1 \\ \varepsilon_3' & \varepsilon_2 & \varepsilon_1 & 0 \end{matrix}\right\|, \quad (2).$$

Das folgt sogleich daraus, daß die zweireihigen Minoren der einen Koeffizientenmatrix den komplementären der andern gleich sind.

3. Für die K-Formen führen wir noch einige besondere Bezeichnungen ein. Ist $A((x))$ mit der Reziproken $\mathfrak{A}((x))$ eine K-Form σ-ter Art, so setzen wir

$$\mathfrak{a}^* = \|\mathfrak{a}_{ik}^*\| = \frac{1}{\sigma}\left\|\begin{matrix} \mathfrak{a}_{11} & \mathfrak{a}_{12} + a_{03} & \mathfrak{a}_{13} - a_{02} \\ \mathfrak{a}_{12} - a_{03} & \mathfrak{a}_{22} & \mathfrak{a}_{23} + a_{01} \\ \mathfrak{a}_{13} + a_{02} & \mathfrak{a}_{23} - a_{01} & \mathfrak{a}_{33} \end{matrix}\right\|,$$

$$a^* = \|a_{ik}^*\| = \frac{1}{\sigma}\left\|\begin{matrix} a_{11} & a_{12} + \mathfrak{a}_{03} & a_{13} - \mathfrak{a}_{02} \\ a_{12} - \mathfrak{a}_{03} & a_{22} & a_{23} + \mathfrak{a}_{01} \\ a_{13} + \mathfrak{a}_{02} & a_{23} - \mathfrak{a}_{01} & a_{33} \end{matrix}\right\|.$$

Dann sind zunächst diese beiden Matrizen stets ganzzahlig. Das ist für $\sigma = 1$ selbstverständlich, für $\sigma = 2$ ergibt es sich aus der am Schlusse der vorigen Nummer gemachten Bemerkung. Ferner gelten, wie eine leichte Rechnung ergibt, die Matrizengleichungen

$$a^*\mathfrak{a}^* = \mathfrak{a}^* a^* = \frac{1}{\sigma^2} a_{00}\mathfrak{a}_{00} = a_0\mathfrak{a}_0,$$

und für die Determinanten ergeben sich die Werte

$$|a^*| = |a_{ik}^*| = \frac{1}{\sigma^3} a_{00}\mathfrak{a}_{00}^2 = a_0\mathfrak{a}_0^2, \qquad |\mathfrak{a}^*| = |\mathfrak{a}_{ik}^*| = \frac{1}{\sigma^3} a_{00}^2\mathfrak{a}_{00} = a_0^2\mathfrak{a}_0.$$

Weiter setzen wir noch $\tilde{a}_{\varrho\tau} = a_{00}a_{\varrho\tau} - a_{0\varrho}a_{0\tau}$, so daß die $\tilde{a}_{\varrho\tau}$ die Unterdeterminanten im dreireihigen System $\|\mathfrak{a}_{ik}\|$ $(i, k = 1, 2, 3)$ sind. Endlich schreiben wir zur Abkürzung

$$s_1 = x_2y_3 - x_3y_2, \quad s_2 = x_3y_1 - x_1y_3, \quad s_3 = x_1y_2 - x_2y_1.$$

Mit Hilfe dieser Bezeichnungen nimmt eine früher von mir abgeleitete Identität[5]), in der $A((x)) = \sum_{ik} a_{ik}x_ix_k$ eine beliebige quaternäre quadra-

[5]) A. a. O. [1]) §§ 5 u. 7.

tische Form mit der nicht verschwindenden Determinante $D = d^2$ und einem von Null verschiedenen Koeffizienten a_{00} bedeutet, die folgende Gestalt an:

$$\text{(I)} \qquad \begin{cases} A((x))\,A((y)) = z_0^2 + \sum\limits_{ik}{}' \tilde{a}_{ik} z_i z_k, \\ z_0 = \sum\limits_{ik} a_{ik} x_i y_k, \\ z_\tau = x_0 y_\tau - x_\tau y_0 + \dfrac{1}{a_{00}} \sum\limits_{k}{}' \mathfrak{a}^{*}_{\tau k} s_k \qquad (\tau = 1, 2, 3). \end{cases}$$

Ebenso gilt

$$\text{(I')} \qquad \begin{cases} A((x))\,A((y)) = z_0^2 + \sum\limits_{ik}{}' \tilde{a}_{ik} z_i z_k, \\ z_0 = \sum\limits_{ik} a_{ik} x_i y_k, \\ z_\tau = x_0 y_\tau - x_\tau y_0 - \dfrac{1}{a_{00}} \sum\limits_{k}{}' \mathfrak{a}^{*}_{k\tau} s_k \qquad (\tau = 1, 2, 3). \end{cases}$$

Die zweite früher nicht angegebene Identität entsteht aus der ersten, wenn d durch $-d$ oder $\mathfrak{a}_{\mu\nu}$ durch $-\mathfrak{a}_{\mu\nu}$ ersetzt wird.

§ 2.

Die Definition des Kompositionsbegriffes und Folgerungen daraus.

4. Wenn zwischen drei Formen $A((x))$, $B((y))$, $C((z))$ eine Identität

$$A((x))\,B((y)) = C((z))$$

vermöge einer bilinearen Substitution

$$\text{(M)} \qquad z_\nu = \sum_{ik} m_{\nu ik} x_i y_k$$

besteht, wobei die Koeffizienten der Formen und der bilinearen Substitution ganze rationale Zahlen sind, so sprechen wir von einer *Transformation* und nennen die Form C in das Produkt der Formen A und B *transformierbar*.

Wenn bei einer Transformation die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

1. die Determinanten $\left|\dfrac{\partial z_i}{\partial y_k}\right|$ und $\left|\dfrac{\partial z_i}{\partial x_k}\right|$, welche bis auf Zahlenfaktoren die Werte $[A((x))]^2$, bzw. $[B((y))]^2$ haben, sind ohne gemeinsamen Koeffizienteneiler,

2. ihre Vorzeichen sind positiv (d. h. die bilineare Substitution hat positive Signatur),

3. die bilineare Substitution hat positive Art (siehe unten),

so sprechen wir von einer *Komposition* und nennen die Form C aus den Formen A und B *zusammengesetzt* oder *komponiert*. Dabei heißt C auch die *komponierte Form*, und A und B heißen die *zu komponierenden Formen*.

Da man bei einer Komposition offenbar jede der drei Formen durch eine ihr äquivalente ersetzen kann, so lassen sich diese Begriffe ohne weiteres von den Formen auf die Klassen übertragen. Demnach nennen wir auch die *Klasse C aus den Klassen A und B zusammengesetzt* (oder *komponiert*).

Aus der ersten Forderung ergibt sich, daß die Determinanten der rechteckigen Matrix $\|m_{ijk}\|$ $(i=0,1,2,3;\ jk=00,01,\ldots,33)$ ohne gemeinsamen Teiler sind, welche Bedingung — für bilineare Substitutionen in n Variablen formuliert — von H. J. St. Smith der Definition der Komposition der zerlegbaren Formen zugrunde gelegt wird[6]). Die zweite und dritte Forderung ist gleichwertig der Bedingung: Die bilineare Substitution M soll aus einer der beiden bilinearen Substitutionen

$$\left\|\begin{matrix} z_0+iz_1 & z_2+iz_3 \\ -z_2+iz_3 & z_0-iz_1 \end{matrix}\right\| = \left\|\begin{matrix} x_0+ix_1 & x_2+ix_3 \\ -x_2+ix_3 & x_0-ix_1 \end{matrix}\right\| \left\|\begin{matrix} y_0+iy_1 & y_2+iy_3 \\ -y_2+iy_3 & y_0-iy_1 \end{matrix}\right\|,$$

$$\left\|\begin{matrix} z_0 & z_2 \\ z_1 & z_3 \end{matrix}\right\| = \left\|\begin{matrix} x_0 & x_2 \\ x_1 & x_3 \end{matrix}\right\| \left\|\begin{matrix} y_0 & y_2 \\ y_1 & y_3 \end{matrix}\right\|$$

dadurch hergeleitet werden können, daß ihre drei Variablenreihen durch reelle Substitutionen mit positiven Determinanten transformiert werden[7]). Die zweite Forderung hat Gauß für die binären Formen so formuliert, daß die zu komponierenden Formen direkt in die Komposition eingehen sollen[8]). Die dritte Forderung tritt bei der Komposition der quaternären quadratischen Formen als wesentlich neu hinzu. Die Art kann durch das Vorzeichen der Halbdeterminanten gewisser alternierender Matrizen charakterisiert werden[9]). Da die Art sich ändert, wenn die zu komponierenden Formen vertauscht werden, hat die Beschränkung auf positive Art den Sinn, daß eine *Reihenfolge für die zu komponierenden Formen* festgesetzt wird. Daß dadurch die Gesetze der Komposition einfacher und schöner werden, wird sich erst beim weiteren Ausbau der Theorie zeigen.

5. Wir bezeichnen die Teiler der drei Formen A, B, C durch α, β, γ.

---

[6]) H. J. St. Smith, Report on the theory of numbers. Part IV, § 105. Report of the British Association for 1862, S. 503. Collected Papers I, S. 229.

[7]) Vgl. Brandt, Über ein Problem von A. Hurwitz, quaternäre quadratische Formen betreffend, Math. Ann. **88** (1923), S. 211.

[8]) A. a. O. [1]) Art. 235, 3. Folgerung.

[9]) Brandt, Bilineare Transformation quaternärer quadratischer Formen, Math. Zeitschr. **20** (1924). In dieser Arbeit sind allerdings die Diskriminanten der drei Formen gleich vorausgesetzt. Man kann das aber, wenn es nicht schon der Fall ist, durch Multiplikation der Formen mit gewissen positiven Faktoren, die gebrochen oder irrational sein können, stets erreichen, ohne die bilineare Substitution dabei zu ändern.

Wenn dann C aus A und B zusammengesetzt ist, so besteht, wie wir zeigen wollen, die Beziehung $\gamma = \alpha\beta$, d. h.:

Der Teiler der komponierten Form ist gleich dem Produkt der Teiler der zu komponierenden Formen.

Erteilt man nämlich den primitiven Formen $\frac{A}{\alpha}$ und $\frac{B}{\beta}$ zu γ prime Werte, so muß wegen der Identität $C = AB$ γ in $\alpha\beta$ aufgehen, so daß $\alpha\beta = \gamma\gamma_0$ gesetzt werden kann. Wenn $\gamma_0 > 1$, so würde die primitive Form $\frac{C}{\gamma}$ für alle Wertsysteme, welche die bilineare Substitution M liefert, wenn die x_ν und y_ν ganze rationale Zahlen sind, stets durch γ_0 teilbar sein. Das ist aber wegen der Bedingung, daß die Determinanten $\left|\frac{\partial z_i}{\partial y_k}\right|$ und $\left|\frac{\partial z_i}{\partial x_k}\right|$ im Falle der Komposition zueinander prim sein sollen, nicht möglich. Erteilt man nämlich den x_ν zunächst ganz beliebige Werte und wählt die y_ν gleich den Unterdeterminanten der ersten Zeile der Matrix $\left\|\frac{\partial z_i}{\partial y_k}\right\|$, so wird $z_0 = \left|\frac{\partial z_i}{\partial y_k}\right|$, während z_1, z_2, z_3 verschwinden, und wenn man die y_ν ganz beliebig wählt und die x_ν den Unterdeterminanten der ersten Zeile der Matrix $\left\|\frac{\partial z_i}{\partial x_k}\right\|$ gleich setzt, so wird $z_0 = \left|\frac{\partial z_i}{\partial x_k}\right|$, während wiederum z_1, z_2, z_3 verschwinden. Da es statthaft ist, den ersten Koeffizienten der primitiven Form $\frac{C}{\gamma}$ zu γ_0 prim anzunehmen, weil das andernfalls durch unimodulare Transformation der Form C erreicht werden kann, so müßte jedesmal γ_0 in z_0^2 aufgehen, was wegen der Willkürlichkeit der x_ν im ersten und der y_ν im zweiten Falle unmöglich ist. Daher muß, wie behauptet wurde, $\gamma_0 = 1$ sein.

Zufolge des eben bewiesenen Satzes kann man, wenn eine Komposition vorliegt, in der Identität $A((x))\,B((y)) = C((z))$ die Teiler beiderseits fortheben und sich daher *auf die Komposition primitiver Formen beschränken.*

Am wichtigsten ist dabei der Fall, daß die primitiven Formen A, B, C gleiche Diskriminanten haben. Dann gehören sie der gleichen Ordnung an, wie aus der Tatsache, daß die Transformationsdeterminanten $\left|\frac{\partial z_i}{\partial y_k}\right| = [A((x))]^2$ und $\left|\frac{\partial z_i}{\partial x_k}\right| = [B((y))]^2$ zu jeder vorgegebenen Zahl prim sein können, leicht geschlossen werden kann.

6. Wenn bei der Transformation der Form C in das Produkt AB die Diskriminanten der drei Formen einander gleich sind, so hat man $\left|\frac{\partial z_i}{\partial y_k}\right| = |\sum_j m_{ijk} x_j| = \pm [A((x))]^2$, $\left|\frac{\partial z_i}{\partial x_k}\right| = |\sum_j m_{ikj} y_j| = \pm [B((y))]^2$ und $|\sum_j m_{jik} \zeta_j| = \pm [\mathfrak{C}((\zeta))]^2$, wobei $\mathfrak{C}$ die Reziproke von C bezeichnet.

Deshalb ist für diesen Fall die erste Forderung für die Definition des Kompositionsbegriffes der andern gleichwertig: die Teiler der Formen A und B sind zueinander prim. Sie ist also stets erfüllt, wenn eine der beiden Formen A, B primitiv ist. Weil $\mathfrak{C}$ ganzzahlige Koeffizienten hat, wenn das für die bilineare Substitution gilt, so sind nur Formen mit ganzzahligen Reziproken, d. h. K-Formen transformierbar in das Produkt zweier Formen, welche dieselbe Diskriminante wie die Ausgangsform haben. Das wurde bereits früher für die Formen erster Art ausgesprochen[10]); doch bedurfte es hier lediglich der Einführung des Begriffs der Formen zweiter Art, um das Resultat auf diese Formen übertragen zu können. Die Formen A und B brauchen aber, wie man leicht erkennt, nicht notwendig K-Formen zu sein. Sind sie jedoch beide primitiv (was bei gleicher Diskriminante der drei Formen nur möglich ist, wenn auch die Ausgangsform C primitiv ist), im besonderen, wenn es sich dabei um eine Komposition, also eine Komposition primitiver Formen von gleicher Diskriminante handelt, so müssen sie ebenfalls K-Formen sein. Das kann entweder daraus geschlossen werden, daß die beiden Transformationsdeterminanten $\left|\frac{\partial z_i}{\partial y_k}\right|$ und $\left|\frac{\partial z_i}{\partial x_k}\right|$ zu jeder beliebigen Zahl prim sein können, oder auch daraus, daß die koordinierten bilinearen Substitutionen, welche die Formen A in BC und B in CA transformieren[11]), ebenfalls ganzzahlig sind. *Für eine Kompositionstheorie primitiver Formen gleicher Diskriminante kommen daher nur die K-Formen in Betracht.* Im folgenden haben wir es nur noch mit diesem Hauptfall der Komposition zu tun.

7. Wenn in diesem Sinne eine Komposition $AB = C$ besteht, wobei die Symbole A, B, C primitive Formen gleicher Diskriminante oder auch ihre Klassen bedeuten, so bestehen, wie an anderer Stelle gezeigt wurde, gleichzeitig noch eine Reihe weiterer Kompositionen, die man erhält, wenn man die bilinearen Substitutionen des durch M bestimmten tetraedralen Systems bildet[12]). Dabei sind zwei Fälle zu unterscheiden. Entweder sind die reziproken Formen $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}$, welche stets einer Ordnung angehören, da das für A, B, C gilt, primitiv oder nicht. Im ersten Fall stimmt die Ordnung der Formen $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}$ mit der Ordnung der Formen A, B, C überein. Man hat dann die folgenden 24 Kompositionen, wobei eine entgegengesetzte Form bzw. die entgegengesetzte Klasse durch einen darüber gesetzten Strich bezeichnet wird:

---

[10]) A. a. O. [2]) § 6.
[11]) A. a. O. [2]) § 2.
[12]) A. a. O. [9]), Nr. 9 und 10.

$$
\begin{array}{llllll}
AB = C, & B\bar{C} = \bar{A}, & \bar{C}A = \bar{B}, & \bar{B}\bar{A} = \bar{C}, & C\bar{B} = A, & \bar{A}C = B, \\
A\mathfrak{B} = \mathfrak{C}, & B\bar{\mathfrak{C}} = \bar{\mathfrak{A}}, & \bar{C}\mathfrak{A} = \bar{\mathfrak{B}}, & \bar{B}\bar{\mathfrak{A}} = \bar{\mathfrak{C}}, & C\bar{\mathfrak{B}} = \mathfrak{A}, & \bar{A}\mathfrak{C} = \mathfrak{B}, \\
\mathfrak{A}B = \mathfrak{C}, & \mathfrak{B}\bar{C} = \bar{\mathfrak{A}}, & \bar{\mathfrak{C}}A = \bar{\mathfrak{B}}, & \bar{\mathfrak{B}}\bar{A} = \bar{\mathfrak{C}}, & \mathfrak{C}\bar{B} = \mathfrak{A}, & \bar{\mathfrak{A}}C = \mathfrak{B}, \\
\mathfrak{A}\mathfrak{B} = C, & \mathfrak{B}\bar{\mathfrak{C}} = \bar{A}, & \bar{\mathfrak{C}}\mathfrak{A} = \bar{B}, & \bar{\mathfrak{B}}\bar{\mathfrak{A}} = \bar{C}, & \mathfrak{C}\bar{\mathfrak{B}} = A, & \bar{\mathfrak{A}}\mathfrak{C} = B.
\end{array}
$$

Im zweiten Falle sind nur die letzten sechs zu streichen.

Diese Formeln unterscheiden sich von den a. a. O. angegebenen nur unwesentlich in der Bezeichnung. Daß die bilinearen Substitutionen für diese 24 bzw. 18 Gleichungen, deren Existenz dabei nachgewiesen wurde, auch tatsächlich Kompositionen vermitteln in dem oben eingeführten Sinne, ist leicht zu sehen. In der Tat sind zunächst die bilinearen Substitutionen ganzzahlig mit Ausnahme der 6 letzten im zweiten Falle. Ihre Signatur und Art ist positiv, so daß die zweite und dritte Forderung erfüllt sind. Daß die bilinearen Substitutionen aber auch der ersten Forderung genügen, ergibt sich sogleich daraus, daß unter den zu komponierenden Formen immer wenigstens eine primitiv ist, wobei natürlich wieder die 6 letzten im zweiten Falle ausscheiden.

§ 3.

Herstellung einiger Kompositionen.

8. Wir wenden uns nun zu dem Nachweis, daß auch umgekehrt *alle primitiven K-Formen eine Komposition zulassen.* Das wurde bereits früher (a. a. O. [5])) für die K-Formen erster Art nachgewiesen; doch wurde damals die dritte Forderung für den Begriff der Komposition nicht beachtet, weshalb wir auf diesen Beweis noch einmal zurückkommen. In ähnlicher Weise wird dann der Nachweis auch für die K-Formen zweiter Art erbracht.

Wir betrachten zunächst K-Formen, welche imstande sind, die Zahl 1 darzustellen. Solche K-Formen sollen *Hauptformen* und ihre Klassen *Hauptklassen* genannt werden.

In einer Hauptklasse erster Art kann man eine Form $H((x)) = x_0^2 + h(x_1, x_2, x_3)$ mit der Reziproken $\mathfrak{H}((x)) = d\,x_0^2 + \mathfrak{h}(x_1, x_2, x_3)$ auswählen. Dabei ist $\mathfrak{h}(x_1, x_2, x_3)$ eine ternäre Form vom Trägheitsindex 0 oder 1, der Determinante d und der Adjungierten $h(x_1, x_2, x_3)$. Für eine solche Form besteht, wie schon Hermite gezeigt hat[13]), die Identität

$$
\text{(G)}\qquad
\begin{aligned}
&H((x))\,H((y)) = H((z)) \\
&\qquad z_0 = x_0 y_0 - \sum_{ik}{}' h_{ik} x_i y_k, \\
&\qquad z_r = x_0 y_r + x_r y_0 + \mathfrak{h}_{r1} s_1 + \mathfrak{h}_{r2} s_2 + \mathfrak{h}_{r3} s_3.
\end{aligned}
$$

[13]) Hermite, Sur la théorie des formes quadratiques. Journal für r. u. a. Math. 47 (1854) = Œuvres I, S. 212.

Eine Hauptklasse zweiter Art kann durch eine Form mit dem ersten Koeffizienten 1, also durch eine Form

$$H((x)) = \frac{1}{2} \sum_{ik} h_{ik} x_i x_k = x_0 (x_0 + h_{01} x_1 + h_{02} x_2 + h_{03} x_3) + \cdots$$

mit der Reziproken $\mathfrak{H}((x)) = \frac{1}{2} \sum_{ik} \mathfrak{h}_{ik} x_i x_k$ repräsentiert werden. Für eine solche Form besteht eine der Hermiteschen entsprechende Identität, deren Herleitung wir an dieser Stelle übergehen[14]).

$$H((x))\, H((y)) = H((z))$$

$$(\mathrm{G}') \qquad \begin{aligned} z_0 &= x_0 y_0 - \sum_{ik}{}' h^*_{ki} x_i y_k, \\ z_1 &= x_0 y_1 + x_1 y_0 + h_{01} x_1 y_1 + \mathfrak{h}^*_{11} (x_2 y_3 - x_3 y_2) \\ &\quad + (\mathfrak{h}^*_{12} x_3 - \mathfrak{h}^*_{13} x_2) y_1 + (\mathfrak{h}^*_{31} y_2 - \mathfrak{h}^*_{21} y_3) x_1, \\ z_2 &= x_0 y_2 + x_2 y_0 + h_{02} x_2 y_2 + \mathfrak{h}^*_{22} (x_3 y_1 - x_1 y_3) \\ &\quad + (\mathfrak{h}^*_{23} x_1 - \mathfrak{h}^*_{21} x_3) y_2 + (\mathfrak{h}^*_{12} y_3 - \mathfrak{h}^*_{32} y_1) x_2, \\ z_3 &= x_0 y_3 + x_3 y_0 + h_{03} x_3 y_3 + \mathfrak{h}^*_{33} (x_1 y_2 - x_2 y_1) \\ &\quad + (\mathfrak{h}^*_{31} x_2 - \mathfrak{h}^*_{32} x_1) y_3 + (\mathfrak{h}^*_{23} y_1 - \mathfrak{h}^*_{13} y_2) x_3. \end{aligned}$$

Die Formeln (G) und (G′) vermitteln Kompositionen im obigen Sinne. *Demnach gestattet jede Hauptklasse eine Komposition mit sich selbst zu sich selbst.*

Zwischen Hauptklassen der gleichen Diskriminante ist aber auch *keine andere* Komposition möglich. Besteht nämlich zwischen drei Hauptformen H_1, H_2, H_3 mit gleicher Diskriminante eine Komposition $H_1 H_2 = H_3$, so schließt man daraus leicht, daß die drei Formen notwendig äquivalent sein müssen.

9. Um den Nachweis der Existenz einer Komposition für eine beliebige primitive K-Form erster Art $A((x)) = \sum_{ik} a_{ik} x_i x_k$ zu führen, knüpfen wir an die in Nr. 3 gegebenen Identitäten an. Wir dürfen dabei ohne Einschränkung die Form A in ihrer Klasse bestimmt ausgewählt denken. Das kann aber so geschehen, daß a_{00} positiv und prim zu $2d$ und auch prim zu $\mathfrak{a}_{00}$ ist. Man kann dann die Matrizen a^*, $\dot{a}^*$ und $\mathfrak{a}^*$, $\dot{\mathfrak{a}}^*$ in der folgenden Weise zerlegen

$$a^* = \| a^*_{ik} \| = \| \bar{\mathsf{A}}_{ik} \| \, \| \alpha_{ik} \|, \qquad \mathfrak{a}^* = \| \mathfrak{a}^*_{ik} \| = \| \mathsf{A}_{ik} \| \, \| \bar{\alpha}_{ik} \|$$

$$\dot{a}^* = \| a^*_{ki} \| = \| \bar{\mathsf{A}}'_{ik} \| \, \| \alpha'_{ik} \|, \qquad \dot{\mathfrak{a}}^* = \| \mathfrak{a}^*_{ki} \| = \| \mathsf{A}'_{ik} \| \, \| \bar{\alpha}'_{ik} \|$$

---

[14]) Sie kann durch lineare Transformation aus der Hermiteschen Formel gewonnen werden. Dabei ist $\mathfrak{h}^*_{23} = \frac{1}{2}(\mathfrak{h}_{23} + h_{32})$ usw., vgl. Nr.. 3.

wobei

$$|\alpha_{ik}| = |\alpha'_{ik}| = a_{00}, \quad |\bar{\alpha}_{ik}| = |\bar{\alpha}'_{ik}| = \mathfrak{a}_{00}, \quad \mathsf{A}_{\varrho\tau} = \frac{\partial}{\partial \alpha_{\tau\varrho}} |\alpha_{ik}|,$$
$$\bar{\mathsf{A}}_{\varrho\tau} = \frac{\partial}{\partial \bar{\alpha}_{\tau\varrho}} |\bar{\alpha}_{ik}| \text{ usw.}$$

Setzt man nun in der Identität I von Nr. 3 $z'_\tau = \sum_i' \alpha_{\tau i} z_i$, so werden die Bilinearformen

$$z'_\tau = \sum_i' \alpha_{\tau i}(x_0 y_i - x_i y_0) + \frac{1}{a_{00}} \sum_{ik}' \alpha_{\tau i} \mathfrak{a}^*_{ik} s_k = \sum_i' \alpha_{\tau i}(x_0 y_i - x_i y_0) + \sum_i' \bar{\alpha}_{\tau i} s_i$$

ganzzahlig. Weiter folgt, weil a_{00} ungerade, daß

$$\sum_{ik}' \mathfrak{a}_{ik} \alpha_{\varrho i} \alpha_{\tau k} = a_{00} \mathfrak{h}_{\varrho\tau}$$

gesetzt werden kann, wo die $\mathfrak{h}_{\varrho\tau}$ ganze Zahlen sind. Werden die Unterdeterminanten im dreireihigen System der $\mathfrak{h}_{\varrho\tau}$ durch $h_{\varrho\tau}$ bezeichnet, so erhält man durch Übergang zu den adjungierten Substitutionen

$$\sum_{ik}' \bar{a}_{ik} \mathsf{A}_{i\varrho} \mathsf{A}_{k\tau} = a_{00}^2 h_{\varrho\tau}.$$

Die Identität nimmt also, wenn die Akzente an den z'_τ fortgelassen werden, die folgende Gestalt an:

$$(\mathrm{K}) \quad \begin{aligned} A((x)) A((y)) &= z_0^2 + h(z_1, z_2, z_3) = H((z)), \\ z_0 &= \sum_{ik} a_{ik} x_i y_k, \\ z_\tau &= \sum_i' \alpha_{\tau i}(x_0 y_i - x_i y_0) + \sum_i' \bar{\alpha}_{\tau i} s_i, \end{aligned}$$

wobei $H((z))$ jetzt eine Hauptform erster Art bezeichnet.

Ganz entsprechend ergibt sich, wenn man in der Identität (I′) die Transformation $z'_\tau = \sum_i' \alpha'_{\tau i} z_i$ ausübt, die Existenz einer zweiten Hauptform $H'((z)) = z_0^2 + h'(z_1, z_2, z_3)$, für welche identisch

$$(\mathrm{K}') \quad \begin{aligned} A((x)) A((y)) &= z_0^2 + h'(z_1, z_2, z_3) = H'((z)), \\ z_0 &= \sum_{ik} a_{ik} x_i y_k, \\ z_\tau &= \sum_i' \alpha'_{\tau i}(x_0 y_i - x_i y_0) - \sum_i' \bar{\alpha}'_{\tau i} s_i. \end{aligned}$$

Die hiermit gewonnenen bilinearen Substitutionen (K) und (K′) sind beide von positiv-negativer Signatur, d. h. die Determinante $\left|\frac{\partial z_i}{\partial y_k}\right|$ hat positives, die Determinante $\left|\frac{\partial z_i}{\partial x_k}\right|$ negatives Vorzeichen. Sie sind aber von verschiedener Art, weil das für die bilinearen Substitutionen (I) und (I′) gilt und sie daraus durch reelle Transformation der z_τ mit positiver Determinante hergeleitet sind. Man kann sie aber leicht in solche von

positiver Signatur und positiver Art verwandeln, z. B. dadurch, daß man bei (K) die Variablen y_0 und z_0 und bei (K′) die Variablen x_1, x_2, x_3 mit -1 multipliziert. Geht noch $A((x))$, wenn x_0 durch $-x_0$ ersetzt wird, in $\bar{A}((x))$ über, so erhält man demnach die beiden Kompositionen $A\bar{A} = H$ und $\bar{A}A = H'$.

10. Es sei jetzt $A((x)) = \frac{1}{2}\sum\limits_{ik} a_{ik}x_i x_k$ mit der Reziproken $\mathfrak{A}((x)) = \frac{1}{2}\sum\limits_{ik}\mathfrak{a}_{ik}x_i x_k$ eine primitive K-Form zweiter Art, die wir in ihrer Klasse ohne Einschränkung so gewählt denken können, daß $a_0 = \frac{1}{2}a_{00}$ positiv und prim zu $2d$ und auch prim zu $\mathfrak{a}_{00}$ ist.

Zufolge der Identitäten von Nr. 3 wird dann

$$A((x))A((y)) = z_0^2 + \frac{1}{4}\sum_{ik}{}' \bar{\mathfrak{a}}_{ik} z_i z_k$$

für

$$z_0 = \frac{1}{2}\sum_{ik} a_{ik} x_i y_k,$$

$$z_r = x_0 y_r - x_r y_0 + \frac{1}{a_0}\sum_k{}' \mathfrak{a}^*_{rk} s_k,$$

bzw.

$$z_0 = \frac{1}{2}\sum_{ik} a_{ik} x_i y_k,$$

$$z_r = x_0 y_r - x_r y_0 - \frac{1}{a_0}\sum_k{}' \mathfrak{a}^*_{kr} s_k.$$

Ersetzt man z_0 durch $z_0 + \frac{1}{2}(a_{01}z_1 + a_{02}z_2 + a_{03}z_3)$, so wird die rechte Seite der Identität und der Ausdruck für z_0 ganzzahlig. Man erhält nämlich die Formeln

$$A((x))A((y)) = z_0(z_0 + a_{01}z_1 + a_{02}z_2 + a_{03}z_3) + a_0\frac{1}{2}\sum_{ik}{}' \mathfrak{a}_{ik} z_i z_k$$

für

$$\begin{cases} z_0 = (a_0x_0 + a_{01}x_1 + a_{02}x_2 + a_{03}x_3)y_0 + \sum\limits_{ik}{}' a^*_{ik} x_i y_k, \\ z_r = x_0 y_r - x_r y_0 + \dfrac{1}{a_0}\sum\limits_k{}' \mathfrak{a}^*_{rk} s_k, \end{cases}$$

bzw.

$$\begin{cases} z_0 = (a_0x_0 + a_{01}x_1 + a_{02}x_2 + a_{03}x_3)y_0 + \sum\limits_{ik}{}' a^*_{ki} x_i y_k, \\ z_r = x_0 y_r - x_r y_0 - \dfrac{1}{a_0}\sum\limits_k{}' \mathfrak{a}^*_{kr} s_k. \end{cases}$$

Wir zerlegen jetzt die Matrizen a^*, $\dot{a}^*$ und $\mathfrak{a}^*$, $\dot{\mathfrak{a}}^*$ ähnlich wie oben in der folgenden Weise

$$a^* = \|a^*_{ik}\| = \|\bar{\mathsf{A}}_{ik}\|\,\|a_{ik}\|, \quad \mathfrak{a}^* = \|\mathfrak{a}^*_{ik}\| = \|\mathsf{A}_{ik}\|\,\|\bar{\mathfrak{a}}_{ik}\|,$$

$$\dot{a}^* = \|a^*_{ki}\| = \|\bar{\mathsf{A}}'_{ik}\|\,\|a'_{ik}\|, \quad \dot{\mathfrak{a}}^* = \|\mathfrak{a}^*_{ki}\| = \|\mathsf{A}'_{ik}\|\,\|\bar{\mathfrak{a}}'_{ik}\|,$$

wobei

$$|a_{ik}| = |a'_{ik}| = a_0, \quad |\tilde{a}_{ik}| = |\tilde{a}'_{ik}| = \mathfrak{a}_0, \quad \mathsf{A}_{\varrho\tau} = \frac{\partial}{\partial a_{\tau\varrho}} |a_{ik}|,$$

$$\tilde{\mathsf{A}}_{\varrho\tau} = \frac{\partial}{\partial \tilde{a}_{\tau\varrho}} |\tilde{a}_{ik}| \text{ usw.}$$

Übt man jetzt in der ersten bilinearen Substitution die Transformation $z'_\tau = \sum_i{}' a_{\tau i} z_i$ aus, so wird sie ganzzahlig, es bleibt aber auch die rechte Seite der Identität bei der Transformation ganzzahlig.

Wenn man nämlich für z_τ die Werte $z_\tau = \frac{1}{a_0} \sum_i{}' \mathsf{A}_{\tau i} z'_i$ in die rechte Seite der Identität einführt, so erhält man, wenn die Akzente an den z'_τ fortgelassen werden, den Ausdruck

$$z_0(z_0 + h_{01} z_1 + h_{02} z_2 + h_{03} z_3) + \frac{1}{2} \sum_{ik}{}' h_{ik} z_i z_k = H((z)),$$

wobei die $h_{\mu\nu}$ durch die Gleichungen

$$\sum_i{}' a_{0i} \mathsf{A}_{i\tau} = a_0 \cdot h_{0\tau}, \qquad \sum_{ik}{}' a_{ik} \mathsf{A}_{i\varrho} \mathsf{A}_{k\tau} = a_0 \cdot h_{\varrho\tau}$$

bestimmt sind. Dabei sind aber die $h_{\mu\nu}$ ganze und h_{11}, h_{22}, h_{33} zudem gerade Zahlen. Denn weil $\sum_i{}' a_{0i} \overset{*}{\mathfrak{a}}_{i\tau} \equiv 0, (a_0)$, wie man durch Ausrechnen bestätigt, und a_0 prim zu $\mathfrak{a}_0$, so gilt $\sum_i{}' a_{0i} \mathsf{A}_{i\tau} \equiv 0, (a_0)$, und weil $\sum_{ik}{}' \overset{*}{a}_{ik} \mathsf{A}_{i\varrho} \mathsf{A}_{k\tau} \equiv 0, (a_0)$, so folgt

$$\sum_{ik}{}' a_{ik} \mathsf{A}_{i\varrho} \mathsf{A}_{k\tau} \begin{cases} \equiv 0, (a_0), & \text{wenn } \varrho \neq \tau \\ \equiv 0, (2a_0), & \text{wenn } \varrho = \tau. \end{cases}$$

Die Transformation ergibt also die folgenden Formeln

$$\text{(L)} \quad \begin{aligned} & A((x)) A((y)) = H((z)), \\ & z_0 = (a_0 x_0 + a_{01} x_1 + a_{02} x_2 + a_{03} x_3) y_0 + \sum_{ik}{}' \overset{*}{a}_{ik} x_i y_k, \\ & z_\tau = \sum_i{}' a_{\tau i}(x_0 y_i - x_i y_0) + \sum_i{}' \tilde{a}_{\tau i} s_i, \end{aligned}$$

und hier bezeichnet $H((z))$ ein Hauptform zweiter Art, welche dieselbe Diskriminante wie $A((x))$ besitzt.

In derselben Weise leitet man aus der zweiten bilinearen Substitution eine Hauptform $H'((z))$ von derselben Diskriminante her, für welche die Identität besteht

$$\text{(L}'\text{)} \quad \begin{aligned} & A((x)) A((y)) = H'((z)) \\ & z_0 = (a_0 x_0 + a_{01} x_1 + a_{02} x_2 + a_{03} x_3) y_0 + \sum_{ik}{}' \overset{*}{a}_{ki} x_i y_k, \\ & z_\tau = \sum_i{}' a'_{\tau i}(x_0 y_i - x_i y_0) - \sum_i{}' \tilde{a}'_{\tau i} s_i. \end{aligned}$$

Endlich ergeben sich aus den beiden Formeln (L) und (L′) ähnlich wie aus (K) und (K′) die Kompositionen $A\bar{A} = H$ und $\bar{A}A = H'$, wobei A und $\bar{A}$ wieder entgegengesetzte Formen bzw. Klassen bezeichnen.

11. *Damit ist gezeigt, daß alle primitiven K-Formen eine Komposition zulassen.* Aus den Kompositionen $A\bar{A} = H$ und $\bar{A}A = H'$ lassen sich noch eine Anzahl weiterer herleiten. Es bestehen nämlich nach Nr. 7 gleichzeitig die folgenden Kompositionen:

$$HA = A,\quad A\bar{A} = H,\quad \bar{A}H = \bar{A},\quad AH' = A,\quad \bar{A}A = H',\quad H'\bar{A} = \bar{A},$$
$$H\mathfrak{A} = \mathfrak{A},\quad A\bar{\mathfrak{A}} = \mathfrak{H},\quad \bar{\mathfrak{A}}H = \bar{\mathfrak{A}},\quad \mathfrak{A}H' = \mathfrak{A},\quad \bar{\mathfrak{A}}A = \mathfrak{H}',\quad H'\bar{\mathfrak{A}} = \bar{\mathfrak{A}},$$
$$\mathfrak{H}A = \mathfrak{A},\quad \mathfrak{A}\bar{A} = \mathfrak{H},\quad \bar{A}\mathfrak{H} = \bar{\mathfrak{A}},\quad A\mathfrak{H}' = \mathfrak{A},\quad \bar{A}\mathfrak{A} = \mathfrak{H}',\quad \mathfrak{H}'\bar{A} = \bar{\mathfrak{A}},$$

zu denen im Falle, daß die Form $\mathfrak{A}$ primitiv ist, noch diese sechs hinzutreten:

$$\mathfrak{H}\mathfrak{A} = A,\quad \mathfrak{A}\bar{\mathfrak{A}} = H,\quad \bar{\mathfrak{A}}\mathfrak{H} = \bar{A},\quad \mathfrak{A}\mathfrak{H}' = A,\quad \bar{\mathfrak{A}}\mathfrak{A} = H',\quad \mathfrak{H}'\bar{\mathfrak{A}} = \bar{A}.$$

An anderer Stelle werden wir zeigen, daß die Hauptklassen H und H' durch die primitive Klasse A eindeutig bestimmt sind. Wir nennen die Klassen A und H, ebenso A und H' gegenseitig einander zugehörig, und zwar bezeichnen wir die Zugehörigkeit noch näher durch die Reihenfolge der zu komponierenden Klassen. Wenn nämlich $HA = A$, so heißt H in bezug auf A die *vordere* oder *links zugehörige Hauptklasse* und A in bezug auf H eine *hintere* oder *rechts zugehörige Klasse.* Demnach ist auch die Klasse $\mathfrak{A}$ der Hauptklasse H rechts, die Klasse $\bar{\mathfrak{A}}$ ihr links zugehörig.

H	$\mathfrak{H}$	$\bar{A}$	$\bar{\mathfrak{A}}$
$\mathfrak{H}$	H	$\bar{\mathfrak{A}}$	$\bar{A}$
A	$\mathfrak{A}$	H'	$\mathfrak{H}'$
$\mathfrak{A}$	A	$\mathfrak{H}'$	H'

Die 24 Kompositionen, die im Falle, daß $\mathfrak{A}$ primitiv ist, bestehen, lassen sich in einem sehr einfachen Schema zusammenfassen. Ordnet man nämlich die hier vorkommenden Klassen in der vorstehenden Weise in einem Quadrat an und wählt irgendwie zwei Klassen so aus, daß die Zeile, der die erste, und die Spalte, der die zweite angehört, sich auf der Hauptdiagonale treffen, so ist in der gegebenen Reihenfolge aus den Klassen diejenige Klasse zusammengesetzt, welche sich in dem Feld befindet, in dem sich die Spalte, der die erste Klasse, und die Zeile, der die zweite angehört, treffen.

·	·	$\bar{A}$	$\bar{\mathfrak{A}}$	$\bar{C}$	$\bar{\mathfrak{C}}$
·	·	$\bar{\mathfrak{A}}$	$\bar{A}$	$\bar{\mathfrak{C}}$	$\bar{C}$
A	$\mathfrak{A}$	·	·	$\bar{B}$	$\bar{\mathfrak{B}}$
$\mathfrak{A}$	A	·	·	$\bar{\mathfrak{B}}$	$\bar{B}$
C	$\mathfrak{C}$	B	$\mathfrak{B}$	·	·
$\mathfrak{C}$	C	$\mathfrak{B}$	B	·	·

In ähnlicher Weise lassen sich die Kompositionsformeln der Nr. 8 durch das nebenstehende Schema und dieselbe Regel darstellen. Alle zwölf hier auftretenden Klassen können verschieden sein. Auf diese Schemata hoffe

ich bei einer anderen Gelegenheit näher eingehen zu können. Für alle untereinander komponierbaren primitiven Formenklassen gleicher Diskriminante lassen sie sich zu einer *Kompositionstafel*[15]) vereinigen, welche eine vollständige Beschreibung *aller* Kompositionen liefert.

12. Wir geben zum Schluß zur Erläuterung zwei Beispiele.

Aus der positiven Ordnung $\begin{pmatrix}1, & 1, & 1\\ 1, & 17, & 1\end{pmatrix}$ wählen wir als Repräsentant der Klasse A die Form $\boxed{\begin{array}{cccc} & 2, & 2, & 2\\ 3, & 4, & 5, & 7\\ & 4, & -2, & 0\end{array}}$ aus und finden dann $A \sim \mathfrak{A}$ und

$$\bar{A} \sim \bar{\mathfrak{A}} \sim \boxed{\begin{array}{cccc} & -2, & 2, & 2\\ 3, & 4, & 5, & 7\\ & 4, & 2, & 0\end{array}}, \qquad H \sim \boxed{\begin{array}{cccc} & 0, & 0, & 0\\ 1, & 5, & 7, & 11\\ & -6, & 4, & 2\end{array}},$$

$$\mathfrak{H} \sim \boxed{\begin{array}{cccc} & 2, & 2, & 0\\ 2, & 3, & 4, & 17\\ & 0, & 0, & 0\end{array}}, \qquad H' \sim \mathfrak{H}' \sim \boxed{\begin{array}{cccc} & 0, & 0, & 0\\ 1, & 3, & 6, & 17\\ & 0, & 0, & 2\end{array}}.$$

Demnach reduzieren sich die oben angegebenen Kompositionen auf die folgenden neun:

$$HA = A, \quad A\bar{A} = H, \quad \bar{A}H = \bar{A}, \quad AH' = A, \quad \bar{A}A = H', \quad H'\bar{A} = \bar{A},$$
$$A\bar{A} = \mathfrak{H}, \quad \mathfrak{H}A = A, \quad \bar{A}\mathfrak{H} = \bar{A}.$$

Das Beispiel läßt erkennen, daß bei den quaternären Formen bei einer Komposition $AB = C$ durch zwei der drei Klassen die dritte keineswegs eindeutig bestimmt ist[16]).

Als zweites Beispiel wählen wir ein solches, wo die acht Klassen A, $\bar{A}$, $\mathfrak{A}$, $\bar{\mathfrak{A}}$, H, H', $\mathfrak{H}$, $\mathfrak{H}'$ alle verschieden sind. Die Formen gehören dabei der Ordnung $\begin{pmatrix}1, & 1, & 1\\ 1, & 83, & 1\end{pmatrix}$ an.

$$A \sim \boxed{\begin{array}{cccc} & 2, & 2, & 0\\ 3, & 13, & 14, & 16\\ & 10, & 6, & 6\end{array}}, \qquad \bar{A} \sim \boxed{\begin{array}{cccc} & -2, & -2, & 0\\ 3, & 13, & 14, & 16\\ & 10, & 6, & 6\end{array}},$$

$$\mathfrak{A} \sim \boxed{\begin{array}{cccc} & 4, & 2, & 2\\ 6, & 7, & 7, & 29\\ & 4, & 4, & -2\end{array}}, \qquad \bar{\mathfrak{A}} \sim \boxed{\begin{array}{cccc} & 2, & 4, & 2\\ 6, & 7, & 7, & 29\\ & 4, & 4, & -2\end{array}},$$

---

[15]) Die Kompositionstafeln bildeten bereits den Gegenstand eines Vortrages auf dem Naturforschertag in Nauheim im September 1921.

[16]) Entgegen einer früher von mir ausgesprochenen Vermutung a. a. O.[5]) Schluß.

$$H \sim \boxed{\begin{array}{rrrr} & 0, & 0, & 0 \\ 1, & 7, & 25, & 48 \\ & 22, & 4, & -6 \end{array}}\,, \qquad \mathfrak{H} \sim \boxed{\begin{array}{rrrr} & 2, & 2, & 0 \\ 2, & 4, & 13, & 83 \\ & 0, & 0, & -2 \end{array}}\,,$$

$$H' \sim \boxed{\begin{array}{rrrr} & 0, & 0, & 0 \\ 1, & 11, & 23, & 31 \\ & 14, & 6, & -4 \end{array}}\,, \qquad \mathfrak{H}' \sim \boxed{\begin{array}{rrrr} & 2, & 2, & 0 \\ 3, & 4, & 8, & 83 \\ & 0, & 0, & 2 \end{array}}\,.$$

(Eingegangen am 16. 9. 1923.)

Über Grenzwerte ganzer transzendenter Funktionen.

Von

Karl Grandjot in Göttingen.

Zahlreiche Arbeiten befassen sich mit den etwaigen Grenzwerten ganzer Funktionen auf Wegen ins Unendliche; dabei wird bald nach den möglichen Grenzwerten auf beliebigen Kurven, bald nach den Kurven gefragt, auf denen gewisse Grenzwerte angestrebt werden können. Daß eine nicht konstante ganze Funktion nicht auf allen ins Unendliche gehenden Wegen einen endlichen Grenzwert haben kann, folgt sofort aus einem bekannten Weierstraßschen Satz. Andrerseits gaben aber Herr Malmquist[1]) und dann Herr Mittag-Leffler[2]) Beispiele von ganzen Funktionen, die auf allen Halbstrahlen aus dem Nullpunkt außer auf einem einzigen gegen Null gingen, auf diesem einen aber unendlich wurden; Herr Mittag-Leffler[3]) konnte sein Beispiel später so abändern, daß die Funktion auf allen Halbstrahlen aus dem Ursprung gegen Null strebte, ohne identisch zu verschwinden — sie hatte nämlich auf einem gewissen (nicht durch den Nullpunkt gehenden) Halbstrahl den Grenzwert Unendlich. Schließlich[4]) bildete er auch eine nicht konstante ganze Funktion, die auf *allen* Halbstrahlen denselben endlichen Grenzwert hatte; beim Nachweis dieser Eigenschaft mußte er allerdings einen gewissen Halbstrahl gesondert behandeln. In der vorliegenden Arbeit gebe ich im § 1 eine ganze Funktion an, die sogar auf *allen ins Unendliche gehenden algebraischen Kurvenästen* gegen Null strebt, aber nicht identisch Null ist (im Gegenteil längs einer gewissen transzendenten Kurve

---

[1]) *Étude d'une fonction entière*, Acta math. **29** (1905), S. 203–215.

[2]) *Une nouvelle fonction entière*, Comptes rendus Acad. sc. Paris **138** (1904), S. 941–942.

[3]) *Sur une classe de fonctions entières*, Verh. des III. internat. Math.-Kongr. in Heidelberg 1904 (Leipzig 1905), S. 258–264.

[4]) *Sur la représentation analytique d'une branche uniforme d'une fonction monogène* (Sixième note), Acta math. **42** (1920), S. 285–308.

gegen Unendlich geht). Das zur Aufstellung benutzte Verfahren ist durchaus dem Mittag-Lefflerschen nachgebildet.

Im § 2 zeige ich durch ein Beispiel das Vorhandensein ganzer Funktionen, die zwar auf allen sich ins Unendliche erstreckenden algebraischen Kurvenästen einen endlichen Grenzwert haben, aber nicht auf allen den gleichen.

Schon eine solche nicht konstante ganze Funktion, die auf allen Halbstrahlen aus Null einen endlichen Grenzwert hat, kann nicht von endlichem Geschlecht sein; das ersieht man leicht aus einem bekannten Phragmén-Lindelöfschen Satz[5]). Anders steht es mit ganzen Funktionen, die auf allen Halbstrahlen gegen *Unendlich* streben, ohne doch rational zu sein. Für solche Funktionen gab Herr von Koch[6]) die einfachsten Beispiele; unter diesen hat z. B. $e^z + z$ das endliche Geschlecht Eins. Im § 3 stelle ich jetzt ganze transzendente Funktionen jeder endlichen Ordnung auf, die wiederum sogar auf allen algebraischen Kurvenästen gegen Unendlich streben. Man bemerkt daran: In dem bekannten Wimanschen Satz, daß eine nicht konstante ganze Funktion von der Ordnung $\varrho < \frac{1}{2}$ nach dem Unendlichen hin sich keinem endlichen Grenzwert nähern kann, darf „endlichen Grenzwert" nicht etwa durch „Grenzwert", nicht einmal durch „Grenzwert auf allen algebraischen Kurvenästen" ersetzt werden.

§ 1.

Stets sei $w = u + vi$, $\zeta = \xi + \eta i$, $z = x + yi$; Logarithmus und Quadratwurzel sollen ihren Hauptwert haben. Für jedes $r \geqq 1$ möge durch die Abbildung $\zeta = e^{\sqrt{w}}$ aus der (in diesem Sinne durchlaufenen) Kurve

$$u \geqq r, \quad v = \pi; \qquad u = r, \quad \pi < v < 3\pi; \qquad u \geqq r, \quad v = 3\pi$$

die Kurve T_r und aus $u \geqq 2$, $v = 2\pi$ die Kurve T werden; ferner bezeichne F_r den $\zeta = 0$ enthaltenden zusammenhängenden Teil des Gebiets, dessen Punkte von allen Punkten von T_r um mehr als 1 abstehen. Jedes F_r enthält alle mit kleinerem r, und jeder Punkt der Ebene liegt in einem F_r. Die $v = \pi$ und $v = 3\pi$ entsprechenden Punkte von T_r und die Punkte von T genügen, $a = 1$ bzw. $= 3$ bzw. $= 2$, $\sqrt{w} = p + qi$ gesetzt, der Beziehung

$$w = (p + qi)^2 = p^2 - q^2 + 2pqi = u + a\pi i, \qquad q = \frac{a\pi}{2p},$$

$$\zeta = e^p e^{\frac{a\pi i}{2p}} = e^p\left(1 + \frac{a\pi i}{2p} + o\left(\frac{1}{p}\right)\right) = \xi\left(1 + \frac{a\pi i}{2\log\xi} + o\left(\frac{1}{\log\xi}\right)\right).$$

---

[5]) *Sur une extension d'un principe classique de l'analyse et sur quelques propriétés des fonctions monogènes dans le voisinage d'un point singulier*, Acta math. **31** (1908), S. 381–406.

[6]) *Sur une classe remarquable de fonctions entières et transcendantes*, Arkiv för mat., astr. och fys. **1** (1903), S. 205–208.

Man erkennt, daß für alle z auf T und alle ζ auf T_1 der Abstand $|\zeta - z| > c > 0$ ist; und da die Punkte eines jeden K, — so möge in Zukunft ein ins Unendliche gehender Ast einer algebraischen Kurve kurz bezeichnet werden —, der ζ-Ebene asymptotisch eine Beziehung der Gestalt $\xi^m \eta^n =$ konst. erfüllen, liegen die hinreichend entfernten in F_1.

Nun ist das Integral

$$\int_{T_r} \frac{e^{e^{\log^2 \zeta}}}{\zeta - z} d\zeta$$

für alle z in F_r gleichmäßig konvergent; denn es ist $|\zeta - z| > 1$ und auf T_r zuletzt $|e^{e^{\log^2 \zeta}}| = |e^{e^w}| = e^{-e^u} < e^{-e^{\frac{1}{2}|w|}} < e^{-e^{\frac{1}{2}\log^2|\zeta|}}$. Ebenso konvergiert $\int\limits_{T_1}$ auch für alle z auf T gleichmäßig, wegen $|\zeta - z| > c$. Für z in F_r definiert daher $\int\limits_{T_r}$ eine reguläre Funktion $f_r(z)$, und da für z in F_1 nach Cauchy $f_1(z) = f_r(z)$ für jedes r gilt, ist $f_1(z)$ eine ganze Funktion. Ferner strebt $f_1(z)$ gegen Null, wenn z in F_1 nach dem Unendlichen geht, insbesondere also auf jedem K. Endlich verschwindet $f_1(z)$ nicht identisch; denn auch für z auf T und $z \to \infty$ gilt $\int\limits_{T_1} \to 0$, also nach Cauchy (bei passend großem $r = r(z)$)

$$f_1(z) = f_r(z) = \int\limits_{T_r} = \int\limits_{T_1} + 2\pi i\, e^{e^{\log^2 z}} = \int\limits_{T_1} + 2\pi i\, e^{e^{\Re \log^2 z}} \to \infty.$$

§ 2.

Für jedes $r \geqq 1$ entstehe durch die Abbildung $\zeta = \log w$ die Kurve T_r aus

$$u \geqq r,\ v = -\pi; \qquad u = r,\ -\pi < v < \pi; \qquad u \geqq r,\ v = \pi;$$

ferner sei F_r der $\zeta = -2$ enthaltende zusammenhängende Teil des Gebiets, dessen Punkte von allen Punkten von T_r um mehr als 1 abstehen. Für die $v = \pi$ und $v = -\pi$ entsprechenden Punkte von T_r gilt

$$\zeta = \log(u \pm \pi i) = \log u \pm \frac{\pi i}{u} + o\left(\frac{1}{u}\right) = \xi \pm \pi e^{-\xi} i + o(e^{-\xi}).$$

Für alle ζ auf T_1 und die letzten z eines festen K ist $|\zeta - z| > c > 0$, falls K die positive x-Achse nicht zur Asymptote hat; sonst bleibt es entweder zuletzt „außerhalb“ von T_1 und seine Punkte erfüllen eine Beziehung $z = x + b x^\varrho i + o(x^\varrho)$, $b \gtrless 0$, $\varrho < 0$, so daß zuletzt

$$|\zeta - z| > \frac{1}{2} |\xi \pm \pi e^{-\xi} i + o(e^{-\xi}) - \xi - b \xi^\varrho i - o(\xi^\varrho)| > \frac{|b|}{4} \xi^\varrho > \frac{|b|}{4} |\zeta|^\varrho$$

gilt; oder aber es fällt mit der Achse zusammen, und es ist zuletzt

$|\zeta - z| > |\pi e^{-\xi} i + o(e^{-\xi})| > e^{-\xi} > e^{-|\zeta|}$. Jedenfalls wird also zuletzt $|\zeta - z| > e^{-|\zeta|}$.

Für die ganze Funktion

$$\varphi(\zeta) = \int_0^\zeta \frac{\sin t}{t}\, dt + \frac{\pi}{2}$$

gilt bei reellem ζ

$$\varphi(\zeta) \to \pi, \quad \text{wenn} \quad \zeta \to +\infty,$$

$$\varphi(\zeta) = \int_{-\infty}^{\zeta} \frac{\sin t}{t}\, dt = O\left(\frac{1}{|\zeta|}\right), \text{ wenn } \zeta \to -\infty.$$

Daher ist

$$\int_{T_r} \frac{\varphi(e^{e^\zeta})}{\zeta - z}\, d\zeta$$

für alle z in F_r gleichmäßig konvergent; denn es ist $|\zeta - z| > 1$ und zuletzt

$$e^{e^\zeta} = e^w = -e^u \to -\infty,$$

also

$$\varphi(e^{e^\zeta}) = O(e^{-u}) = O(e^{-\frac{1}{2}|w|}) = O(e^{-\frac{1}{2}e^{\frac{1}{2}|\zeta|}}).$$

Für die letzten Punkte eines jeden K konvergiert $\int_{T_1}$ auch gleichmäßig, da der Integrand dann gleichmäßig $O(e^{-\frac{1}{2}e^{\frac{1}{2}|\zeta|}} e^{|\zeta|})$ ist. Wie im § 1 ergibt sich, daß die durch $\int_{T_1}$ in F_1 definierte Funktion $f_1(z)$ ganz ist. Ferner ist $f_1(z) \to 0$, wenn z auf einem von der positiven x-Achse verschiedenem K ins Unendliche geht. Auf dieser aber ist bei groß werdendem z (r passend groß)

$$f_1(z) = f_r(z) = \int_{T_r} = \int_{T_1} + 2\pi i\, \varphi(e^{e^z}) \to 2\pi^2 i.$$

§ 3.

1. Beispiel einer ganzen transzendenten Funktion der Ordnung Null, die auf allen K nach Unendlich strebt.

Für $n = 1, 2, 3, \ldots$ sei $|a_n| = 2^n$ und

$$f(z) = \prod_1^\infty \left(1 - \frac{z}{a_n}\right).$$

Der Grenzexponent, also auch die Ordnung von $f(z)$ ist offenbar Null. Nun sei a_n durch die Bedingung $\Re a_n \geq 0$, $\Im a_n = e^{\Re a_n}$ festgelegt. Für alle a_n und für die letzten Punkte z eines K ist offensichtlich $|z - a_n| > 1$. Dann ist aber, wenn bei $|z| \geq 8$ das natürliche m aus $|a_{m-1}| \leq |z| < |a_m|$ bestimmt wird,

$$
\begin{aligned}
|f(z)| &= \prod_{1}^{m-2} \left|1-\frac{z}{a_n}\right| \cdot \left|1-\frac{z}{a_{m-1}}\right| \cdot \left|1-\frac{z}{a_m}\right| \cdot \prod_{m+1}^{\infty} \left|1-\frac{z}{a_n}\right| \\
&> \prod_{1}^{m-2} \left(\frac{|a_{m-1}|}{|a_n|}-1\right) \cdot \frac{|z-a_{m-1}|}{|a_{m-1}|} \cdot \frac{|z-a_m|}{|a_m|} \cdot \prod_{m+1}^{\infty} \left(1-\frac{|a_m|}{|a_n|}\right) \\
&> \prod_{1}^{m-2} (2^{m-1-n}-1) \cdot \frac{1}{2^{2m}} \cdot \prod_{m+1}^{\infty} (1-2^{m-n}) \\
&> \prod_{1}^{m-2} 2^{n-1} \cdot 2^{-2m} \cdot \prod_{1}^{\infty} (1-2^{-n}) = 2^{\frac{(m-3)(m-2)}{2}} \cdot 2^{-2m} \cdot c \to \infty.
\end{aligned}
$$

2. Für ein Beispiel einer ganzen Funktion jeder endlichen Ordnung $\varrho > 0$, die auf allen K gegen Unendlich geht, genügt es, eine Funktion für jedes ϱ mit $0 < \varrho \leqq \frac{1}{2}$ anzugeben; denn ersetzt man hierin z durch z^l, $l = 2, 3, \ldots$, so entstehen Funktionen jeder endlichen positiven Ordnung, während die Gesamtheit der K ungeändert bleibt.

Für $n = 1, 2, 3, \ldots$ und $\sigma = \frac{1}{\varrho} \geqq 2$ sei $|a_n| = n^\sigma$,

$$
f(z) = z^3 \prod_{1}^{\infty} \left(1-\frac{z}{a_n}\right).
$$

Der Grenzexponent und damit die Ordnung von $f(z)$ ist ϱ. Wieder werde a_n durch $\Re a_n \geqq 0$, $\Im a_n = e^{\Re a_n}$ festgelegt. Für alle a_n und für die letzten Punkte z eines K ist $|z - a_n| > 1$. Bei unveränderter Bedeutung von m ist dann für alle hinreichend großen $|z|$

$$
\begin{aligned}
|f(z)| &> |z|^3 \prod_{1}^{m-2} \left(\frac{|a_{m-1}|}{|a_n|}-1\right) \cdot \frac{|z-a_{m-1}|}{|a_{m-1}|} \cdot \frac{|z-a_m|}{|a_m|} \cdot \prod_{m+1}^{\infty} \left(1-\frac{|a_m|}{|a_n|}\right) \\
&> \frac{|z|}{2} \prod_{1}^{m-2} \left(\left(\frac{m-1}{n}\right)^2-1\right) \prod_{m+1}^{\infty} \left(1-\left(\frac{m}{n}\right)^2\right) \\
&> \frac{|z|}{2} \prod_{1}^{m-2} \frac{(m-1-n)(m-1+n)}{n^2} \cdot \frac{1}{8} \frac{(m-1)(2m-2)(2m-1)2m}{(m-1)^2 m^2} \\
&\qquad \cdot \lim_{r \to \infty} \prod_{m+1}^{r} \frac{(n-m)(n+m)}{n^2} \\
&= \frac{|z|}{16} \lim_{r \to \infty} \frac{(r-m)!\,(r+m)!}{(r!)^2} = \frac{|z|}{16} \lim_{r \to \infty} \frac{(r+1)\ldots(r+m)}{(r-m+1)\ldots r} = \frac{|z|}{16} \to \infty.
\end{aligned}
$$

Göttingen, den 18. August 1923.

(Eingegangen am 15. 9. 1923.)